OFICINAS DE MATEMÁTICA DISCRETA NO ENSINO MÉDIO

Gilda Leventhal

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Aprovada por:

____
Prof. Samuel Jurkiewicz, D.Sc.

____
Prof. Paulo Oswaldo Boaventura Netto, D.Ing.

____
Prof ª Patrícia Erthal de Moraes, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 2005

LEVENTHAL, GILDA

Oficinas de Matemática Discreta no ensino médio [Rio de Janeiro] 2005

IX, 89p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Produção, 2005)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Oficinas de Matemática Discreta

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Dedico a todas as pessoas, que de alguma forma, me ajudaram e continuarão me ajudando na eterna construção de minha formação profissional: meus professores, alunos e colegas de trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Samuel Jurkiewicz, por ter me orientado, sempre com muita paciência, generosidade e bom humor, compreendendo minhas limitações e principalmente por ter confiado em mim para estar a frente de um trabalho que é parte de um projeto dele.

Aos professores Paulo Oswaldo Boaventura Netto e Patricia Erthal de Moraes por terem aceitado participar da banca.

À professora Chistine Sertã por ter sempre me motivado e indicado a COPPE/UFRJ.

Ao professor Celso Figueiredo pelo carinho, momentos de descontração e pelo auxílio no entendimento de alguns dos tópicos tratados neste trabalho.

À professora Maria Helena Sampaio, diretora da unidade Humaitá II do colégio Pedro II, pelo apoio, pelo carinho e por ter permitido a entrada de meu orientador em sala de aula para que parte do trabalho pudesse ser feito.

Aos professores e funcionários do Programa de Engenharia de Produção, em especial à Andreia, secretária do grupo de Pesquisa Operacional, sempre solícita e carinhosa.

À querida amiga Rosa Maria Mazo Reis pelo carinho e desprendimento. Pelo tempo que "gastou" comigo dando sugestões para encaminhamento de alguns dos assuntos tratados neste trabalho

À Julia Ramos por sua ajuda na tradução do texto em francês

Ao Alexandre Leventhal, meu irmão, e Cristina Amorim Leventhal, minha cunhada, pela amizade e pelo incentivo, às vezes até em forma de “bronca”, mas não deixando que eu abandonasse o trabalho em momentos em que estava bastante desanimada; em especial ao Alexandre pela ajuda na versão para o inglês e pelos melhoramentos que fez no material em power point para a apresentação deste trabalho.

Ao Felipe, meu companheiro, sempre amigo, paciente nos momentos difíceis, sempre me motivando e entendendo a importância deste trabalho para mim.

“ **ALGUNS HOMENS VÊEM AS COISAS COMO SÃO E PERGUNTAM: POR QUE ? EU SONHO COM AS COISAS QUE NUNCA EXISTIRAM E DIGO: - POR QUE NÃO ?”**

GEORGE BERNARD SHAW

REPRIMIR OS SONHOS DE UM PROFESSOR É UMA MUTILAÇÃO. UM PROFESSOR É O QUE ELE VIVE: SONHANDO, DELIRANDO, INVENTANDO, RECONSTRUÍNDO E, MAIS DO QUE TUDO, OUSANDO

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para o obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

OFICINAS DE MATEMÁTICA DISCRETA NO ENSINO MÉDIO

Gilda Leventhal

Fevereiro /2005

Orientador: Samuel Jurkiewicz

Programa: Engenharia de Produção

Os currículos de matemática nos seus diversos níveis acadêmicos foram construídos sob a influência da matemática do contínuo, trazidos pelos processos sócios-econômicos no período pós revolução industrial. Entretanto, desde o final da segunda guerra mundial, o desenvolvimento de técnicas digitais no tratamento da informação tem possibilitado e impulsionado o uso de outros instrumentos matemáticos na sociedade e, em particular, nos sistemas educacionais.

Nesta dissertação, é considerada a possível introdução da matemática discreta, em particular, a Teoria dos Grafos, nos currículos de matemática do ensino médio.

O trabalho relata experiências vividas em oficinas oferecidas em duas instituições de ensino (uma pública federal e outra particular) na zona sul do Rio de Janeiro. Nessas oficinas é abordada a questão da forma matemática de tratar diversos problemas do dia-a-dia, em um modelo acessível ao aluno.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of master of Science (M.Sc.)

DISCRETE MATH WORSHOPS IN HIGH SCHOOL

Gilda Leventhal

February/2005

Advisor: Samuel Jurkiewicz

Department: Production Engineering

Math curricula in its various academic levels were built under the influence of continuous mathematics, brought economic processes of the period following the industrial revolution. Nevertheless, since the end of Second Wold War, the development of digital techniques in the management of information has been allowing and incrementing the usage of other mathematical instruments in the society and, specifically, in the educational systems.

In this work, we considered the possible introduction of discrete maths, particularly the Graph Theory, in the curriculum of math for high school.

We describe experiences in workshops within two educational institutions (one public and another privately owned) in the South Zone of Rio de Janeiro. In such workshops, the subject refers to the mathematical way of tackling several day-to-day problems, in an model accessible to the student.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO.

Neste trabalho relatamos uma parte do que foi realizado nas Oficinas de Matemática Discreta, a parte que tratou da teoria dos grafos, com duração de um semestre letivo. Estas oficinas, que são parte de um projeto maior, desenvolvido pelo professor Samuel Jurkiewicz, para a introdução da matemática discreta no ensino médio, foram realizadas em 2002.

Ao longo deste ano participamos de oficinas em dois estabelecimentos de ensino do Rio de Janeiro. Um deles é o Colégio Pedro II, instituição pública federal que atende alunos de ensino médio e fundamental. O outro é a Escola Parque, uma escola particular que também atende alunos de ensino médio e fundamental

Dois aspectos merecem atenção especial: o conteúdo das oficinas e a forma de trabalho.

Nestas oficinas tratamos conteúdos não habituais e verificamos que nenhum aluno que tenha participado delas, tinha conhecimento prévio de qualquer um dos temas trabalhados.

A matemática discreta que, principalmente com o advento da computação, vem se desenvolvendo a passos largos, tem nos currículos atuais poucas frentes inseridas. Tais conteúdos abordam questões importantes articuladas com temas importantes e pouco contempladas, como por exemplo comunicação, transporte, alocação de recursos, gestão e produção. Acreditamos que estes conteúdos sejam acessíveis aos alunos do ensino médio e que serão paulatinamente introduzidos pela pressão da necessidade.

As características lúdicas dos problemas, com situações próximas ao cotidiano do corpo discente, fáceis de formular e compreender, tornam-nos interessantes. O desafio de lidar, pela primeira vez, com problemas sem solução exata conhecida, representa enfim uma oportunidade pedagógica ímpar.

O trabalho com conteúdos nunca trabalhados pelos alunos, mas identificados como próximos à sua realidade e que não possuíam solução "atrás do livro" para conferência do resultado, motivou-os, pois precisavam desenvolver o espírito crítico e o bom senso, porque a todo o momento se deparavam com problemas cuja solução precisava ser analisada. Não tinham nenhuma garantia de tratar-se da solução "ótima" e mesmo assim precisavam verificar sua viabilidade.

Os alunos tiveram a oportunidade de lidar com a matemática de um ponto de vista analítico; a solução em si deixava de ser o único objeto valioso, o processo para a obtenção e análise da solução era o que passaria a ter maior importância.

No que diz respeito à forma de trabalho, nenhuma oficina foi planejada para depender exclusivamente da exposição do professor. Em todas havia uma proposta de atividade, onde o trabalho coletivo era estimulado. A discussão e a análise de estratégias estava sempre nas atividades propostas. A avaliação era feita em função da participação do aluno, não havendo provas, testes ou qualquer avaliação formal. A idéia era produzir um clima de oficina, onde se produzia matemática e ao mesmo tempo se praticavam as competências.

Não temos dúvidas que os atuais currículos de ensino médio estão saturados, e, mais ainda, entendemos que alguns conteúdos não precisariam ser abordados ou, pelo menos, deveriam ser abordados de outra forma. São conteúdos que desenvolvem pouco o raciocínio lógico, têm pouca ou nenhuma aplicação no dia a dia dos alunos, gerando com isso a falta de interesse e conseqüentemente a dificuldade em aprender.

Nosso trabalho abrange as doze primeiras sessões da oficina, aproximadamente um semestre letivo. O retorno que obtivemos de nossos alunos foi bastante animador. Mesmo sabendo que se tratava de um grupo especialmente interessado, com um legítimo desejo de aprender matemática, podemos afirmar que os resultados foram claramente positivos.

Os currículos de Matemática, como os conhecemos, foram construídos, por um lado, "a reboque" das pressões sócio-econômicas e por outro, influenciados pela maneira como os matemáticos e cientistas de outros campos compreendiam as necessidades da construção do conhecimento.

No início do século XXI temos a oportunidade rara de nos antecipar e começar a influenciar o currículo de forma a se harmonizar com as necessidades já existentes, mas ainda em ascensão na sociedade. Nesse sentido as Oficinas de Matemática Discreta representam uma contribuição, modesta é certo, mas sintonizada com o que deve ser o bom ensino de matemática.

2. JUSTIFICATIVA HISTÓRICA.

Os currículos de matemática, tais como os conhecemos hoje, foram construídos sob a influência da matemática do contínuo e do desenvolvimento de suas aplicações nos processos sócio-econômicos no período pós-revolução industrial. Eles refletem, em grande parte, a evolução dos conceitos matemáticos e seu sucesso em fornecer à sociedade resultados práticos para soluções de problemas existentes e bases para o desenvolvimento tecnológico e científico futuro.

Estes currículos desenvolveram-se, nos ensinos fundamental e médio, de forma seqüencial e cumulativa. Seqüencial por reconstituir o percurso histórico da Matemática na humanidade até o século XVIII; e cumulativa porque o volume de conteúdos que se supõe que os alunos devam aprender foi aumentando na medida que a sociedade foi assimilando mais conhecimentos em seus aspectos cotidianos, econômicos e sociais.

O sucesso do Cálculo Diferencial e Integral em oferecer resultados práticos para soluções de problemas e bases para o desenvolvimento tecnológico fez dessa área da Matemática o tema dominante dos currículos de Matemática. O programa é claro e bem sucedido: foi essa matemática que possibilitou ao mundo ser o que é hoje, respondendo de forma bastante eficiente a desafios impostos pela ciência nos séculos XIX e XX e ela certamente ainda terá bastante serventia para o futuro.

Mesmo com a preponderância do cálculo diferencial e integral, alguns conteúdos mistos de matemática discreta e contínua, como probabilidade e estatística, e conteúdos especificamente de matemática discreta, como análise combinatória e matrizes, foram incorporados aos currículos atuais. Em particular, a álgebra linear e as matrizes são ferramentas valiosas para as novas abordagens sócio-econômico-industriais nos tempos atuais, de tratamento digital das informações.

A algorítmica é considerada hoje uma ciência de primeira necessidade. O desenvolvimento de certas habilidades pode determinar a diferença entre uma sociedade desenvolvida e outra não. O raciocínio algorítmico deve ser introduzido, de forma pedagógica adequada, objetivando oferecer aos alunos das sociedades do século XXI a possibilidade de se desenvolver num mundo onde a cultura dos procedimentos seqüenciais se torna, cada vez mais, um padrão.

Além da algorítmica, outra tendência emerge com aspectos históricos e teóricos muito fortes; trata-se da matemática discreta cuja difusão se sustenta pelas modernas abordagens de gestão, produção, planejamento e distribuição que vem se desenvolvendo desde a segunda guerra mundial, com a preocupação de solucionar problemas logísticos.

Concomitantemente, o desenvolvimento da computação propiciou o uso de métodos discretos para modelar e otimizar situações sociais que antes eram consideradas prescindíveis, tais como: tempo de produção, distribuição e alocação de recursos.

A inserção da matemática discreta nos currículos de ensino pré-universitário e universitário é fortalecida também pelo fato de tratar-se de uma ferramenta didático-pedagógica poderosa. Os livros didáticos, de uma maneira geral, diferem muito pouco uns dos outros, seja nos conteúdos, seja na apresentação: fragmentos de conteúdos são apresentados superficialmente, seguidos de exercícios e nas páginas finais uma única solução para cada exercício, resultante também de um processo único. Conseqüentemente, os alunos não se interessam pelo significado dos problemas, pelo valor da elaboração do processo de obtenção e avaliação de uma solução, interessando-se apenas pela solução em si. Esta questão é muitas vezes contornada pela qualidade do professor ou por um grupo de alunos em particular, mas as marcas na sociedade são inequívocas.

Alguns problemas propostos pelos conteúdos, cuja inserção nos currículos defendemos, têm características que favorecem uma atitude do corpo discente diferente da descrita acima, oferecendo novos caminhos e alternativas para tais questões. Por sua natureza discreta, apesar das características analíticas, estes problemas são de compreensão acessível, são abordáveis por processos algorítmicos, ainda que, em alguns casos, com solução intratável computacionalmente, e são largamente aplicáveis em situações de comunicação, transporte e alocação de recursos, diferentemente das aplicações clássicas do cálculo diferencial e integral, mais voltadas para a ciência de laboratório.

A inclusão da matemática discreta e da algorítmica nos currículos atuais não será uma tarefa fácil pois a maior parte dos docentes não tem formação adequada e os currículos atuais já estão saturados. As condições históricas e econômicas já estão presentes e nos fazem acreditar que esta inclusão virá a acontecer. Permanece, entretanto, o desafio de forjar as condições dos ambientes de ensino.

3. JUSTIFICATIVA DA ESCOLHA DE TEORIA DOS GRAFOS COMO PRINCIPAL ASSUNTO.

A escolha da teoria dos grafos como tema principal se deu pelo fato de ela tratar de problemas atrativos do ponto de vista gráfico, com características lúdicas, que os tornam semelhantes a "quebra-cabeças". Possuem aplicações em problemas próximos do cotidiano (distribuição, gestão, serviços, etc...) em contraposição a problemas ligados a bancadas de laboratórios. São problemas fáceis de formular e compreender, mas oferecem obstáculos suficientes para torná-los interessantes. Alguns desses problemas não possuem nem mesmo uma solução algorítmica, e confrontam os alunos, pela primeira vez, com problemas deste tipo, em que a solução não está "no final do livro" e nem o professor a conhece. Isto pode ser interessante, pois acreditamos estar, desta forma, desenvolvendo o espírito crítico no aluno, que estando diante de algumas soluções possíveis deve ser capaz de escolher uma solução viável , que atenda às exigências do problema, tendo ainda que conviver com a possibilidade da solução escolhida não ser a ótima.

Chamamos a atenção para o fato de que o ministério de educação francesa já adotou em seu currículo pré-universitário alguns dos conteúdos de teoria dos grafos, mais especificamente: "a resolução de problemas com a utilização de grafos". Esta adoção se deu no currículo da "terminale ES" (equivalente à 3ª série do ensino médio) voltado para alunos que se encaminham para estudos de Economia e Estudos Sociais (vide anexo 1).

4. DESCRIÇÃO DE UMA SESSÃO TÍPICA.

O projeto foi desenvolvido por três professores referidos como P_1, P_2 e P_3. O grupo se reunia com antecedência, para discutir o que seria trabalhado e de que forma. Depois disso um novo encontro acontecia para que pudéssemos planejar a atividade, sempre criada por P_1, por sua maior experiência nos assuntos abordados. A atividade era planejada de forma que permitisse a maior autonomia possível ao aluno. Com o material pronto e com cópias individuais ou no máximo para grupos de dois, nos dirigíamos à escola.

No início de cada aula , distribuíamos o material e pedíamos que os alunos lessem com atenção. P_2 sentava-se em alguma mesa da sala e anotava suas observações (comportamento do grupo, comentários interessantes, dúvidas , conclusões dos alunos, etc.) Se julgávamos que seria necessária alguma explicação adicional ela era dada pelo professor P_1. Os alunos começavam a atividade, e os professores P_1 e P_2 ficavam disponíveis ao chamado de um aluno ou de um grupo de alunos. Os alunos eram estimulados a trabalhar em grupo, ou se caso preferissem trabalhar individualmente era sugerido que comentassem suas dúvidas e conclusões com algum colega.

Quando os alunos terminavam suas atividades, P_1 discutia a atividade com eles, tirando dúvidas, analisando conclusões e lançando novas perguntas para que eles pensassem.

Ao final da aula o material era recolhido para que P_1 e P_2 pudessem observar o que havia sido feito, de que forma tinham se expressado, se havia alguma dificuldade no raciocínio e o que a poderia estar gerando.

Quando a atividade seguinte era elaborada, tentava-se sempre usar um "gancho" da aula anterior para que o aluno conseguisse estabelecer uma seqüência de raciocínio.

5. CARACTERIZAÇÃO DOS GRUPOS DE TRABALHO.

O trabalho foi feito com dois grupos de composição diferente ; um deles era formado por alunos de uma escola particular da zona sul do Rio de Janeiro, Escola Parque, e o outro por alunos do colégio Pedro II, unidade Humaitá, escola pública da rede federal de ensino.

Os alunos da Escola Parque eram de classe média alta ou classe alta. Todos moravam na zona sul em apartamentos ou casas, que em sua maioria, eram de propriedade dos pais ou familiares. Os pais eram, em sua maioria, empresários ou profissionais liberais. Todos tinham computador em casa e falavam ou pelo menos entendiam outro idioma. Todos faziam, pelo menos, um curso fora da escola. Os alunos já haviam viajado para fora do Rio e para o exterior.

Já no Colégio Pedro II, os alunos eram de classe média, sendo alguns de classe média alta. A maioria morava perto do colégio, nem sempre em apartamento próprio, mas bem montado, tendo sempre um ambiente adequado ao estudo. Os pais eram, em sua maioria, profissionais liberais ou funcionários públicos, com curso superior. Todos tinham computador em casa e faziam, ao menos um curso fora da escola. Uma parte considerável já havia saído do Rio ou até para o exterior.

Na Escola Parque, o trabalho foi desenvolvido através de uma oficina. Uma vez por semana a escola oferecia aos alunos, dentro da grade escolar, oficinas que os alunos podiam escolher, de acordo com seus gostos e habilidades. Cada aluno fazia três escolhas colocando-as em ordem de preferência. Quando eram preenchidas as vagas em determinada oficina o aluno era encaminhado para a segunda ou terceira opção. Assim, a escolha de alguns alunos foi feita por interesse legítimo em matemática, outros pelo horário adequado da oficina (não haveria atividade fora da escola do horário estabelecido); além disso alguns alunos não conseguiram ficar na oficina que foi sua primeira opção. Isso gerou desinteresse pelo assunto trabalhado por parte de alguns alunos inscritos, embora esse interesse tenha sido despertado com o tempo. A escola dava aos alunos uma certa flexibilidade nas oficinas. Assim, era permitido trocar de oficina no meio do ano, o que efetivamente aconteceu. O perfil da turma modificou-se com a perda de alguns alunos e a entrada de novos, vindos de outras oficinas das quais, por algum motivo, haviam se desinteressado. No segundo semestre do ano letivo, quando já não era possível mais troca, a maioria dos alunos mostrou interesse, alguns mais outros menos, mas em geral, todos participaram de boa parte dos trabalhos.

No colégio Pedro II, o trabalho foi desenvolvido através de uma disciplina eletiva. Para que o colégio se adequasse à nova LDB, foi oferecida aos alunos da 1ª e 2ª séries do ensino médio disciplina eletiva. Cada aluno deveria cursar uma na primeira série e outra na segunda. O desempenho do aluno seria avaliado e caso não obtivesse pontuação mínima seria reprovado e obrigado a cursar novamente no ano seguinte, com o risco de ter que cursar duas eletivas. Os alunos fizeram suas escolhas também com três opções. A maioria dos alunos que cursaram esta eletiva a escolheu como primeira opção e estavam interessados. Trabalharam com boa vontade, disponíveis para fazer tudo o que foi apresentado e mostrando, inclusive, muita habilidade em matemática.

Alguns, para os quais a eletiva de Matemática não havia sido a primeira opção, demonstraram pouco interesse, faltaram muito às aulas e infelizmente não tinham liberdade de troca. Eles podiam desistir, mas isso os obrigaria a cursar outra eletiva no ano seguinte, o que poderia os atrapalhar na conclusão do ensino médio.

Os grupos, tanto no Pedro II como na escola Parque, eram portanto pequenos (entre 12 e 18 alunos) e com interesse e aptidão para a matemática acima da média.

6. DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA.

O projeto foi desenvolvido em três fases, que serão descritas a seguir. Nas duas primeiras, as atividades de cada trabalho foram realizadas da mesma forma tanto na Escola Parque como no colégio Pedro II e os retornos obtidos foram de certa forma muito parecidos, o que justifica o mesmo relato para os dois locais. Uma diferença digna de nota é que o terceiro trabalho da primeira fase não foi desenvolvido no colégio Pedro II, pois a experiência que tivemos na Escola Parque, nos fez refletir e julgar improdutivas as atividades propostas. Na terceira fase, apesar de terem sido realizadas as mesmas atividades nos dois locais, a descrição que se segue é, em algumas atividades, feita separadamente.

6.1-Primeira fase:

A primeira fase do projeto, constando dos três primeiros trabalhos, aborda conceitos importantes de teoria dos grafos (nomenclatura, definições, primeiro teorema, representação gráfica, grafos eulerianos, etc...)

6.1.1-Trabalho 1:

O trabalho 1 se dividiu em três atividades: A primeira atividade apresentava 8 grafos e o objetivo era que o aluno verificasse em qual deles era possível desenhá-lo sem passar duas vezes pela mesma aresta. A segunda atividade consistia em o aluno conseguir montar circuitos com peças de dominós; a princípio sem restrição e depois retirando peças de forma aleatória ou não. O aluno deveria conseguir perceber quando era possível ou não, sem precisar montar o circuito, apenas relacionando o dominó com grafos. A terceira atividade era um questionário para verificar como o aluno assimilou o vocabulário. Neste trabalho, foi introduzida nova nomenclatura, definições importantes, e a noção de grafos eulerianos.

6.1.1.1- 1ª atividade:

Foi distribuída aos alunos a 1ª folha do trabalho 1 com a primeira atividade. Os alunos olharam os grafos e P_1 se concentrou no primeiro (vide anexo 2)

Foi pedido que tentassem desenhar a figura, ligando ponto a ponto (vértice a vértice), sem tirar o lápis do papel, passando exatamente uma vez por cada aresta. Os alunos tentaram e conseguiram com facilidade, começando sempre pelos vértices da base, embora nem todos percebendo que os vértices escolhidos eram especiais. Alguns até já conheciam este quebra-cabeça. P_1 foi ao quadro negro e pediu a alguns alunos que nomeassem os vértices e falassem alto qual foi o caminho escolhido. Alguns caminhos foram escritos no quadro e eles verificaram que existiam várias possibilidades. Poucos alunos perceberam que qualquer uma dessas possibilidades começava e terminava nos mesmos dois vértices , o que diferenciava os vários caminhos era a ordem dos vértices intermediários. P_1 pediu então que eles tentassem desenhar o mesmo grafo da mesma forma, só que agora começando por um certo vértice escolhido por ele, com grau par.

Os alunos tentaram e não conseguiram. Os poucos alunos que já haviam percebido que se deveria começar sempre por um vértice de grau ímpar, rapidamente disseram ser impossível sem saber explicar o motivo, os outros fizeram algumas tentativas e não conseguiram. Alguns mais desanimados, outros menos, disseram ser impossível e pararam de tentar. P_1 sempre insistia na pergunta: "O fato de vocês não estarem conseguindo significa que é impossível ?".

Os alunos pensaram individualmente ou em grupo, para determinar quando era possível e quando não era, ou seja; o que era necessário para ser possível. P_1 sugeriu que eles verificassem o que havia de diferente nos vértices em que haviam começado em relação de aos outros. Essa sugestão ajudou os alunos que ainda não tinham percebido que se deveria começar sempre por um vértice de grau ímpar. Eles analisaram os vários caminhos escritos no quadro e verificaram finalmente a questão do grau de cada vértice. Os alunos ainda não conseguiam explicar porque deveriam sempre começar por um vértice de grau ímpar e P_1 pediu que eles tentassem num segundo grafo em que todos os vértices eram de grau par. Como não havia vértice de grau ímpar cada aluno ou grupo de alunos começou de um vértice qualquer e com facilidade conseguiam desenhar a figura. Também perceberam rapidamente que o desenho terminava sempre no vértice onde haviam começado. Alguns alunos perguntaram se caso o grafo tivesse apenas vértices de grau par seria sempre possível desenhá-lo sem tirar o lápis do papel. P_1 respondeu que sim e pediu que eles pensassem o motivo pelo qual se todos os vértices tivessem o grau par haveria uma solução sempre possível e caso existissem dois vértices de grau ímpar deveríamos começar por um deles e terminar no outro. Alguns alunos arriscavam palpites para explicar a regra mas foi necessária a intervenção de P_1, relacionando arestas com “entradas” e “saídas” em um vértice, e mostrando o teorema de Euler.

Nos dois lugares em que trabalhamos P_1 deu o exemplo de acender e apagar a luz número par ou ímpar de vezes: “se uma lâmpada está acesa e acionamos o interruptor quarenta e sete (47) vezes, ela ficará acesa ou apagada ? é preciso, de fato, acender e apagar a lâmpada para saber a resposta ?”. Os alunos que entenderam esta relação mais rapidamente concluíram que para que fosse possível fazer o desenho sem tirar o lápis do papel, passando exatamente uma vez em cada aresta era necessário ter, no máximo, dois vértices de grau ímpar. P_1 perguntou se poderia haver mais do que dois e a maioria respondeu que não pois precisamos ter apenas dois vértices “ímpares”, um vértice ímpar para “sair” e outro para “entrar” . O termo correto seria “vértices de grau ímpar, mas num primeiro momento optamos por aceitar o termo ”vértice ímpar“. Os vértices que estão no meio do caminho precisam ter grau par pois é necessário “entrar” e ”sair” deles não se alterando a paridade. Um aluno perguntou se poderia haver apenas um vértice de grau ímpar. P_1 pediu que a turma toda pensasse nisso mas que teríamos esta resposta em outra atividade onde estudaríamos o primeiro teorema da teoria dos grafos. Até aí os alunos ainda não dominavam nenhuma nomenclatura da teoria dos grafos, mas isso não gerou nenhuma dificuldade: os vértices eram chamados por eles de pontos, as arestas de ligações e o grau de número de ligações de cada ponto. Aos poucos todos os alunos foram percebendo a regra e quando P_1 pediu que fizessem o mesmo com os outros sete grafos (vide anexo 3), tiveram facilidade em fazê-lo. Alguns alunos apenas escreveram do lado de cada grafo se era possível, impossível e quando possível de que vértice ou vértices deveriam começar. Na verdade o que foi mostrado foi a necessidade de não haver mais do que dois vértices de grau ímpar. A suficiência foi apenas exemplificada com alguns grafos de desenho mais complicado.

P_1 definiu circuito e caminho. Com a ajuda de P_1 os alunos concluíram que se em um grafo todos os vértices tiverem grau par teríamos um circuito e se tivermos exatamente dois vértices de grau ímpar teríamos um caminho.

Os alunos, com raras exceções, demonstraram interesse e curiosidade pela atividade, mostrando-se entusiasmados com a sua forma lúdica. Alguns alunos preferiram trabalhar sozinhos, em silêncio, sem compartilhar suas descobertas, mas a grande maioria discutia com colegas, tentando juntos sentados em grupo ou até de forma desorganizada. Para esta atividade não foi necessário nenhum conhecimento prévio e ao final haviam adquirido como novo conhecimento a condição necessária para a existência de um circuito ou caminho e ainda como construí-los.

O material foi bem aceito pelos alunos, sendo que na Escola Parque, onde a atividade foi aplicada primeiro, não foi colocado enunciado, apenas os desenhos e por isso foi necessário ser dito aos alunos o que deveriam fazer. Já no colégio Pedro II a mesma atividade já foi impressa com o enunciado e portanto nada foi necessário ser dito aos alunos. O texto estava claro e todos entenderam bem o que deveria ser feito.

Os alunos com quem trabalhamos, tanto na Escola Parque, como no Colégio Pedro II, não tinham travado conhecimento com esta estrutura; a idéia de grafo não é contemplada no ensino médio. A abordagem inicial através de um “quebra- cabeça” induz os alunos a se aperceberem de uma estrutura onde não interessa nem o comprimento das linhas, nem a forma, mas apenas que pontos estão ligados entre si.

Conceitos envolvidos:

Grafo: um grafo G consiste de um conjunto finito não vazio V(G) cujos elementos chamamos de vértices e de um conjunto E(G) de pares, ordenados ou não, de elementos distintos de V(G) que chamamos de arestas. Um grafo pode ser visualizado através de uma representação geométrica, onde seus vértices correspondem a pontos distintos do plano e suas arestas a linhas unindo os pontos correspondentes. Por abuso de linguagem às vezes usamos o termo grafo significando a sua representação geométrica.

Caminho: seja G um grafo, um caminho é uma seqüência de vértices v_1, v_2,....., v_n tal que $(v_i , v_{i+1}) \in E(G)$.

Circuito: um circuito é um caminho em que o vértice inicial é o mesmo que o vértice final.

Caminho euleriano: é um caminho que passa uma e só uma vez por cada aresta do grafo. Se o caminho é um circuito, este é chamado de circuito euleriano

Grafo euleriano: é um grafo que admite um circuito euleriano.

Teorema de Euler: "um grafo conexo é euleriano, se e somente se, todos os vértices têm grau par." Se um grafo tiver exatamente dois vértices de grau ímpar, ele admite um caminho euleriano cujas extremidades são estes vértices. A idéia de conexidade foi trabalhada posteriormente.

6.1.1.2 - 2ª atividade:

Foi pedido que os alunos se acomodassem em grupo. Formaram-se grupos de três, quatro ou cinco alunos. Foi distribuída a 2ª folha do trabalho 1 (vide anexo 4) e jogos de dominó. Os alunos deveriam construir circuitos (quando possível) ou caminhos usando todas as 28 peças , obedecendo à regra usual do jogo. Todos os grupos conseguiram construir o circuito com bastante facilidade. Não foi observado pelos professores nenhuma técnica ou estratégia especial para a construção do circuito; os alunos iam apenas juntando as peças, começando por qualquer uma e procurando outra que encaixasse na anterior. Isso era esperado; o número de soluções é bastante numeroso. Foi pedido então que tirassem todas as peças que tivessem o número 6 e tentassem a construção do circuito. Os alunos não conseguiram. Verificaram que não era possível nem construir um caminho, sempre sobravam peças que não podiam ser encaixadas em nenhum lugar. P_1 perguntou o que os dominós tinham a ver com grafos. Os alunos sabiam ou desconfiavam que havia uma relação, (para alguns alunos, apenas pelo fato de estarmos trabalhando com grafos, e se resolvemos trabalhar com dominós, é claro que algum motivo tinha que haver), mas não conseguiam relacionar. Precisou haver a interferência de P_1 para que os alunos percebessem que as peças seriam as arestas e os números os vértices. Foi pedido aos alunos que construíssem o grafo do circuito formado por todas as peças do dominó e depois sem as peças que tivessem o número 6. Depois disso, porém, foi fácil para os alunos que lembraram do que aprenderam na primeira atividade, perceberem que o circuito seria possível sempre que houvesse número par de ocorrências dos números (vértices), pois sempre que isso acontecesse todos os vértices teriam grau par . Quando P_1 e P_2 perceberam que todos os alunos relacionaram o conhecimento gerado na primeira atividade com a possibilidade ou não de construir circuitos ou caminhos com peças de dominó, foi pedido que eles sorteassem dezoito peças e verificassem se seria ou não possível construir um circuito ou um caminho com estas peças. Alguns alunos construíram o grafo com as peças retiradas e analisando o grau de cada vértice verificavam se era ou não possível fazer o circuito ou o caminho, já outros alunos nem construíram o grafo, apenas contaram quantas peças de cada número eles tinham para construir o circuito. Se todos os números aparecessem um número par de vezes seria possível obter um circuito; se apenas dois números apresentassem um número ímpar de ocorrências, seria possível obter um caminho. Em qualquer outro caso, sobrariam peças. Alguns alunos perguntaram novamente (já haviam perguntado isso na primeira atividade) o que aconteceria se apenas um número aparecesse um número ímpar de vezes. P_1 voltou a dizer que veríamos isso numa atividade que viria a seguir mas que os alunos tentassem com os dominós para ver o que acontecia. Os alunos tentaram, não conseguiram encontrar um exemplo e resolveram esperar a tal atividade prometida.

Quando todos os grupos terminaram a atividade com o dominó, P_1 pediu que eles pensassem no exemplo de aplicação do recolhimento do lixo (vide anexo 5). Os alunos deveriam encontrar o melhor caminho para recolher o lixo em um pedaço de uma cidade representada por um desenho. P_1 falou sobre eulerização (repetição de um trajeto) de grafos e comentou com os alunos que a solução ideal pode não existir mas que uma boa solução às vezes é suficiente. Na folha distribuída aos alunos havia três desenhos representando pedaços de cidades, mas nem foi pedido que eles fizessem os dois últimos pois durante a execução no primeiro desenho avaliamos não ter mobilizado os alunos da forma que esperávamos em virtude da proximidade da hora da saída.

P_1 falou um pouco de problemas que iremos eventualmente encontrar onde não é conhecida a solução ideal e que teremos que achar uma solução que nos satisfaça. Ele falou aos alunos que em problemas reais do dia a dia normalmente não teremos a solução ideal e o que é feito é procurar uma solução viável, com o custo aceitável e que satisfaça a quem contratou os serviços para a resolução do problema. Existe, normalmente, um grande interesse por parte dos alunos, quando falamos de problemas do dia a dia de uma empresa, de uma cidade, de um bairro etc. Eles gostam de ver a Matemática sendo de fato útil na vida em geral.

O material distribuído foi muito bem aceito pelos alunos e como dominó não é um jogo que se jogue sozinho, o método colaborativo foi utilizado naturalmente.

A dificuldade maior observada nos alunos foi a percepção de que as peças não eram os vértices, e sim as arestas, e os números correspondiam aos vértices. Eles se surpreenderam ao perceber que as estruturas eram isomorfas.

Conceito envolvido:

Isomorfismo: dizemos que duas estruturas são isomorfas quando conseguimos estabelecer uma relação biunívoca entre os elementos dessas estruturas de forma que a cada operação em uma estrutura corresponda uma operação na outra.

Este conceito não é exclusivo da teoria dos grafos, por exemplo:

Seja $\square$ e a operação soma $(+)$ e $M = \left\{2^{t}, t \in \square\right\}$ com a operação multiplicação $(\times)$.

A correspondência $f(x) = 2^{x}$ é do tipo biunívoca e:

$$z = x + y \Leftrightarrow f(z) = f(x).f(y) = f(x + y)\text{, portanto } \square \text{ e } M \text{ são isomorfos.}$$

Embora não tenha sido enunciado, o conceito de isomorfismo domina esta atividade. A idéia de isomorfismo entre grafos é uma idéia sofisticada. No caso o isomorfismo está entre as duas estruturas: o grafo e o jogo de dominó.

6.1.1.3 - 3ª atividade:

Os alunos deveriam escrever com suas palavras e da forma mais clara possível o que entendiam sobre alguns conceitos vistos em nosso curso, tais como: grafo, vértice, aresta, circuito e caminho (vide anexo 6). O objetivo era verificar de que forma os alunos estavam se apropriando do novo vocabulário. Esta atividade foi feita individualmente e depois recolhida pelos professores. Pela primeira vez neste curso nos deparamos de forma sistemática com a dificuldade que os alunos têm de se expressar. Independentemente de terem entendido o que havia sido visto até então, não conseguiam encontrar palavras exatas. Em vários momentos tentavam resolver este problema usando um vocabulário já conhecido por eles, utilizando a geometria ou até a álgebra. A geometria, é claro, foi muito mais utilizada porque até então só havíamos apresentado a eles a representação gráfica dos grafos, e eles faziam associações sempre com segmentos, retas, ângulos e polígonos.

Em aulas posteriores procuramos enfatizar que o que caracteriza um grafo é:
(i) Quem são os vértices ? (ii) Quem está ligado com quem ?

Nesta atividade não foi trabalhado com os alunos nenhum conceito específico, mas a importância de termos uma nomenclatura padronizada e de se definir realmente um conceito. Os alunos mostraram muita dificuldade nesta atividade, mas consideramos não ser uma falha deles. De uma maneira geral, alunos do ensino médio têm essa dificuldade pois é necessária uma maturidade que ainda está em desenvolvimento.

6.1.2 - Trabalho 2:

O trabalho 2 consistia em duas atividades. Na primeira o aluno devia completar tabelas, de acordo com o grafo que estava acima. Na segunda ele devia verificar o que ele observou e se conseguia relacionar informações da tabela. O que se esperava é que ele chegasse ao primeiro teorema dos grafos: “O número de arestas de um grafo qualquer é a metade da soma dos graus de todos os seus vértices”.

6.1.2.1- 1ª atividade:

Foram distribuídas as duas folhas da atividade. A primeira folha apresentava grafos com tabelas abaixo de cada um deles para que elas fossem completadas (vide anexo 7). O que se pedia na tabela era o grau de cada vértice, a soma dos graus de todos os vértices, o número de arestas e o número de vértices de grau ímpar. Os alunos não tiveram nenhuma dificuldade para preencher estas tabelas, bastava observar atentamente os grafos pois a atividade era apenas de contagem. A atividade foi feita em grupo e todos colaboraram no preenchimento das tabelas. Alguns alunos perceberam relações entre os números obtidos em cada tabela, outros não, mas todos eram orientados a pensar na 2ª atividade.

Conceito envolvido:

Grau de um vértice: é o número de arestas incidentes no vértice.

6.1.2.2 - 2ª atividade:

Quando todos os alunos terminaram de preencher as tabelas, P_1 pediu que eles fossem para a segunda folha (vide anexo 8) e respondessem ao que era pedido. Os alunos que já haviam percebido relações entre os números obtidos na contagem dos graus e ligações foram mais rápidos nesta atividade, mas sempre tendo uma certa dificuldade em se expressar. O objetivo desta atividade era que se chegasse ao primeiro teorema dos grafos. P_1 precisou interferir para que eles conseguissem fazer a enunciação e demonstração do teorema de forma clara. Observamos que mesmo o aluno que já tivesse entendido do que se tratava o teorema e até conseguisse enunciá-lo apresentava muita dificuldade na argumentação da demonstração.

Lembremos que são alunos do Ensino Médio, com interesse em Matemática e que já travaram contato com a idéia de demonstração desde a 7ª série do Ensino Fundamental.

A tentativa dos alunos de expressar por escrito o que havia sido observado e nossa percepção de que mesmo com observação correta, nem sempre a descrição era precisa reforça a importância do uso de uma nomenclatura padrão e do trabalho que deve ser feito para desenvolver sua maturidade nestas questões.

Conceito envolvido:

Primeiro teorema dos Grafos: a soma dos graus de todos os vértices de um grafo é igual ao dobro de seu número de arestas.
Observação: o teorema foi trabalhado com os alunos através da observação deles na relação entre os números obtidos em cada tabela. O teorema se mostrou interessante e de fácil compreensão. A generalização foi rapidamente entendida.

6.1.3 - Trabalho 3:

O trabalho 3 tem três atividades: Na primeira atividade os alunos deveriam percorrer os grafos, tentando passar em todos os vértices exatamente uma vez, voltando ao vértice inicial . Eles deveriam tentar verificar quando era possível e quando não era. A segunda e terceira atividades eram aplicações. O objetivo deste trabalho era a introdução do conceito de grafos hamiltonianos (uma definição formal será dada adiante).

A descrição abaixo se refere apenas ao que foi desenvolvido nas oficinas da Escola Parque. Percebemos os alunos desmotivados com as atividades e após uma reavaliação decidimos não aplicá-la no colégio Pedro II. Entendemos se tratar de atividades que fugiam ao objetivo geral do projeto. Como já foi dito o que nos interessava era trabalhar com conteúdos de fácil compreensão, grande aplicação no dia a dia e motivantes. Problemas envolvendo grafos hamiltonianos normalmente não possuem solução geral e não conseguimos criar nenhuma atividade, de fato interessante, e que pedagogicamente acrescentasse positivamente em nosso projeto.

Na verdade, os conceitos de Grafos Eulerianos e Hamiltonianos têm semelhanças e diferenças. Entretanto a introdução dos grafos eulerianos é bastante direta enquanto a de grafos hamiltonianos é complexa.

A escolha do problema dos ciclos eulerianos foi bastante feliz como introdução, pois é um problema desafiante e que tem uma solução acessível.

No decorrer do projeto abordamos também problemas sem solução computacional eficiente conhecida, mas isso é feito a partir de uma atividade elaborada (que será descrita adiante); a introdução através do conceito de grafos hamiltonianos não se mostrou eficaz, motivo pelo qual deixamos de usá-la em oficinas subseqüentes.

6.1.3.1 - 1ª atividade:

Foi distribuído uma folha com sete grafos (vide anexo 9) e foi pedido aos alunos que percorressem cada grafo tentando passar exatamente uma vez por todos os vértices e voltassem ao vértice inicial . Eles perceberam com facilidade que no terceiro e quarto grafo era possível passar exatamente uma vez por todos os vértices e voltar ao inicial. O segundo grafo chamou a atenção deles e eles perceberam que era possível apenas passar exatamente uma vez por cada vértice mas o vértice final não coincidiria com o inicial. Neste momento P_1 definiu grafos bipartidos. Quando o grafo era bipartido ficava mais fácil para o aluno perceber quando se tratava de um grafo hamiltoniano ou não. P_1 sugeriu que os alunos tentassem desenhar o primeiro grafo de outra forma e descobrissem que ele era bipartido, mas eles só conseguiram com a interferência do professor. Os alunos perceberam que, dependendo do grafo, pode ser muito difícil verificar se ele é ou não hamiltoniano.

6.1.3.2 - 2ª atividade:

Foi distribuída uma folha onde havia o enunciado da atividade (vide anexo 10). Tratava-se de um cubo de madeira feito de 27 cubinhos. Neste cubo havia uma traça que passava de um cubinho para outro andando para os lados ou para cima ou para baixo, nunca na diagonal, ou seja, a traça sempre passava de um cubinho para outro através de seus lados, nunca passando por suas quinas. No desenho do cubo, alguns cubinhos eram pretos e outros brancos para facilitar a percepção pelo aluno de que se tratava de um grafo bipartido, mas não houve sucesso; apenas com a interferência de P_1 os alunos perceberam que o percurso da traça podia ser representado por um grafo bipartido, onde cada cubinho era um vértice e cada passagem uma aresta.

Quando perceberam se tratar de um grafo bipartido os alunos contaram quantos cubinhos pretos e quantos brancos havia. Como havia mais cubinhos brancos (14) do que pretos (13), eles perceberam que só seria possível a traça passar por todos os cubinhos (vértices) se ela começasse em um cubinho branco. Como não era o caso, não seria possível.

P_1 perguntou aos alunos se eles acharam que este problema é importante. Os alunos responderam quase que em consenso que problemas deste tipo são importantes e até deram exemplos de situações da vida prática como problemas de rotas de avião e distribuições em geral.

6.1.3.3 - 3ª atividade:

Nesta atividade tínhamos um grafo com cinco vértices (representando cidades) e arestas ligando-as, ponderadas com a distância entre elas (vide anexo11). O aluno deveria escolher uma maneira de visitar as cinco cidades, percorrendo as menores distâncias possíveis. Os alunos em grupos fizeram suas escolhas, procurando os menores caminhos e evitando fechá-los e P_1 as escreveu no quadro negro. Verificou-se que tinha uma aresta ponderada com o número 750 que estava na escolha de todos. P_1 pediu que ponderassem esta aresta com número 3000. Os alunos perceberam que dificilmente encontrariam uma solução boa.

P_1 falou de problemas que podem não ter uma solução ótima, acessível; nesse caso pode ser interessante se contentar com uma solução razoável; quem se encarrega de resolver o problema deve saber avaliar a qualidade da solução.

Não é conhecida uma caracterização em termos de condições necessárias e suficientes para a existência de tais grafos e não existe tampouco algoritmo eficiente para resolver este tipo de problema. Avaliamos que por conta disso, a atividade não motivou suficientemente os alunos e repensamos a respeito. Achamos que a atividade não funcionou da maneira que esperávamos e caso desejarmos trabalhar esse assunto com alunos do ensino médio, precisaremos pensar em outra atividade com outra abordagem.

Conceitos envolvidos: (foram trabalhados os mesmos conceitos nas três atividades)

Caminho hamiltoniano: é um caminho que passa uma e somente uma vez por cada vértice do grafo. Se o caminho é um circuito, este é chamado de circuito hamiltoniano

Grafo hamiltoniano: é um grafo que admite um circuito hamiltoniano.

Grafo bi-partido: sejam V_1 e V_2 partições do conjunto V de vértices de um grafo. Se todas as ligações deste grafo forem da forma (p,q), tais que p pertence a V_1 e q a V_2, dizemos então que este grafo é bipartido.

6.2 - Segunda fase:

A segunda fase consta de dois trabalhos, abordando o uso da representação gráfica dos grafos, linguagem matemática, e demonstrações. A preocupação é de que os alunos se apropriem corretamente da linguagem matemática, conseguindo argumentar quando necessitarem generalizar algum conceito. Os alunos deveriam perceber que quando ele não consegue chegar a um determinado resultado, não quer dizer que seja impossível. O impossível precisa ser demonstrado.

6.2.1 - Trabalho 4:

O trabalho 4 consta de quatro atividades: Nas duas primeiras atividades são descritas situações e pede-se representá-las por um grafo, compreendendo o que representa cada vértice, cada aresta, o grau de cada vértice etc. A terceira atividade é a leitura de um pequeno texto sobre teoremas e demonstrações e a quarta atividade é a leitura de um texto sobre a linguagem matemática.

6.2.1.1 - 1ª atividade:

Esta atividade descreveu a situação de um campeonato de futebol com sete equipes (vide anexo 12), onde cada uma delas devia jogar uma vez com cada uma das outras. Foi pedido que se representasse esta situação por um grafo, onde cada equipe era um vértice e cada jogo uma aresta. Os alunos fizeram a atividade individualmente ou em grupo, sem necessidade de ajuda dos professores. Eles perceberam, com facilidade, que o grau de cada vértice representava o número de jogos de cada equipe e para determinarem o número total de jogos bastava calcular o número total de arestas somando os graus e dividindo por dois. Quando todos os alunos terminaram a atividade P_1 refez o problema no quadro negro, tirando eventuais dúvidas dos alunos. Os alunos acharam que o material estava bem feito e a atividade clara. Não foi percebido nenhuma dificuldade de relacionar a atividade com conceitos trabalhados até então.

6.2.1.2 - 2ª atividade:

Esta atividade descreveu a situação de cinco amigos num pátio jogando totó, sempre de dois em dois (vide anexo 13). Cada um deles jogou um número diferente de jogos. Dos cinco, o que mais jogou, participou de 9 jogos. Perguntou-se aos alunos quantos jogos, no mínimo, cada um deles deveria jogar a mais para que todos jogassem o mesmo número de jogos. Alguns alunos responderam imediatamente que bastava somar a quantidade de jogos que cada um necessitaria para chegar a nove que foi o número máximo encontrado entre eles; entretanto, ao ser solicitado que executassem a tarefa, os alunos perceberam que era impossível.

Apesar de alguns alunos já terem percebido, P_1 alertou-os que se fosse dessa forma, se somássemos os jogos jogados por todos os jogadores (soma dos graus), a soma seria $9 \times 5 = 45$ que é um número ímpar. Rapidamente perceberam então que o número mínimo de jogos de cada um deveria ser 10.

Nos chamou a atenção o fato de nenhum aluno demonstrar surpresa ou qualquer outra reação ao se deparar, pela primeira vez, com grafos em que havia mais de uma aresta ligando dois vértices.

Avaliamos que os alunos que responderam rapidamente que seria nove o número mínimo de jogos de cada um, não pensaram o suficiente antes de responder, pois não detectamos nenhuma dificuldade de entendimento após a intervenção de P_1.

6.2.1.3 - 3ª atividade:

A atividade começou com a leitura de um pequeno texto feito por P_1 (vide anexo 14). Nele, P_1 enunciou o primeiro teorema da teoria dos grafos, já deduzido pelos alunos na 2ª atividade do trabalho 2 : "o número de arestas é a metade da soma de todos os graus". P_1 transcreveu demonstrações oferecidas por alunos, com comentários , analisando o que estava escrito, principalmente no que se refere à dificuldade dos alunos de se expressarem corretamente. P_1 comentou que às vezes o que se vê são pessoas que entenderam algo mas não conseguem transmitir de forma que outra pessoa entenda. Foi pedido então, que os alunos tentassem demonstrar o teorema: "Num grafo qualquer há sempre um número par de vértices de grau ímpar", usando o anterior. Isso respondia à pergunta feita pelos alunos: ..."e se houvesse só um vértice de grau ímpar?" Por este teorema isso não pode acontecer. Os alunos ainda tiveram um pouco de dificuldade para se expressar, mas P_1 precisou interferir menos. Nesse tipo de atividade observamos sempre certa resistência dos alunos pois "escrever matemática" é complicado para eles. O método colaborativo do trabalho em grupo ajudou bastante.

6.2.1.4 - 4ª atividade:

Esta atividade também começou com a leitura de um texto sobre linguagem matemática. (vide anexo 15). Depois da leitura do texto, foi pedido aos alunos que eles enunciassem, sem demonstrar, o teorema de Pitágoras, já conhecido por todos. O que observamos e nos chamou atenção foi que alguns alunos enunciaram o teorema da seguinte forma: "o quadrado de a é igual a soma dos quadrados de b e c" já que na atividade estava escrito em linguagem matemática "$a^2 = b^2 + c^2$". P_1 interferiu dizendo que só podemos considerar o que foi enunciado acima como teorema de Pitágoras se a for a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo e b e c a medida dos catetos do mesmo triângulo.

Nas quatro atividades do trabalho 4 não foi trabalhado nenhum conceito novo. A preocupação era observar e trabalhar com os alunos a melhor forma de se expressar. Como já foi dito acima, em geral, alunos do Ensino Médio, têm muita dificuldade de se expressar, independente de saberem ou não o conceito envolvido. As quatro atividades envolviam conceitos já trabalhados.

6.2.2 - Trabalho 5:

O trabalho 5 começa com um texto sobre formas de representação de um grafo (vide anexo 16). Após esta leitura foram propostas quatro atividades: Na primeira, segunda e terceira atividades temos grafos representados por sentenças matemáticas e é pedido que os alunos os representem através de desenhos. Na terceira atividade eles devem responder perguntas apenas para conferir o que observaram nas atividades anteriores.

6.2.2.1 - 1ª atividade:

Na primeira atividade foi dado um conjunto *V* de nomes de frutas e uma lei de formação de relação entre elas (vide anexo 17). Duas frutas deveriam se relacionar se seus nomes tivessem o mesmo número de vogais.

A sentença matemática que determina a lei de formação da relação, $A = \{(x, y) \in V \times V \mid x \text{ tem o mesmo número de vogais que } y\}$, foi lida e discutida passo a passo com os alunos, pois foi observado a dificuldade que alguns alunos têm de "traduzir" a linguagem matemática. Foi pedido, então que eles representassem o grafo com um desenho onde as frutas eram os vértices e as arestas as ligações das frutas que se relacionavam. Não foi percebido nenhum tipo de dificuldade pelos alunos na representação gráfica do grafo.

6.2.2.2 - 2ª atividade:

A segunda atividade era semelhante à primeira, com a diferença que os vértices eram números naturais e dois números se relacionariam se tivessem um divisor comum maior do que 1 (vide anexo 18). Todos os alunos sabiam definir números primos entre si, portanto, mais uma vez, a dificuldade só apareceu no momento da "tradução". Algo interessante que observamos foi que alguns alunos foram práticos na construção do grafo, usando seus conhecimentos sobre múltiplos, isto é; construíram grafos completos dos múltiplos de 2, de 3, de 5 e de 7. Perceberam que não havia a necessidade de construir grafos completos entre os múltiplos de 4, 6 ou outro qualquer que não fosse primo pois o conjunto dos múltiplos de 4 está contido nos múltiplos de 2, os de 6 nos múltiplos de 2 e 3 e assim por diante. Os grafos construídos desta forma tinham a visualização gráfica mais clara, pois pela quantidade total de arestas o grafo poderia ficar bem complicado.

6.2.1.3 - 3ª atividade:

Nesta atividade os vértices também eram números e dois deles se relacionariam se a divisão entre eles resultasse num número primo (vide anexo 19). Foi afirmado aos alunos que neste caso teríamos uma novidade e perguntava-se qual seria ? Nesta atividade a dificuldade na "tradução" da linguagem matemática já foi menor, exigindo menos intervenção dos professores. Depois de representarem o desenho, não tiveram dificuldade em perceber que a novidade seria a orientação do grafo, pois a divisão não é comutativa e só tem sentido falarmos em números primos no conjunto dos números naturais.

6.2.1.4 - 4ª atividade:

Foi perguntado aos alunos em qual dos grafos das atividades anteriores (1ª, 2ª e 3ª) todos os vértices estavam conectados e em qual dos grafos deveríamos considerar uma orientação e como representar isso no grafo (vide anexo 20). Durante esta atividade foi introduzido o conceito de grafos conexos e grafos orientados. Tanto uma pergunta como a outra foi respondida com facilidade pois os alunos já haviam percebido a resposta nas atividades anteriores.

Conceitos envolvidos:

Grafo conexo: é o grafo em que dado dois vértices quaisquer, eles pertencem a um mesmo caminho.

Grafo orientado: é um grafo no qual , em cada ligação, consideramos uma orientação. Os pares que identificam os arcos (nome dado às ligações neste caso) são pares ordenados.

6.3 - Terceira fase:

A terceira fase consiste de um único trabalho, abordando o tema dominação em grafos. Este tema foi escolhido como ferramenta para se entender a idéia de algoritmo e sua importância na matemática do século XXI. Este tema tem grande aplicação em atividades de localização e distribuição e foi apresentado aos alunos de forma lúdica, tentando simular uma situação real. Uma das características deste problema é o fato de não podermos em geral assegurar a obtenção de uma solução ótima, e neste caso precisarmos ter bom senso para obter uma solução razoável, e que atenda as nossas necessidades. Para problemas deste tipo a computação é muito utilizada e é necessário entender de que forma devemos descrever um grafo para um computador, já que na forma gráfica o computador não "entende".

6.3.1 - Trabalho 6:

O trabalho 6 é composto de 4 atividades. A primeira atividade consiste em, após a observação de um grafo que representa uma cidade onde os vértices são esquinas e as arestas ruas, sejam escolhidas localidades para serem instalados postos de coleta de pilhas. Na segunda atividade é pedido que cada aluno, individualmente ou em grupo, tente escrever com suas palavras uma boa estratégia para a escolha dos vértices dominantes. Na terceira atividade os alunos devem tentar aplicar sua estratégia em outros grafos, alguns mais simples, outros mais complicados, que o grafo original da primeira atividade e a quarta atividade é um jogo de espionagem em dupla: cada aluno constrói um grafo na forma gráfica e deve transmitir ao colega, com a maior precisão possível, seu grafo, sem se utilizar da representação gráfica.

Observação: A idéia deste trabalho foi retirada de um projeto (Mega-Mathematics – www.c3.lanl.gov/mega-math em 01/10/04) de um grupo de três professores, Nancy Casey, Mike Fellows e Mike Hawylycz, cujo objetivo era apresentar experiências de trabalhos de alunos do ensino elementar e seus professores com conteúdos de Matemática desenvolvidos no século XX (Matemática Discreta). Uma das atividades propunha que, num mapa que representava uma cidade (vide anexo 21), eles encolhessem locais para colocar quiosques de vendas de sorvetes, de modo que nenhum habitante desta cidade precisasse percorrer mais do que duas esquinas para encontrar um deles.

6.3.1.1 - 1ª atividade:

Foi construído por P_1, P_2 e P_3 uma grafo bem grande, de forma que o aluno ao olhar para ele não conseguisse visualizá-lo totalmente. O grafo representava uma pequena cidade, onde os vértices eram esquinas e as arestas ruas. Os alunos deveriam localizar postos de recolhimento de pilhas para que pudessem ser recicladas. Os postos deveriam ser localizados de forma que uma pessoa que estivesse em qualquer rua ou esquina tivesse que andar no máximo duas esquinas (se a pessoa já estivesse numa esquina esta já seria contada) para chegar ao posto. Foi dito aos alunos que a distância ao posto poderia desestimular os cidadãos em sua contribuição à ecologia. Os alunos eram considerados profissionais contratados pela prefeitura para localizar os postos da forma mais econômica possível. A atividade foi muita bem aceita pelos alunos, sentimos todos muito motivados. Acreditamos que o caráter não tradicional da atividade, onde o trabalho coletivo era praticamente obrigatório, já que eles eram considerados um grupo de profissionais contratados para um trabalho, ajudou nesta motivação.

A estratégia para solução deste tipo de problema remete o aluno a situações que exigem planejamento. Ele terá a oportunidade de se deparar com um importante problema matemático sem solução e se decidir por uma solução satisfatória.

- Na Escola Parque:

Por termos em sala mais de quinze alunos, foram formadas duas equipes de trabalho. Dois grafos grandes foram colados com fita adesiva no chão da sala e cada equipe se dirigiu a um deles. Foi distribuída uma folha para cada aluno contendo as propostas referentes à atividade (vide anexo 22). A idéia era de que cada equipe de trabalho pensasse numa forma de localizar os postos de coleta. Numa primeira etapa foi dito que a prefeitura conseguiu patrocínio e seria possível colocar doze postos. A tarefa foi feita com facilidade por ambos os grupos, sendo que um dos grupos, com apenas dez postos, já atendeu à exigência proposta pela atividade. Nesse momento P_1 interveio perguntando a eles se era fácil ou difícil descobrir se a distribuição dos postos escolhidos por cada equipe tinha falhas ou não. Os alunos responderam que bastaria que alguém verificasse esquina por esquina se lá havia um posto ou se era atendida por outro posto na esquina vizinha. Foi escolhido um "fiscal" de cada grupo que verificaria se a escolha das localidades dos postos do outro grupo estava bem feita ou não. Depois desta verificação e da constatação de que não havia erros, as equipes foram comunicadas que um dos patrocinadores havia saído do projeto e com isso a verba havia diminuído, só seria possível utilizar nove postos. Os dois grupos conseguiram colocar os postos, porém um deles desmontou toda a estrutura e começou a pensar sem ter nenhum posto e o outro re-arrumou a partir da estrutura anterior . Verificamos que o grupo que desmontou toda a estrutura foi mais rápido. O processo se repetiu, cada "fiscal" verificou a distribuição do outro grupo e novamente os alunos foram comunicados que outro patrocinador saíra do projeto e que com a verba disponível só seria possível localizar sete postos. Os dois grupos necessitaram de mais tempo para localizarem os postos mas ambos conseguiram atender a exigência da atividade. O prefeito, percebendo que estava aos poucos sendo abandonado pelos patrocinadores, resolveu se prevenir e tentar descobrir qual a quantidade mínima de postos necessários que cobriria a cidade atendendo à exigência, pois desta forma poderia fazer uma estimativa dos recursos mínimos de que necessitaria. A pergunta então foi feita aos grupos: "Qual seria o menor número de postos de coleta que atenderia a nossos objetivos ?"

Observação: A idéia de começar com número alto de postos e gradualmente ir restringindo este número nos foi dada pela professora Clicia Valladares Peixoto Fridmann.

Neste momento foi introduzido o conceito de "dominação" em grafos com seu vocabulário. Os vértices escolhidos que atendiam aos objetivos foram chamados a partir deste momento de "vértices dominantes" ou "conjunto dominante".

Cada grupo começou a pensar e de alguma forma percebíamos que eles tentavam cada vez menos marcar os pontos possíveis para localização de forma aleatória; havia uma tentativa de descobrir uma "estratégia". Um dos grupos conseguiu colocar seis postos atendendo aos objetivos mas não conseguia garantir que este seria o valor mínimo, apenas afirmavam intuitivamente que era impossível fazê-lo com cinco postos. O outro grupo, mesmo já sabendo que seus colegas haviam encontrado uma solução com seis postos, não conseguiu encontrar esta solução. Alguns alunos deste grupo chegaram a desenhar, em tamanho menor, o grafo da atividade, para tentar durante a semana encontrar a solução. Na semana seguinte alguns voltaram com a solução e outros ainda não haviam conseguido.

Como o grafo foi construído a partir da solução única, na semana seguinte mostramos aos alunos como o problema tinha sido construído. Os alunos que já haviam encontrado a solução apenas a confirmaram com a nossa solução e outros (a minoria) que não chegaram à solução só a viram quando mostramos. P_1 interveio dizendo que é muito difícil provar que uma determinada solução de um problema qualquer do mesmo tipo é a menor possível. No caso do grafo usado na atividade conseguimos provar que seis era o número mínimo, partindo da solução, ou seja, quando começamos a construir o grafo já havíamos decidido que seria seis a solução ótima, partimos disso e construímos o grafo em cima desta decisão (vide anexo 23).

P_1 mostrou, no quadro negro, porque a solução mínima deste caso particular era seis postos e completou dizendo que em problemas da vida prática não existe solução prévia e talvez nunca chegássemos a saber qual seria a solução ótima, teríamos que trabalhar com o “bom senso” e com espírito crítico para escolhermos uma solução que pode não ser a ideal, mas ser uma boa solução viável e que atenda aos objetivos considerados. Esta atividade mobilizou a turma toda. Todos gostaram de participar e mesmo sem ser de forma evidente, percebemos uma competição entre os dois grupos de trabalho para ver quem chegava mais rapidamente à solução. O fato de sentarem no chão deu à atividade um clima lúdico que foi respondido de forma imediata pelos alunos.

- No colégio Pedro II:

Pelo fato do grupo do Pedro II ser bem menor, trabalhamos com um único grafo, (diferentemente do da Escola Parque, foi decidido que a solução ótima seria construída com sete postos), que foi colado com fita adesiva em cima de nove carteiras juntas e com apenas uma equipe de trabalho. A folha com a proposta da atividade (vide anexo 22) foi distribuída aos alunos que após lerem, começaram coletivamente a escolher vértices onde seriam localizados os postos. Eles acabaram, inadvertidamente “queimando” a primeira etapa da atividade pois conseguiram imediatamente localizar dez (ao invés de doze) postos que atendiam aos objetivos. Percebemos em alguns alunos, a tentativa de “inventar” uma estratégia. Conseguiram diminuir este número para nove e depois oito. Parecia que estavam se dando por satisfeitos quando P_1 perguntou se achavam que aquele seria o menor número. Todos responderam que sim, alguns chegaram a dizer que menos que oito seria impossível. P_1 perguntou se eles lembravam de algo comentado com eles em aula anterior: “afirmar que algo é possível é mais fácil, basta mostrar um exemplo. Afirmar que algo é impossível é mais complicado, precisamos provar a impossibilidade”. Perguntamos aos alunos se desejavam que disséssemos qual era o número mínimo. Ante a resposta afirmativa dissemos então que o menor número era sete e pedimos que tentassem encontrar a solução. Após esta informação, curiosamente, os alunos encontraram a solução com muita rapidez. P_1 disse que já sabia que a solução ideal seria com sete postos, pois foi ele quem construiu o grafo e o construiu a partir da solução que desejava. Completou falando que em problemas da vida prática normalmente não é possível termos certeza da solução ótima e o que temos é uma solução possível que deve ser analisada, verificando se atende aos objetivos desejados, se é econômica, viável etc.

Pelo fato de só termos trabalhado com um grupo não houve o clima de competição, mas todos ficaram mobilizados para a atividade participando de forma colaborativa com o grupo.

Conceitos envolvidos:

Conjunto dominante de vértices em um grafo: um conjunto de vértices é dito conjunto dominante de um grafo se qualquer vértice deste grafo ou pertence a este conjunto ou é adjacente a um vértice deste conjunto.

Embora não fosse enunciado desta forma trabalhamos também com a noção de "verificação" ao pedirmos que um grupo fiscalizasse o outro.

O problema de dominação em grafos é do tipo NP-completo (conceito que não trataremos aqui): uma solução pode ser verificada correta ou incorreta em tempo razoável, mas tentar enumerar todas as soluções possíveis (esse método é chamado de "força bruta") pode ser inviável, pois mesmo um bom computador levaria muito tempo, na verdade, tempo demais.

6.3.1.2 - 2ª atividade:

- Na Escola Parque:

Foi distribuída uma folha (vide anexo 24) , onde se explicava o que é um algoritmo, dando exemplos de seu uso no dia a dia como operar com números, programar videocassetes, realizar operações bancárias em caixas eletrônicas, etc. Foi pedido então que tentassem pensar se estavam ou não utilizando alguma estratégia para encontrar o conjunto dominante na atividade anterior. Em caso afirmativo deveriam, individualmente ou em grupo, da forma mais clara possível, descrevê-la passo a passo em uma folha de papel, que foi recolhida no final da aula. Verificamos que a estratégia mais comum foi começar a escolha por vértices de maior grau. Aos poucos esta estratégia foi sofisticada eliminando os vértices dominados por cada vértice escolhido para a localização de um posto, avançando em ordem decrescente aos outros vértices, mas tendo a preocupação de escolher vértices que estivessem uniformemente distribuídos em todo o grafo, evitando obter conjunto de vértices muito próximos.

- No colégio Pedro II:

Com este grupo menor, não foi distribuída a folha. Com os alunos sentados nas carteiras, arrumadas na forma de um retângulo como uma grande mesa de reunião, P_1 definiu algoritmo, dando exemplos de seu uso no dia a dia. Os alunos participavam da discussão trazendo exemplos que lhes ocorriam. Foi, então pedido a eles que tentassem colocar no papel, da forma mais clara possível, passo a passo, qual a estratégia que usaram na aula anterior no grafo que representava a cidade. Esta atividade podia ser feita individualmente ou em grupo e depois foi recolhido o papel que descrevia a estratégia. Observou-se que as estratégias utilizadas eram de uma maneira geral as mesmas já citadas acima no trabalho na Escola Parque.

Conceitos envolvidos:

Algoritmo: número finito de instruções executadas por um agente computacional, humano ou não, que tenha execução terminada para quaisquer valores de dados e produza algum resultado.

Vizinhança: a vizinhança de um vértice v é o conjunto de vértices adjacentes a ele. (notação: N(v)). A vizinhança de um subconjunto S de vértices é o conjunto de vértices adjacentes à pelo menos um vértice de S (notação: N(S)).

Subconjunto dominante: dizemos que um subconjunto S domina o grafo G se $S \cup N(S) = V$, isto é, se todo vértice do grafo está em S ou está na vizinhança de S.

6.3.1.3 - 3ª atividade:

- Escola Parque e colégio Pedro II

Foi distribuída aos alunos uma folha onde foram transcritas as estratégias usadas por eles (vide anexo 26), com vários grafos (vide anexos 25, 27 e 28) onde eles deveriam tentar aplicar a estratégia descrita na atividade anterior para encontrar o conjunto dominante, alguns mais simples e outros bem complicados. Logo no início da atividade se surpreenderam com o primeiro grafo que era muito simples.(vide anexo 27)

Apenas através da observação, verificaram que o conjunto dominante poderia possuir dois elementos, que seriam os vértices pintados (1 e 5), mas se utilizassem a estratégia de procurar o vértice de maior grau, eliminar os que ele dominasse e assim por diante encontrariam um conjunto dominante que possuiria três vértices (1 , 4 e 6)

Ainda assim, continuaram a tentar aplicar suas estratégias nos outros grafos (vide anexo 28) e rapidamente verificaram que qualquer estratégia era eficiente em alguns casos, já em outros não. Perceberam também que, para alguns grafos, o fato de estarem na forma gráfica mostrava, com mais facilidade, a ineficiência de qualquer estratégia. P_1 interveio, explicando que, para este tipo de problema, não existe algoritmo que o resolva, retomando o que já havia dito na primeira atividade sobre problemas que possuem solução, por serem finitos, mas para os quais não há solução computacional eficiente.

6.3.1.4 - 4ª atividade:

- Na Escola Parque:

Foi proposto aos alunos um jogo de espionagem (vide anexo 29). Os alunos foram distribuídos em grupos. Um dos elementos de cada grupo teria que ir até uma localidade qualquer para espionar uma rede de comunicações ou de transportes. A rede em questão tinha a forma de um grafo. Cada grupo tinha que pensar de que forma o tal elemento do grupo deveria, através de uma mensagem, descrever para os demais a estrutura da rede, ou seja, o grafo. Na mensagem não poderia haver figuras, apenas letras e números. Cada grupo deveria escrever em detalhes o método utilizado e finalmente testá-lo. A princípio os alunos pareceram ter certa dificuldade, mas bastou P_1 fazer a pergunta: "O que é importante sabermos a respeito de um grafo para identificá-lo?" para que os alunos rapidamente entendessem o que deveriam fazer, ou seja, identificar os vértices e especificar suas ligações. Para isso foi escolhido, pelo próprio grupo, alguém que imaginasse um grafo e através de uma mensagem na forma descrita acima, os demais deveriam entender e reconstruí-lo. Todos os grupos conseguiram, com certa facilidade, codificar e decodificar cada mensagem. A maioria utilizou uma estrutura semelhante a uma lista de adjacência e alguns, que já haviam visto matrizes, também utilizaram sua estrutura. P_1 terminou a aula dizendo que para trabalharmos com grafos em computadores temos que estipular em que código faremos com que a máquina "nos entenda" e vários códigos propostos pelos alunos poderiam ser perfeitamente utilizados em computação. Foi mostrado que, apenas com a lista de adjacência, podíamos determinar o grau dos vértices e conseqüentemente saber se o grafo era ou não euleriano. O desenho não era necessário.

- No colégio Pedro II:

Neste local, foi distribuída a mesma folha, mas pela quantidade menor de alunos, formaram todos um mesmo grupo e cada elemento do grupo, “inventava” um grafo, codificava-o e entregava para que os outros colegas o decodificassem. A mesma pergunta feita por P_1 na Escola Parque também tornou fácil a atividade para os alunos. Observamos diferentes formas de codificação, todas eficientes, algumas destas formas até eram em forma de tabelas, mas por nenhum aluno foi mencionada a palavra matriz pois nenhum deles havia dado este conteúdo em sala de aula. P_1 terminou a aula falando das formas que podemos codificar informações sobre grafos de maneira que o computador “entenda” e o que chamamos de grafo durante todo o trabalho é apenas uma de suas formas de representação (gráfica).

Conceitos envolvidos:

Estrutura de dados: é a forma que apresentamos os dados de um problema conforme desejamos que ele seja resolvido por pessoa ou por computador.

Lista de adjacência: uma lista especificando os vértices e a sua vizinhança.

Matriz de adjacência: uma matriz $A_{n \times n}$ na qual:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \; se\ o\ vertice\ i\ esta\ ligado\ ao\ vertice\ j \\ 0 \; caso\ contrario \end{cases}$$

Obs: a nomenclatura acima não foi utilizada, apenas os conceitos .

7. CONCLUSÕES.

7.1- Quanto ao conteúdo:

A algorítmica é considerada hoje uma ciência de primeira necessidade já que desenvolve certas habilidades imprescindíveis num mundo onde procedimentos seqüenciais se tornam, cada vez mais, um padrão. Conteúdos de matemática discreta são fundamentais para abordagens de temas como gestão, planejamento, produção e distribuição, presentes a todo o momento em nosso dia a dia.

Dentre estes conteúdos, a teoria dos grafos se apresenta como um dos temas mais suscetíveis de serem trabalhados no ensino médio. Sua representação gráfica é atrativa e oferece ao aluno oportunidade de resolver problemas fáceis de compreender mas com exigências próprias de raciocínio, organização e modelagem. Ao mesmo tempo, a teoria dos grafos não se limita à expressão gráfica: ela ressalva a necessidade de uma estrutura de dados que possibilite a resolução de problemas por algoritmos.

Podemos citar dois exemplos do reconhecimento da importância destes conteúdos no ensino médio:

- A partir de 2002, a "terminale ES" (economia e ciências sociais) do curso secundário da França, já inclui obrigatoriamente, um capítulo de teoria dos grafos, pois reconhece a importância desse conteúdo na formação do estudante. A abordagem recomendada é a "resolução de problemas com auxílio da teoria dos grafos" (vide anexo 1)

- Nos Estados Unidos, há dez anos, a "Dimacs Bio-Math Connect Institute" (Rutgers University – New Jersey) promove, anualmente, um curso de capacitação de professores de ensino médio e pré-universitário em teoria dos grafos. Esse projeto promove tanto cursos básicos como também palestras de informação sobre aplicações apresentadas por pesquisadores da teoria dos grafos (vide anexo 30)

Além dos conteúdos relatados neste trabalho foram também abordados:

- Teoria dos jogos
  - posição ganhadora
  - jogos de soma zero
  - equilíbrio de Von Neumann
- Teoria dos grafos
  - coloração de grafos
  - dualidade
  - problemas de caminho crítico
- Teoria da decisão
  - divisão justa
- Probabilidade.

7.2 – Quanto à receptividade:

A escolha de teoria dos grafos, como assunto mais importante do curso, garantiu interesse e participação efetiva dos alunos por sua característica lúdica e por possuir aplicações em problemas próximos do cotidiano. Os problemas eram de fácil formulação e entendimento e os obstáculos só colaboravam para torná-los mais interessantes.

Quando os alunos, pela primeira vez, se depararam com problemas sem solução conhecida, a princípio, se sentiram perdidos, já que se habituaram, até então a ter sempre a resposta no final do livro, mas num segundo momento trataram essa situação como um desafio de encontrar uma solução que fosse viável, atendendo às exigências do problema. Alguns alunos, até foram capazes de perceber que a atividade estava desenvolvendo o espírito crítico de cada um.

Uma parte da boa receptividade se deveu ao fato de os conteúdos serem sempre introduzidos por problemas e através de uma atividade a ser desenvolvida pelos alunos e não por uma apresentação do professor. Num segundo momento, a intervenção do professor foi sempre necessária, afinal estavam lidando com conceitos desconhecidos, mas essa intervenção ganhou bastante em eficácia uma vez que os próprios alunos já haviam detectado os primeiros obstáculos.

Quase todas as atividades foram planejadas para serem trabalhadas em grupo, (embora os alunos tivessem permissão para trabalharem sozinhos) incentivando sempre a discussão e o espírito colaborador.

Ouvimos dos alunos que esta forma de trabalhar é a ideal, mas reconhecem que isso exige uma aula mais "solta", menos tradicional e que dependendo do conteúdo a ser trabalhado talvez não fosse eficiente e além disso, reconhecem também que alguns alunos não participariam de forma efetiva, podendo até desinteressar-se da aula.

7.3 – Quanto à oportunidade e a possibilidade de inclusão desses conteúdos nos cursos de ensino médio:

Como já foi mencionado em capítulo anterior, o desenvolvimento da ciência da computação propiciou o uso de métodos discretos para modelar e otimizar situações tais como tempo de produção, distribuição e alocação de recursos que sustenta modernas abordagens de gestão e planejamento. O raciocínio algorítmico necessita ser introduzido ao currículo atual objetivando oferecer aos alunos a noção dos procedimentos seqüenciais, cada vez mais usados no cotidiano.

As condições históricas e econômicas já estão presentes e nos fazem acreditar que esta inserção é possível, mas será necessário forjar as condições dos ambientes de ensino.

Neste momento a possibilidade de inserção se dará apenas através de oficinas ou matérias eletivas, exatamente como desenvolvemos o trabalho nas duas escolas em questão.

Para tal tivemos a participação de professores gabaritados, mas esta não é a realidade da maioria dos professores do ensino médio, portanto se faz necessário que cursos de capacitação sejam oferecidos.

Sabemos, no entanto, que tal inserção não será tarefa fácil. O atual currículo de ensino médio está saturado e a maior parte dos docentes não tem formação adequada.

Quanto à saturação, o problema já é antigo e muito tem se discutido sobre as formas mais adequadas de superar as dificuldades advindas de um currículo que não cabe no ano letivo.

Uma proposta freqüente é o “trabalho por projetos” que privilegia os métodos de trabalho sobre os conteúdos. A Matemática Discreta, em particular a teoria dos Grafos, oferece uma forma atrativa e rica para esse tipo de trabalho.

Independentemente de sua inserção como conteúdo regular no ensino médio, parece evidente que a Matemática Discreta deve fazer parte da formação do professor, devendo ser incluída de maneira organizada nos cursos de licenciatura.

7.4 – Considerações finais:

As oficinas de Matemática Discreta não são propostas como uma solução para o ensino da matemática do ensino médio. Sua intenção é a de introduzir conteúdos importantes, embora ainda ausentes do currículo, mas a forma de trabalho aponta também para uma conduta pedagógica que privilegia a investigação.

Ao longo deste trabalho fizemos já algumas ressalvas: os grupos eram capacitados acima da média do alunado, as condições de trabalho eram favoráveis (poucos alunos, ausência de tensão pela avaliação) e os alunos escolheram trabalhar com Matemática.

Isso não invalida o fato de termos identificado muitos aspectos positivos: a conservação da motivação inicial, o surgimento de estratégias próprias de solução e uma avaliação francamente positiva dos alunos no que diz respeito aos métodos e principalmente aos conteúdos.

Sem cair na armadilha da “contextualização” ingênua, observamos que os alunos identificaram nos conteúdos e formas de solução uma ligação estreita com problemas próximos a sua realidade.

Eles compreenderam que o que haviam aprendido sobre grafos eulerianos ,por exemplo, não os capacitavam para solucionar um problema verdadeiro de roteamento, mas adquiriram a convicção de que o conhecimento “profissional” e o seu conhecimento estavam enraizados nos mesmos conceitos.

Podemos afirmar que os alunos que passaram pela experiência das oficinas de Matemática Discreta adquiriram não apenas um elenco de novos conteúdos e processos, mas também uma visão da Matemática como parte da sua vida sócio-econômica.

8. ANEXOS.

Anexo 1:

56 Le B.O.
N°4
30 AOÛT
2001
HORS-SÉRIE

PROGRAMMES DES LYCÉES

PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN CLASSE TERMINALE DE LA SÉRIE ÉCONOMIQUE ET SOCIALE

A. du 20-7-2001. JO du 4-8-2001
NOR : MENE0101661A
RLR : 524-7
MEN - DESCO A4

Vu code de l'éducation, not. art. L. 311-1 à L. 311-3 et L. 311-5 ; D. n°90-179 du 23-2-1990 ; A. du 18-3-1999 mod. ; avis du CNP du 26-6-2001 ; avis du CSE des 5 et 6-7-2001

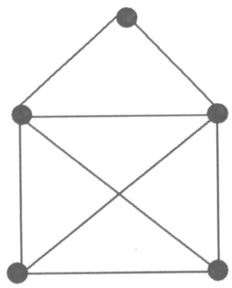
Article 1 - Le programme de l'enseignement obligatoire et de spécialité des mathématiques en classe terminale de la série économique et sociale est déterminé par les dispositions annexées au présent arrêté.
Article 2 - Le directeur de l'enseignement scolaire est chargé de l'exécution du présent arrêté qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait à Paris, le 20 juillet 2001
Pour le ministre de l'éducation nationale
et par délégation,
Le directeur de l'enseignement scolaire
Jean-Paul de GAUDEMAR

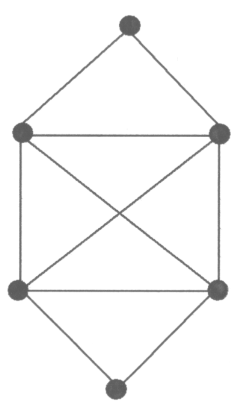
Anexo 1(continuação):

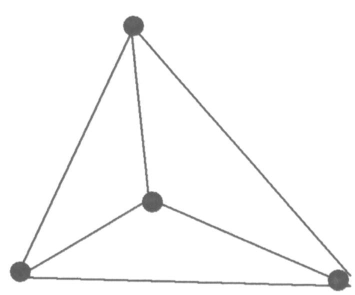
CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Résolution de problèmes à l'aide de graphes		
Résolution de problèmes conduisant à la modélisation d'une situation par un graphe orienté ou non, éventuellement étiqueté ou pondéré et dont la solution est associée : - au coloriage d'un graphe, - à la recherche du nombre chromatique , - à l'existence d'une chaîne ou d'un cycle eulérien, - à la recherche d'une plus courte chaîne d'un graphe pondéré ou non, - à la caractérisation des mots reconnus par un graphe étiqueté et, réciproquement, à la construction d'un graphe étiqueté reconnaissant une famille de mots. - à la recherche d'un état stable d'un graphe probabiliste à 2 ou 3 sommets.	Les problèmes proposés mettront en jeu des graphes simples, la résolution pouvant le plus souvent être faite sans recours à des algorithmes. On indiquera que pour des graphes complexes, des algorithmes de résolutions de certains problèmes sont absolument nécessaires. On présentera un algorithme simple de coloriage des graphes et un algorithme de recherche de plus courte chaîne.	Il s'agit d'un enseignement entièrement fondé sur la résolution de problèmes. L'objectif est de savoir modéliser des situations par des graphes et d'identifier en terme de propriétés de graphes la question à résoudre. Ces algorithmes seront présentés dans les documents d'accompagnement et on restera très modeste quant à leurs conditions de mise en œuvre.
Vocabulaire élémentaire des graphes : sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, distance entre deux sommets, diamètre, sous-graphe stable, graphe connexe, nombre chromatique, chaîne eulérienne, matrice associée à un graphe, matrice de transition pour un graphe pondéré par des probabilités.	Les termes seront introduits à l'occasion de résolution de problèmes et ne feront pas l'objet d'une définition formelle, sauf lorsque cette définition est simple et courte (degré d'un sommet, ordre d'un graphe par exemple).	Les élèves devront savoir utiliser à bon escient le vocabulaire élémentaire des graphes, vocabulaire qui sera réduit au minimum nécessaire à la résolution des problèmes constituant l'enseignement de cette partie.
Résultats élémentaires sur les graphes : - lien entre la somme des degrés des sommets et le nombres d'arêtes d'un graphe ; - conditions d'existence de chaînes et cycles eulériens ; - exemples de convergence pour des graphes probabilistes à deux sommets, pondérés par des probabilités.	On pourra, dans des cas élémentaires, interpréter les termes de la puissance $n^{ème}$ de la matrice associée à un graphe.	
Compléments sur les suites		
Suites monotones, majorées, minorées, bornées. Suites convergentes.	On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites. On s'appuiera sur un traitement tant numérique (avec outils de calcul : calculatrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique. On fera comprendre, sans en donner de définition formelle, les notions de suite convergente et de suite tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$; on étudiera ainsi le comportement asymptotique des suites géométriques et des suites arithmétiques ainsi que des sommes partielles de ces suites.	On gardera en terminale la démarche expérimentale adoptée en première pour les suites, en particulier pour aborder la notion de convergence. On évitera tout formalisme inutile, sans pour autant sacrifier la rigueur du raisonnement ; on utilisera le raisonnement par récurrence dans les situations où il est nécessaire. On pourra, utiliser les règles opératoires sur les limites vues en classe de première pour les fonctions. On s'appuiera sur la calculatrice ou une représentation graphique adaptée pour conjecturer le comportement global ou asymptotique de chacune des suites étudiées.
	On introduira quelques exemples de suites finies, dont on demandera un ou plusieurs prolongements "logiques" (c'est-à-dire définis par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, ou du type $u_n = f(n)$).	On soulignera l'entraînement au raisonnement inductif et la mise en jeu des capacités d'invention que la recherche de tels exemples implique.

Anexo 2:

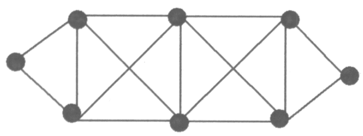


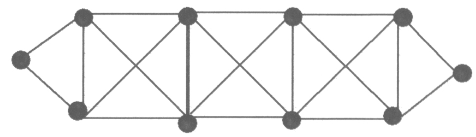
Anexo 3:

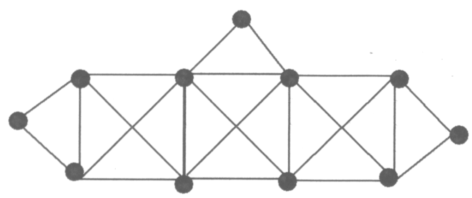


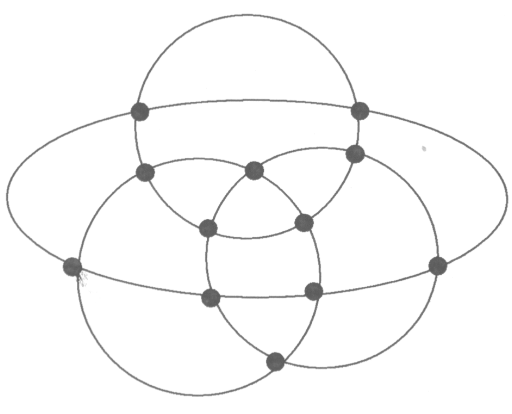


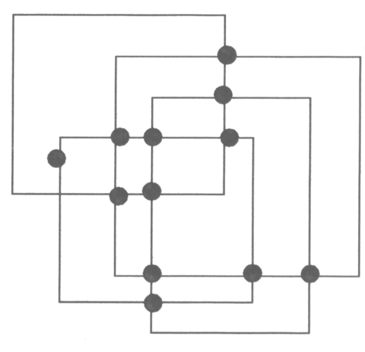
Anexo 3 (continuação):











Anexo 4:

DOMINÓ

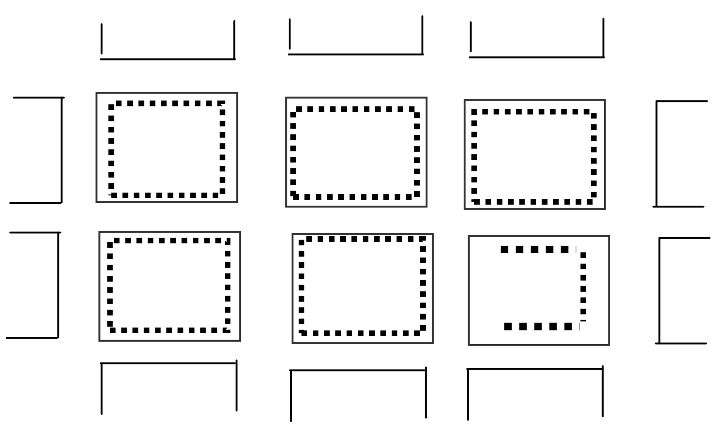
1) Fazer um circuito usando todas as peças de um jogo de dominó. É possível ? É fácil ?

2)E se tirarmos todas as peças que tem o número 6 ?

3)Se pegarmos 18 peças de dominó ao acaso, como saberemos se é ou não possível fazer um circuito ? ou fazer um caminho (sem precisar fechar)

Anexo 5:

Tenho que recolher o lixo em um grupo de quarteirões. Cada pontinho representa um ponto de coleta. Qual a maneira mais econômica de fazer a coleta ? (Observação – São ruas movimentadas, logo não posso atravessar a rua para um lado e para o outro).



Anexo 6:

Vocabulário

Grafo

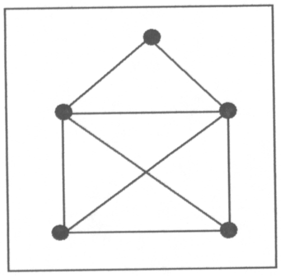
Vértice

Aresta

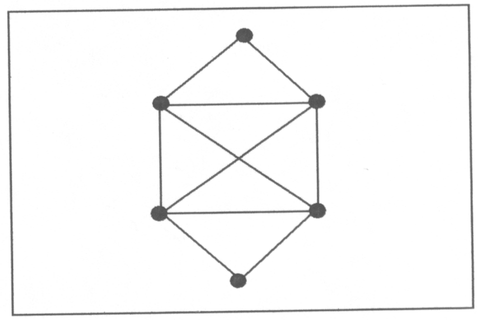
Circuito

Caminho

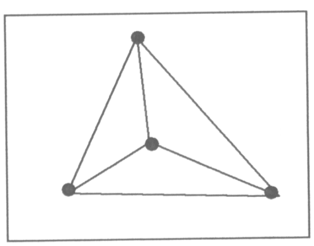
Anexo 7:



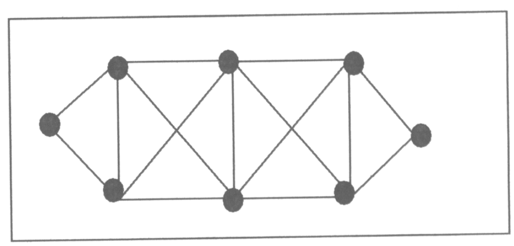
Vértice	grau
A	3
B	4
C	2
D	4
E	3
Soma	16
No. de arestas	8
No. de vértices de grau ímpar	2



Vértice	grau
A	
B	
C	
D	
E	
F	
Soma	
No. de arestas	
No. de vértices de grau ímpar	

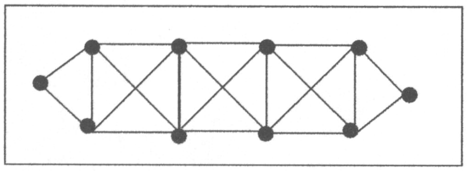


Vértice	grau
A	
B	
C	
D	
Soma	
No. de arestas	
No. de vértices de grau ímpar	

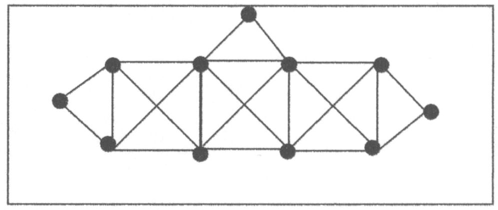


Vértice	grau
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
Soma	
No. de arestas	
No. de vértices de grau ímpar	

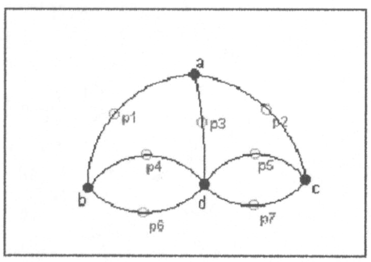
Anexo 7 (continuação):



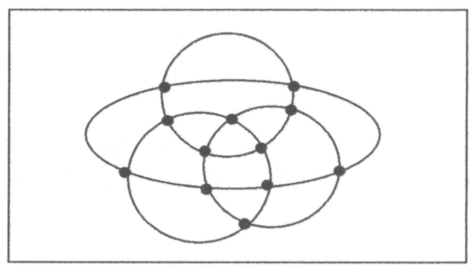
Vértice	grau
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	
Soma	
No. de arestas	
No. de vértices de grau ímpar	



Vértice	grau
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	
K	
Soma	
No. de arestas	
No. de vértices de grau ímpar	



Vértice	grau
A	
B	
C	
D	
Soma	
No. de arestas	
No. de vértices de grau ímpar	



Vértice	grau
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	
K	
Soma	
No. de arestas	
No. de vértices de grau ímpar	

Anexo 8:

Após preencher estas tabelas, você deve ter percebido algumas relações entre os números que obtivemos contando as ligações e os graus.

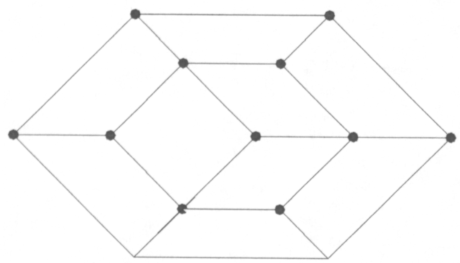
O que você observou ?

O que você observou vale para TODOS os grafos ? Construa um grafo (com pelo menos 6 vértices) e faça a tabela. A sua observação continua valendo ?

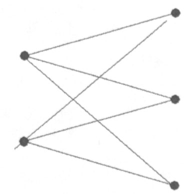
Bem, você pode continuar desenhando grafos até o fim do ano; mas talvez você consiga imaginar um ARGUMENTO que explique a sua observação. Assim você não precisará verificar a tabela toda vez que desenhar um grafo. Esse argumento é o que chamamos PROVA ou DEMONSTRAÇÃO.
Que tal tentar ?

Anexo 9:

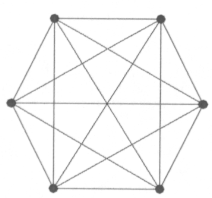
I



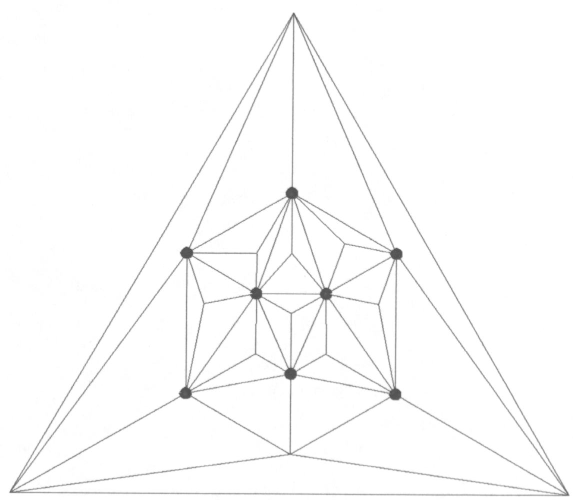
II



III

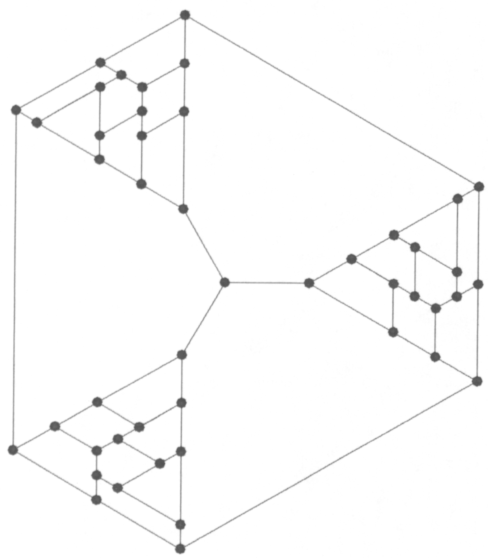


IV

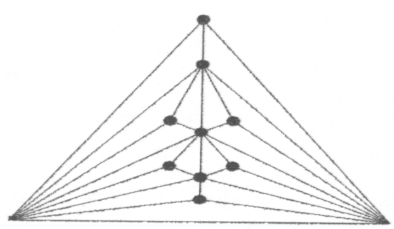


Anexo 9 (continuação):

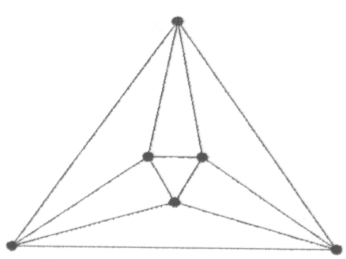
V



VI

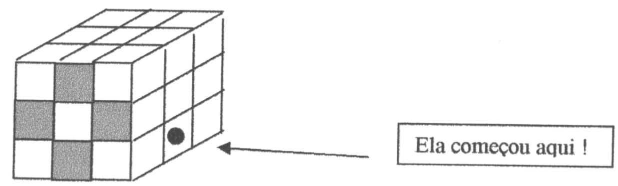


VII



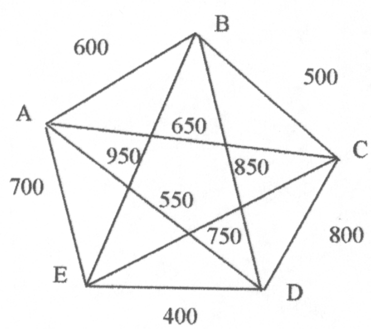
Anexo 10:

Uma traça tem suas manias. Uma que eu conheço resolveu comer um cubo de madeira, feito de 27 cubinhos. O lugar por onde ela começou está marcado no cubo. Ela só passa de cubo andando para os lados ou para cima ou para baixo, mas nunca em diagonal. Também não volta num cubinho que já tenha visitado. Será que ela conseguiu provar cada um dos 27 cubinhos ?



Anexo 11:

Qual a melhor maneira de visitar as 5 cidades (A, B, C, D e E) e voltar para a cidade inicial, viajando o mínimo possível ?



Anexo 12:

7 equipes devem disputar um campeonato de futebol. Elas devem jogar uma vez com cada uma das outras equipes.
Represente o campeonato por um grafo

- As equipes serão os vértices
- Os jogos serão as arestas.

O que representa o grau de cada vértice ?

____

____

____

____

Quantos jogos haverão ? Calcule o número de arestas ! (use o que fizemos na última aula).

Anexo 13:

5 amigos estão no pátio jogando totó, sempre de um contra um. (A)lberto, (B)erenice, (C)arlos, (D)enise e (E)lisa já jogaram um monte de jogos:

A → jogou 7 vezes
B → jogou 3 vezes
C → jogou 9 vezes
D → jogou 6 vezes
E → jogou 5 vezes

Como são todos muito democráticos, resolveram igualar o número de jogos que cada um deveria fazer. Quantos jogos NO MÍNIMO eles ainda precisarão fazer ?

Anexo 14:

<u>Demonstração não é coisa simples !</u>

Vamos recordar ; nós chegamos à conclusão de que o número de arestas de um grafo é sempre a metade da soma dos graus dos vértices.

ISSO É UM TEOREMA !

Então podemos escrever de forma bem pomposa:

Teorema : Num grafo qualquer, o número de arestas é a metade da soma dos graus

Demonstração : (oferecida por um aluno)

Cada vez que retiramos uma aresta do grafo diminuímos <u>dois graus</u>.
Isso mostra que o número de arestas é a metade da soma dos graus.

Comentário

A idéia está corretíssima ! mas as vezes é difícil explicar as idéias...
Na verdade diminuímos <u>duas unidades da soma dos graus.</u>

Outra demonstração :

Quando somamos os graus dos vértices estamos somando uma unidade por cada "ponta" da aresta; como cada aresta tem duas pontas, contamos duas vezes cada aresta.
Isso mostra que o número de arestas é a metade da soma dos graus.

IMPORTANTE : Uma demonstração fala em soma, outra em subtração, mas a idéia é basicamente a mesma. Alguns podem gostar mais de uma demonstração do que de outra, mas o importante é que se compreenda o que está acontecendo. As duas demonstrações são boas – agora sabemos de uma coisa que acontece SEMPRE – não precisamos NUNCA MAIS conferir o número de arestas e somar os graus.

Que tal você tentar agora ?

Também verificamos que

<u>Os vértices de grau ímpar acontecem "aos pares"</u>

Uma maneira de escrever isso de forma rigorosa é:

Teorema : Num grafo qualquer há sempre um número par de vértices de grau ímpar.

Demonstração : É com você ! (use o teorema anterior)

____

____

____

____

Anexo 15:

NOTAÇÃO COMPLICA OU SIMPLIFICA ?

Mas os matemáticos gostam de complicar/simplificar.
Uma outra forma de escrever o Teorema 1 é:

Teorema 1':
Seja um grafo G , m o número de arestas de G e V é o conjunto de vértices de V; então

$$2.m = \sum d(v)$$

Epa ! Vamos com calma...vamos "dissecar" a fórmula.

- ***2.m*** é uma forma de escrever "duas vezes o número de arestas".

- $=$ quer dizer que

"o que está a esquerda" VALE TANTO QUANTO "o que está a direita"

$$\sum$$

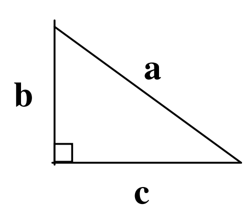
- é a letra grega **sigma** maiúscula; usamos ela para indicar a soma de todos os elementos de um conjunto . No caso, vamos somar os graus dos vértices v.

$$2.m = \sum \mathrm{d}(v)$$

O dobro	do número de arestas	é igual à	soma	dos graus	dos vértices

Bem, é como aprender outra língua; só que grande parte do idioma matemático é compartilhado por cientistas, matemáticos e pessoas em geral por toda parte do mundo.

Sua vez ! Você conhece isso? Como você enunciaria esse teorema ? (não é pra



Que tal "dissecar" a fórmula ?

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Anexo 16:

Grafos e representação gráfica

Já conversamos sobre o fato de que o desenho do grafo ser apenas uma das formas de representar o grafo. Vamos ver agora que podemos representar grafos por sentenças matemáticas.

O que precisamos ?

Primeiro : Exibir um conjunto de vértices (podem ser números, figuras, palavras, símbolos, etc)

Depois : Dizer quais os vértices que queremos ligar e quais não queremos ligar.

Anexo 17:

G_1 de **Grafo** | **V** é o conjunto de **vértices** | **A** é o conjunto de **arestas**

Vamos construir um grafo $\mathbf{G_1(V, A)}$ onde o conjunto **V** dos vértices são os nomes de dez frutas:

V = { manga, maçã, cereja, laranja, pêra, abacaxi, melancia, jaca, jabuticaba, nêspera }

Falta agora dizer quem está ligado e quem não está.

A = { (x,y) | x tem o mesmo número de vogais que y }

Calma ! Não entremos em pânico.

Vamos interpretar o que está escrito :

Anexo 17 (continuação):

O nome do conjunto é A

Dois elementos do conjunto V

A regra é : se os dois nomes tiverem o mesmo número de vogais, estarão ligados. Caso contrário, não estarão ligados

A = { (x,y) $\in$ V $\times$ V | x tem o mesmo número de vogais que y }

Mãos a obra :

maçã

manga

melancia

pêra

jabuticaba

abacaxi

nêspera

jaca

laranja

cereja

Anexo 18:

Agora vamos fazer um exemplo com números :

G_2(V,A) é o grafo.
V = { 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 24, 20 }
A = { (x,y) $\in$ V $\times$ V | x e y têm um divisor comum maior do que 1}
(porquê tem que ser maior do que 1 ?!!)

Anexo 19:

E mais um exemplo com números. (Atenção: esse caso tem novidade !! Você pode dizer qual é ?)

G_3(V, U)
V = Conjunto dos números naturais de 1 a 10
U = { (x, y) | x ÷ y é um número primo }

(obs: Não consideramos 1 como número primo)

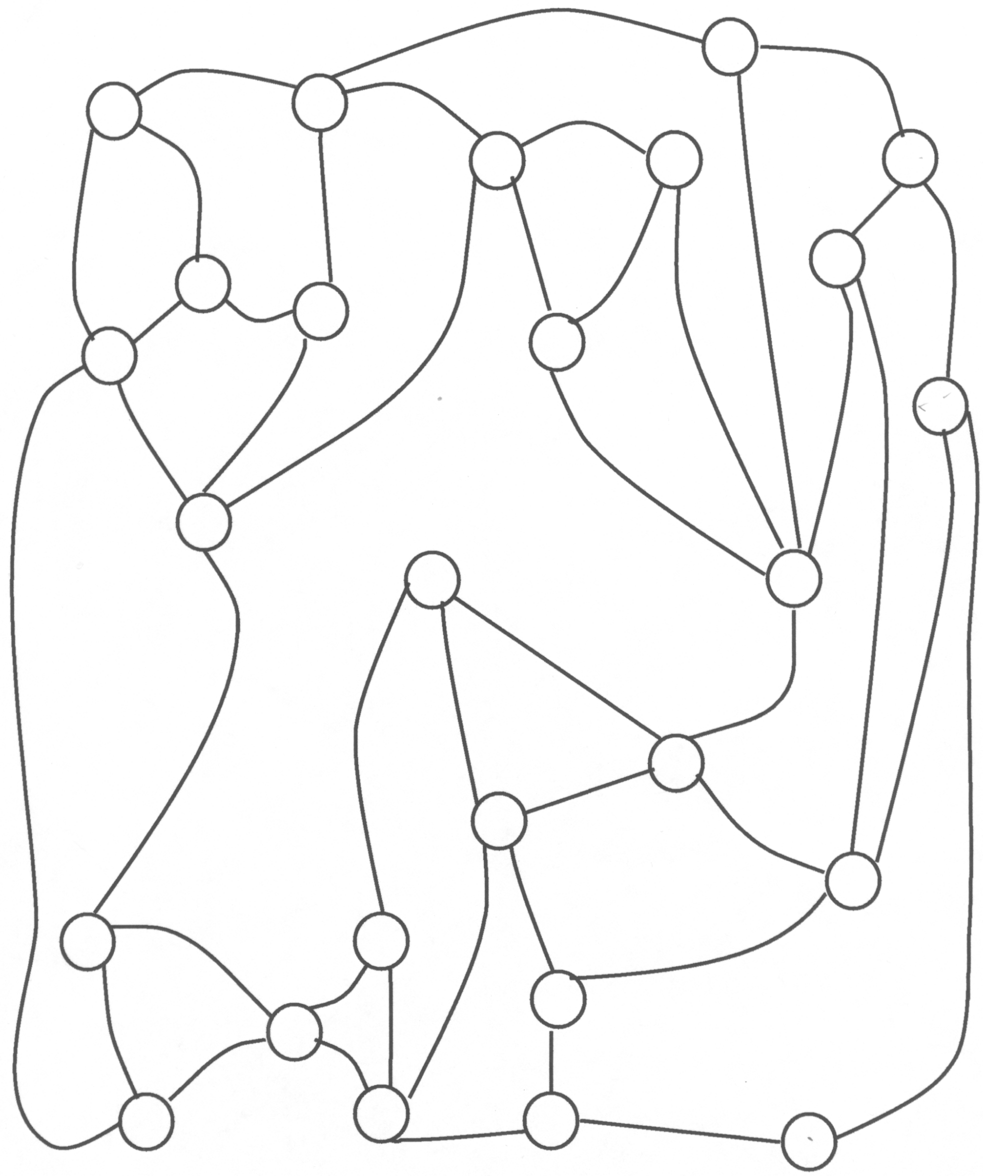
Anexo 20:

Perguntas de observação

1) Em quais destes grafos os vértices estão todos conectados entre si ?

2) Em qual (ou quais) destes grafos devemos considerar uma <u>orientação ?</u> Como podemos mostrar isso no grafo ?

Anexo 21:

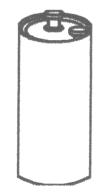


Anexo 22:

<u>Um problema de pilhas – uma pilha de problemas !</u>

A partir desta sessão de nossa oficina, estaremos trabalhando com um problema simples. Bem, talvez não seja tão simples assim. Na verdade é fácil compreender o problema. A solução... mas iremos vendo que solução vamos dar à medida que formos conhecendo o problema.

O que vocês estão vendo a sua frente é uma pequenina cidade; estamos querendo fazer uma coleta de pilhas para que possamos reciclá-las de forma ecologicamente correta. Sabemos que todos querem colaborar, mas dá uma preguiça...



Vamos tentar colocar postos de recolhimento de maneira que uma pessoa que esteja em qualquer rua ou esquina **<u>tenha que andar no máximo duas esquinas</u>** (ATENÇÃO: se você estiver já numa esquina, essa esquina já conta !).

O prefeito pediu a um grupo de cidadãos (**vocês** !) que pensassem numa forma de localizar os postos de coleta. A prefeitura conseguiu patrocínio e podemos usar até 12 postos. Parece fácil ?

Então mãos a obra.

Esteja certo de que você conseguiu entender o que está sendo pedido. Você deve pensar numa maneira de **mostrar** que efetivamente resolveu o problema.

Anexo 22 (continuação):

Problema acontecem...

Bem, parece que estava tudo indo muito bem; mas um dos patrocinadores "roeu a corda" (parece que se indispôs com a prefeitura...).

Então agora, só dispomos de dinheiro para construi 9 postos de coleta.

Cabe perguntar ? Nosso problema ficou mais fácil ou mais difícil ?

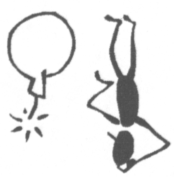
Vamos tentar encontrar uma solução.

Mais problema !

Outro patrocinador se retirou do projeto (parece que o prefeito dessa cidade não é muito bom de negociação...). Agora só temos condições de construir 7 postos. Nosso problema está ficando crítico.

Será que ainda conseguimos resolver ?

É melhor planejar

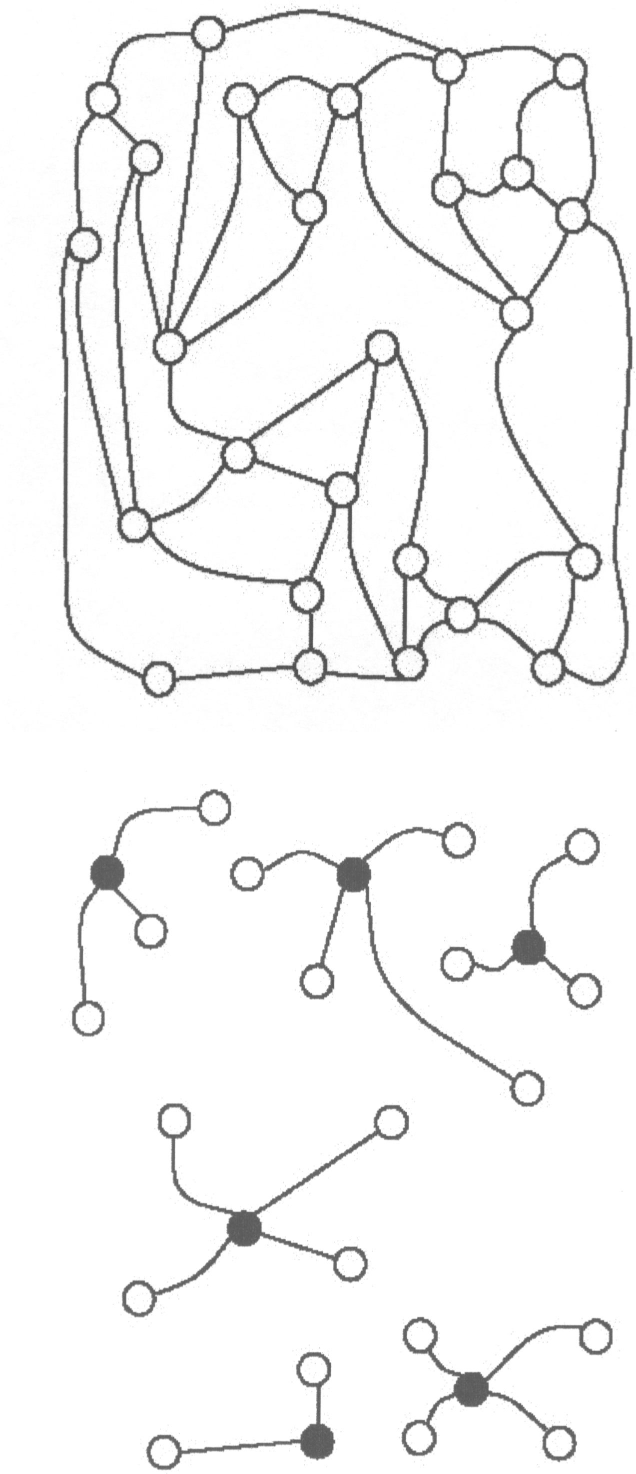


O prefeito começa a perceber que há alguns interesses que estariam sendo contrariados, e por isso os patrocinadores estão abandonando o projeto. Ele então resolve se prevenir, e tentar saber qual a quantidade **mínima** de recursos ele teria que gastar. Para isso, ele precisa que nós respondamos à seguinte pergunta:

Qual o menor número de postos de coleta que atendem a nossos objetivos.

(Lembre-se, será preciso mostrar que o numero que encontramos é realmente o mínimo – isto é o menor número)

Anexo 23:



Anexo 24:

Quem faz uma vez, faz sempre ?

Imagine se cada vez que você fosse andar tivesse que aprender de novo como se faz ! Ou se você tivesse que SABER o resultado de TODAS as contas de somar. É claro que sua vida seria um inferno.

Uma vez que aprendemos a andar (observe uma criança e veja que processo complicado é andar !) não precisamos voltar a aprender. No caso da soma, basta conhecer a tabuada e o processo de somar que o sistema decimal possibilita. Esse processo é o que chamamos um ALGORITMO.

Algoritmos sempre foram importantes, mas hoje em dia são imprescindíveis. Um dos motivos é o avanço dos computadores; são máquina capazes de cumprir tarefas com precisão e velocidade , mas não têm a menor iniciativa... precisam que lhes digamos o que fazer – o programa. Bem, esse programa é um algoritmo escrito de forma que o computador compreenda.

Mas algoritmos estão por toda parte. Ao jogar um video-game, programar um video-cassete, realizar operações em caixa eletrônicas, temos que nos adaptar a algoritmos e a procedimentos padronizados.

Nos próximos trabalhos estaremos tentando bolar um algoritmo que nos ajude a resolver o problema de dominação (o problema dos postos de recolhimento de pilhas). Nosso programa será (cada fase, um dia):

1 – Você usou alguma estratégia para encontrar um conjunto dominante na atividade da aula passada ?

2 – Em caso afirmativo tente descrevê-la da forma mais clara possível. etc.)

Anexo 25:

Leia o processo descrito por cada grupo e tente aplicar nos grafos a seguir.

1) Será que a gente consegue entender cada processo descrito ?

2) Será que um desses processos é bom ? Será que ele é o melhor possível ?

3) Podemos modificar o procedimento para melhorar ?

Anexo 26:

Para adiantar, coloco abaixo os procedimentos propostos pelos grupos (sublinhei o nome em cujo trabalho estava escrito o procedimento; sei que foi coletivo, é só para registro).

Clarisse , Daniel, Renato, Vítor
"Ver vértices de maior grau, que não estejam perto um do outro (porque assim será mais fácil alcançar vértices diferentes)."

Carmem, Larissa, Lílian
"Vértices com alto grau que alcancem o máximo de vértices diferentes."

Gustavo, Leonardo, Lucas, Marcelo
"Procuramos os pontos com maior número de graus e que não se ligam entre si"

Guilherme[1], Gustavo, Thiago[2]
1 → "Procurar um vértice com grau alto e que os vértices ligados a ele não estejam ligados a outros vértices."
2→ "Procedimento:
1° – Marcar vértices dominantes que tenham dois vértices dominantes entre si
2° – Buscar os vértices de maior grau para serem dominantes"

Todos são parecidos , mas há várias idéias que devemos precisar.
É o que faremos antes de tentar aplicar nossos procedimentos ao "banco de grafos" que vem logo atrás.

Anexo 26 (continuação):

Para adiantar, coloco abaixo os procedimentos propostos.Todos são parecidos , mas há várias idéias que devemos precisar. É o que faremos antes de tentar aplicar nossos procedimentos ao "banco de grafos que vem logo atrás.

Taissa – Procurar o ponto de maior grau, começando pelo lado esquerdo superior.
À partir desse ponto ir verificando qual já está controlado, parte por parte.
Tentar colocar a menor quantidade de pontos possíveis.
E finalmente verificar se todos estão dominados para ter certeza de que está certo.

Laryssa – 1 - Começar pelo vértice de maior grau, em segundo inutilizar os vértices que são dominados por este vértice. Depois numa maneira sequencial veja os próximos vértice com maior grau.

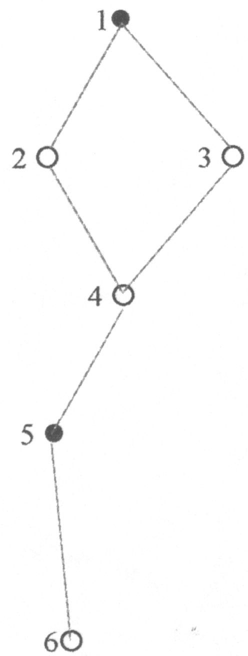
Vitor – Não comece pelo lado esquerdo superior só porque acha que é bonito.
Tente começar pelo vértice de maior grau.
Risque os dominado.
Vai a luta !

Eduardo – Procurar um dos vértices de maior grau e marcá-lo. Riscar seus dominados. Perto desses procurar os de maior grau que não foram dominados e marcá-lo. E assim por diante...

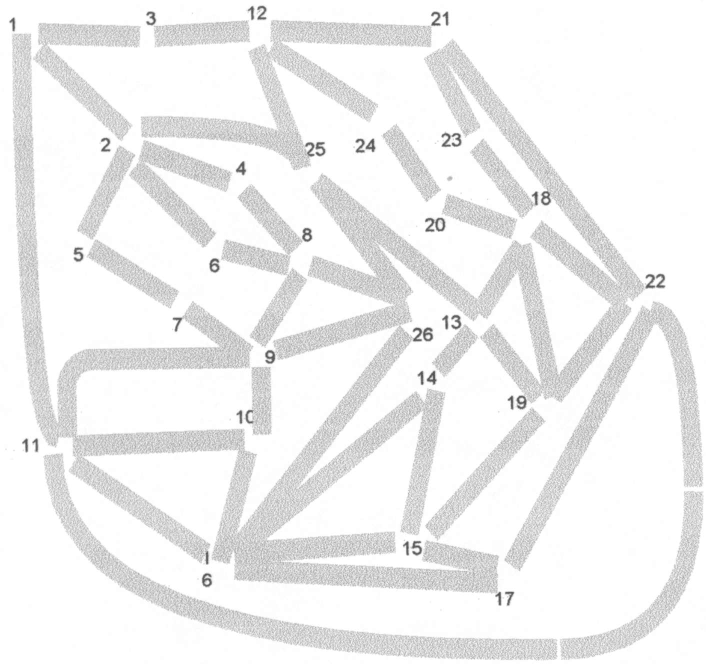
Lívia – 1- Pegue um ponto de maior grau
2 – Riscar os pontos já dominados
3 – Procurar um ponto com grau alto, e que controle o maior número de pontos possíveis. E assim por diante.

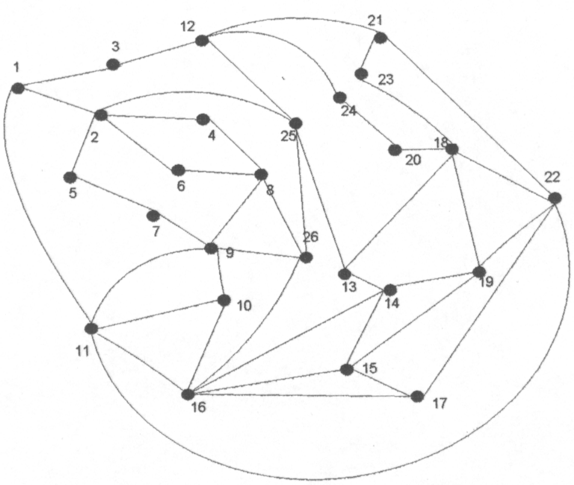
Guilherme – Começar utilizando primeiro os vértices com maior número de grafos. Depois vamos acompanhando a sequência de vértices. Os que não são dominados pelo vértice anterior será dominado pelo ponto mais próximo com o maior número de arestas ligado a ele. Continue assim sucessivamente.

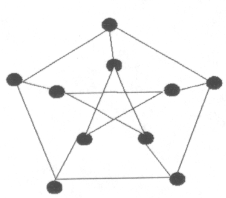
Anexo 27:



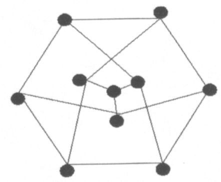
Anexo 28:

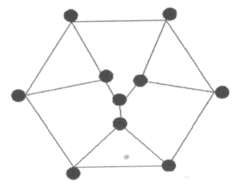

1
3
12
21
2
25
24
23
4
18
20
8
5
6
22
13
7
26
9
14
19
10
11
15
I
6
17

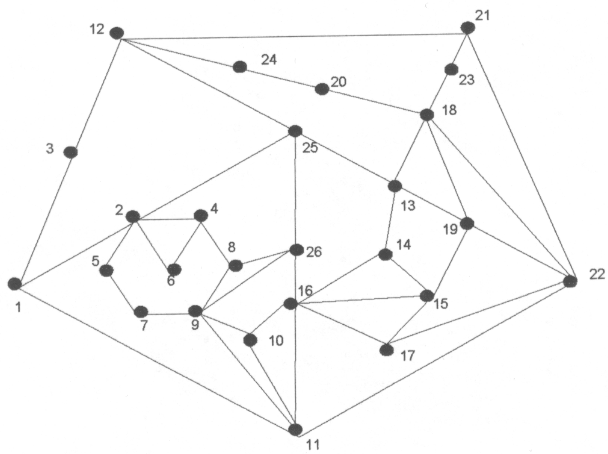

21
12
3
23
1
24
25
4
18
2
20
22
6
5
8
7
26
9
13
19
14
10
11
15
16
17



Anexo 28 (continuação):







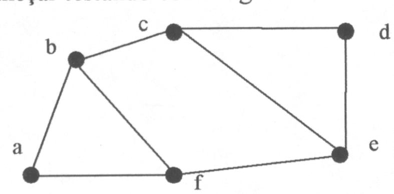
Anexo 29:

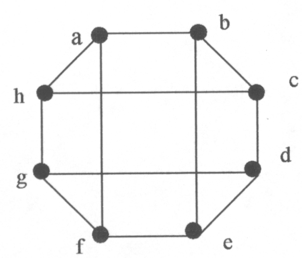
Um jogo de espionagem

O seu grupo deve desempenhar uma missão – ir até determinada localidade para espionar a rede de comunicações (ou de transportes, sei lá, tanto faz). Essa rede tem a forma (adivinha !) de um grafo (afinal, o que é mesmo importante num grafo ??).
A estrutura dessa rede deve ser enviada imediatamente; não podemos enviar imagens, só sequências de símbolos (letras, números). Se você acha isso estranho, lembre-se que um livro é escrito exatamente assim.
A tarefa do grupo é imaginar uma maneira de enviar esta estrutura de forma que o seu QG possa se preparar.

→ Imagine de que forma isso pode ser feito.
→ Escreva os detalhes desse método.
→ Teste "enviando" uma estrutura para seus colegas e verificando se ele consegue reconstituir a estrutura.

Você pode começar testando com os grafos abaixo:





E finalmente invente um grafo e transmita em código para os seus colegas para testar se eles conseguirão reconstruí-lo ou decodificá-lo.

Anexo 30:

About the 2004 Topic and Outline of the Program

High School Teacher Program

Application for Non-Previous DCI Participants

Application for Previous DCI Participants Only

General Information

About DIMACS

DCI Home

DCI '04 Home

AT&T Foundation

AT&T Learning Network

Funded by the National Science Foundation and the AT&T Foundation

DCI 2004

The DIMACS Bio-Math Connect Institute

Rutgers University
July 18 - July 30, 2004

We invite you to participate in an experimental DCI Program emphasizing discrete mathematics and biology in summer 2004.

A program of research experiences and classroom material writing for high school teachers, and collaborations between researchers and teachers.

Fred S. Roberts, DIMACS, Rutgers University
Director of DIMACS, Principal Organizer
froberts@dimacs.rutgers.edu

Midge Cozzens, Colorado Institute of Technology
Co-Organizer
mcozzens@coloradoit.org

Shelly Leibowitz, Wheaton College
Principal Coordinator
rleibowi@wheatonma.edu

Joseph Rosenstein, DIMACS, Rutgers University
Associate Director of Education
joer@dimacs.rutgers.edu

Robert Hochberg, East Carolina University
Principal Lecturer
hochberg@dimax.rutgers.edu

Research Experience Leaders:

Laurie Heyer, Davidson College
laheyer@davidson.edu

Elizabeth "Z" Sweedyk, Harvey Mudd College
z@cs.hmc.edu

Research Experience Consultant:

9. BIBLIOGRAFIA.

[1] BOAVENTURA NETTO, P.O., Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos, 2ª Edição, Editora Blucher Ltda, 2001.

[2] BUARQUE DE HOLANDA, A., Novo Dicionário da Língua Portuguesa, 2ª edição, Editora Nova Fronteira, 1986.

[3] CASEY, N., FELLOWS, M., "Algorithms and Ice Cream for All", http: // c.3 lanl.gov/megamath/ workbk/dom/dom.html.

[4] _________________, "Mathematical Modelling and Discrete Mathematics", In: Discrete Mathematics in the School, volume 36, pp. 99-104, DIMACS,1997.

[5] HARARY, F., Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.

[6] HAYNES, T. W., HEDENTNIEMI, S. T., SLATER P. J., Fundamental of Domination in Graphs, Editora Marcel Dekker, 1998.

[7] KAHANE, J. P., L'Enseignement des Sciences Mathématiques Rapport au Ministre de L'Éducation – Comission de Reflexion sur l'enseignment des Mathématiques, Edition Odile Jacobs, 2000, Paris.

[8] MAURER, S., “What is Discrete Mathematics? The Many Answers” – In: Discrete Mathematics in the Scholl, pp. 121-132, Volume 36, DIMACS,1997.

[9] ROBERTS, F. S., “The Role of Aplications in Teaching Discrete Mathematics” – In: Discrete Mathematics in the Scholl, volume 36, pp. 105-117, DIMACS, 1997.

[10] SZWARCFITTERJ.L.,Grafos e Algoritmos Computacionais, Editora Campus, 1984.

[11] WILSON R., WATKINS J., Graphs – An Introductory Approach – A first Course in Discrete Mathematics, John Wiley & Sons Inc., 1990.