



OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR DE CARTEIRAS NEUTRAS AO MERCADO
SOB RESTRIÇÕES DE AVERAGE VALUE-AT-RISK - AVAR

Rafael Rodrigues

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Juan Pablo Cahahuanca Luna

Rio de Janeiro
Outubro de 2016

OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR DE CARTEIRAS NEUTRAS AO MERCADO
SOB RESTRIÇÕES DE AVERAGE VALUE-AT-RISK - AVAR

Rafael Rodrigues

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Examinada por:

Prof. Juan Pablo Cajahuanca Luna, D.Sc.

Prof. Carlos Heitor d'Ávila Pereira Campani, D.Sc.

Prof. Edilson Fernandes de Arruda, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
OUTUBRO DE 2016

Rodrigues, Rafael

Otimização Não Linear de Carteiras Neutras ao Mercado sob Restrições de Average Value-at-Risk - AVaR/Rafael Rodrigues. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

X, 112 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Juan Pablo Cajahuanca Luna

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Produção, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 106 – 111.

1. Programação Não Linear Mista Inteira. 2. Python.
3. Carteira Neutra ao Mercado. 4. Gestão de Carteira.
I. Luna, Juan Pablo Cajahuanca. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Produção. III. Título.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR DE CARTEIRAS NEUTRAS AO MERCADO
SOB RESTRIÇÕES DE AVERAGE VALUE-AT-RISK - AVAR

Rafael Rodrigues

Outubro/2016

Orientador: Juan Pablo Cajahuanca Luna

Programa: Engenharia de Produção

A estratégia de neutralidade ao mercado é comumente empregada por Fundos de Pensão que visam obter retornos sem exposição direcional ao mercado representado pelo índice de referência. Uma carteira é dita neutra ao mercado quando não é correlacionada com ele. Tradicionalmente, emprega-se o uso de restrições sobre o beta da carteira, em um modelo de Markowitz, para se obter a neutralidade. Um modelo alternativo foi proposto por Valle *et. al* que minimiza o valor absoluto da correlação entre os retornos da carteira e do mercado. Este modelo foi apresentado como um problema de minimização não linear misto-inteiro.

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo modificado do modelo proposto por Valle *et. al* que usa somente variáveis contínuas e algumas heurísticas obtendo significativas melhoras em termos de tempo computacional. Além disso, são adicionadas restrições sobre os custos de transação e de risco, usando o Average Value-at-Risk (AVaR).

Foram realizados *backtests* e análise de desempenho da carteira para várias configurações de parâmetros do modelo proposto. Toda a programação foi implementada em Python.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

NON LINEAR OPTIMIZATION OF MARKET NEUTRAL PORTFOLIO
UNDER AVERAGE VALUE-AT-RISK CONSTRAINTS - AVAR

Rafael Rodrigues

October/2016

Advisor: Juan Pablo Cajahuanca Luna

Department: Production Engineering

The market neutrality strategy is frequently used for Hedge Funds that seek to achieve returns with no directional exposition to the Market represented by a benchmark index. A portfolio is considered market neutral when it is uncorrelated to the market. Traditionally, for obtaining neutrality, it is considered a Markowitz model where some constraints involving the portfolio beta are added. An alternative approach was proposed by Valle et al. where they minimize the absolute value of the correlation between the portfolio and market returns. This model was expressed as a mixed-integer nonlinear minimization problem.

The purpose of this work is to present a modified version of the model proposed by Valle et al. where we consider only continuous variables and some heuristics, obtaining appreciable improvement on computational time. Besides that, it is considered transaction costs and risk constraints, based on the Average Value-at-Risk (AVaR).

There were performed backtests and performance analysis for several sets of parameter configurations. The computer programs were coded in Python.

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Estrutura deste trabalho	3
2 Revisão Bibliográfica	5
2.1 Otimização	5
2.1.1 Otimização Não Linear	5
2.1.1.1 Condições de Otimalidade	6
2.1.1.2 Otimização Irrestrita	6
2.1.1.3 Otimização com Restrições	7
2.1.1.4 Convergência e Critérios de Parada	10
2.1.1.5 Algoritmos de Penalização e as Lagrangianas Au- mentadas	12
2.1.1.6 Problemas não lineares com variáveis inteiras	14
2.1.1.6.1 O algoritmo de <i>Branch-and-Bound</i> :	14
2.2 Otimização em Finanças	16
2.2.1 Medidas de Risco	19
2.3 Gerenciamento de Carteiras	21
2.3.1 A Avaliação de Desempenho e os Indicadores de Desempenho de Carteiras	22
2.3.2 Backtesting	27
3 Carteiras Neutras ao Mercado	29
3.1 CAPM	29
3.2 Conceito de Neutralidade	31
3.3 Abordagens de Obtenção de Carteiras Neutras ao Mercado	34

4	Metodologia	37
4.1	Estratégia de Seleção de Ativos e do Índice de Referência	37
4.1.1	Estratégia de Seleção de Ativos	37
4.1.2	Estratégia de Seleção do Índice de Referência	38
4.2	Sequenciamento das Atividades	41
5	Modelos Propostos	44
5.1	Parâmetros	44
5.2	Função Objetivo	46
5.3	Variáveis	47
5.4	Restrições	47
5.5	Detalhes da Implementação	55
6	Resultados Numéricos	58
6.1	Avaliação dos Modelos Misto-Inteiros e Seleção da Função Objetivo	58
6.1.1	Função Objetivo - Coeficiente de Determinação	58
6.1.2	Função Objetivo - Variável Auxiliar	60
6.2	Comparação de Desempenho entre os Modelos Misto-Inteiro e Contínuo	62
6.2.1	Resultados <i>in-sample</i>	62
6.2.2	Resultados <i>out-of-sample</i>	64
6.3	Resultados para diversos níveis de <i>short selling</i>	71
6.4	Carteiras Neutras ao Mercado com restrição de AVaR	77
6.4.1	Análise <i>Out-of-sample</i> das Carteiras com AVaR	80
6.5	Comparação com as Carteiras Beta-Zero	87
6.6	Carteiras Neutras ao Mercado com Custos de Transação	91
6.7	Impacto do Parâmetro: Tamanho da Amostra <i>in-sample</i>	94
6.8	Impacto do Parâmetro: Periodicidade de Rebalanceamentos	99
7	Conclusões	102
7.1	Recomendações para trabalhos futuros	105
	Referências Bibliográficas	106

Lista de Figuras

2.1	Relação de Minimizadores e Pontos KKT - Caso Convexo	10
2.2	Exemplo de uma árvore de <i>branch-and-bound</i>	16
3.1	Carteira altamente correlacionada com o mercado	32
3.2	Carteira Neutra ao Mercado	33
4.1	Média Móvel dos Retornos Diários dos Índices de Referência ao Mercado	40
4.2	Série Temporal dos Índices de Referência dos Ativos Livres de Risco .	40
4.3	Metodologia	42
6.1	Alocação Ótima para o teste 1	59
6.2	Alocação Ótima para teste 1	61
6.3	Alocação Ótima para teste 2	61
6.4	Beta da Carteira - Modelo Misto-Inteiro	63
6.5	Beta da Carteira - Modelo Contínuo	63
6.6	Valor das Carteiras	66
6.7	Retorno Acumulado das Carteiras	66
6.8	Índice de Sharpe	67
6.9	Índice de Informação	68
6.10	Alfa de Jensen	68
6.11	Índice de Modigliani	69
6.12	Índice de Sortino	69
6.13	Beta	70
6.14	Correlação	71
6.15	Betas das Carteiras de Long-Short e Long Only	73
6.16	Correlação com o mercado Carteiras de Long-Short e Long Only . . .	73
6.17	Betas dos ativos selecionados pela carteira de long only	74
6.18	Retornos Anualizados da Carteira de Long Only	74
6.19	Distribuição das Ações por Setor	76
6.20	Distribuição das Perdas - Carteira 130/30 AVaR a 2% Nível de Con- fiança de 99%	79

6.21	Distribuição das Perdas - Carteira 130/30 AVaR a 2% Nível de Con- fiança de 95%	79
6.22	Distribuição das Perdas - Carteira 130/30 AVaR a 2% Nível de Con- fiança de 90%	80
6.23	Distribuição das Perdas das carteiras 130/30 sem e com AVaR a 2,5%	81
6.24	Distribuição das Perdas das 150/50 sem e com AVaR a 2,5%	82
6.25	Distribuição das Perdas das carteiras 150/50 sem e com AVaR a 1,5%	82
6.26	Comparação entre os modelos com e sem AVaR	83
6.27	Média Móvel dos Retornos das Carteiras	84
6.28	Distribuição das Ações por Setor	85
6.29	Proporção entre Setores Cíclicos e Não Cíclicos	85
6.30	Diversificação das Carteiras	86
6.31	Índice de Sharpe Condicional - Carteiras 130/30	87
6.32	Índice de Sharpe Condicional - Carteiras 150/50	87
6.33	Retornos Acumulados das Carteiras	89
6.34	Beta das Carteiras	89
6.35	Correlação com o Mercado das Carteiras	90
6.36	Distribuição das Perdas - Carteira 130/30 com AVaR e custos	91
6.37	Distribuição das Perdas - Carteiras 150/50 com AVaR e custos	92
6.38	Diversificação das Carteiras 130/30 com AVaR e custos	93
6.39	Diversificação das Carteiras 150/50 com AVaR e custos	94
6.40	Valor das Carteiras 150/50 - AVaR 2,5% para Diferentes Tamanhos de Amostras	95
6.41	Correlação das Carteiras 150/50 - AVaR 2,5% para Diferentes Tama- nhos de Amostras	96
6.42	Beta das Carteiras 150/50 - AVaR 2,5% para Diferentes Tamanhos de Amostras	97
6.43	Distribuição das Perdas das Carteiras 150/50 com AVaR 2,5% para Diferentes Tamanhos de Amostras	98

Lista de Tabelas

5.1	Síntese dos Parâmetros	45
5.2	Restrições - Limites Superior e Inferior dos Pesos	48
5.3	Restrições - Capital Disponível	48
5.4	Restrições - Limites para <i>Long</i> e <i>Short Positions</i>	48
5.5	Restrições - Evitar Seleção Simultânea entre <i>Long</i> e <i>Short Positions</i> .	49
5.6	Restrições - Setores Cíclicos	49
5.7	Restrições - Número Máximo de Ações a Serem Seleccionadas	49
5.8	Restrições - Cálculo do Retorno da Carteira	50
6.1	Resultados para o teste 1	60
6.2	Resultados para o teste 2	60
6.3	Resultados para teste 1	60
6.4	Resultados para teste 2	62
6.5	Teste de Hipótese para Distribuição Normal	64
6.6	Quadro Comparativo - Médias por Rebalanceamento	75
6.7	Quadro Comparativo - Média das Séries do Backtest	75
6.8	Carteira Neutra ao Mercado com AVaR	78
6.9	Impacto da Inserção da Medida de Risco em uma Carteira 130/30 . .	84
6.10	Comparação com Modelo beta-zero com AVaR a 2,5%	90
6.11	Desempenho das Carteiras com AVaR 2,5% e custos de 0,15%	92
6.12	Desempenho das Carteiras com AVaR 2,5% e custos de 0,10%	93
6.13	Desempenho das Carteiras 150/50 AVaR 2,5% para Diferentes Tamanhos de Amostra	97
6.14	Impacto do Tamanho da Amostra sobre o AVaR das Carteiras	98
6.15	Desempenho das Carteiras 130/30 em Diferentes Rebalanceamentos .	99
6.16	AVaR e Custo Total - Carteiras 130/30 em Diferentes Rebalanceamentos	100
6.17	Desempenho das Carteiras 150/50 em Diferentes Rebalanceamentos .	100
6.18	AVaR e Custo Total - Carteiras 150/50 em Diferentes Rebalanceamentos	101

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo é feita uma introdução ao tema discutido nesta dissertação segmentando-a em três partes: 1. Motivação e Descrição do Problema, onde se relata uma breve descrição sobre neutralidade ao mercado e sua contextualização na elaboração de carteiras de investimento em renda variável; 2. Objetivos, o qual descreve o objetivo principal deste trabalho bem como os objetivos secundários e o diferencial em relação aos trabalhos já existentes e, por fim 3. Estrutura da Dissertação, em que se detalha de forma resumida a disposição dos assuntos abordados nesta dissertação.

1.1 Motivação

A estratégia de neutralidade ao mercado é empregada no mercado financeiro, principalmente pelos Fundos de Pensão. Diz-se que a neutralidade ao mercado é obtida, se houver rentabilidade independente do desempenho do mercado ou, segundo Caldeira e Portugal [1], quando o retorno é obtido sem exposição direcional ao mercado.

O objetivo da neutralidade ao mercado é gerar retorno ao investidor mesmo que o mercado financeiro tenha comportamento de perdas. As carteiras são montadas de tal forma que sua correlação com o mercado seja nula, ou próxima da nulidade.

A neutralidade ao mercado busca evitar o risco de mercado ou sistemático, medido pelo beta da carteira. Entretanto, é importante salientar que, apesar de diminuir a exposição ao risco sistemático, a neutralidade ao mercado não neutraliza o risco do investimento.

Os modelos de otimização de carteiras mais conhecidas são baseados no trabalho de média-variância de Markowitz [2]. Normalmente, adiciona-se restrições sobre o beta da carteira ao modelo de Markowitz para se obter uma carteira próxima da neutralidade.

Valle *et. al* [3] buscaram uma alternativa a este modelo tradicional ao apresentar um modelo não linear misto-inteiro que visa a minimização do valor absoluto da correlação do retorno da carteira com o retorno do mercado.

Para que a carteira seja não correlacionada com o mercado, é comumente empregada a estratégia de *long-short*. A carteira é obtida do lucro sobre a venda de ativos na posição *short* para financiar a compra dos ativos da posição *long*.

A posição *short*, *short selling* ou venda a descoberto consiste em obter um lucro sobre a venda de um ativo que não possui. Presume-se que um ativo tem tendência de queda e o vende sem o deter, ainda pelo preço mais alto do preço reduzido que ele terá no futuro, se a tendência de queda se concretizar.

Em seguida, aluga o ativo e, ao final do prazo do aluguel, o recompra com o preço reduzido, devolvendo ao doador pelo preço atual que é menor do que o preço que ele foi vendido anteriormente, obtendo, assim, o lucro na transação.

Existem opções de montagem de carteiras que sejam direcionais ao mercado. Uma delas é chamada de *index tracking*, quando a carteira deve acompanhar o desempenho do mercado. A outra é chamada de *bear market* quando a carteira deve ter comportamento oposto ao mercado, ou seja, negativamente correlacionada a ele.

O mercado acionário brasileiro, contém ações que possuem, normalmente, altos betas indicando sua sensibilidade às oscilações do mercado. Além do fato de o brasileiro possuir a recente memória de crise e a aversão ao risco, Casarotto e Kopittke [4], Marinho [5] e Neri *et al.* [6]. Logo, proposta de neutralidade ao mercado parece atraente ao ambiente brasileiro.

1.2 Objetivos

Esta dissertação apresenta alternativas à modelagem proposta por Valle *et al.* [3] e suas vantagens em relação ao modelo original. Dessa forma, o objetivo principal é considerar um problema de programação não linear com variáveis contínuas, ou *nonlinear programming* - *NPL* como uma alternativa ao problema de programação não linear misto-inteiro, ou *mixed integer nonlinear programming* - *MINLP* apresentado por Valle *et al.* [3]. A programação é implementada na linguagem Python de forma a se obter uma carteira neutra ao mercado aplicada ao mercado brasileiro de ações de forma a se obter uma performance vantajosa ao investidor frente a outros investimentos disponíveis.

Os demais objetivos e diferenciais deste trabalho são:

- apresentar a linguagem Python como alternativa às linguagens comumente usadas em trabalhos acadêmicos como R e MatLab;

- apresentar e comparar os resultados e o desempenho computacional dos modelos propostos que geram carteiras neutras ao mercado;
- assegurar que as carteiras obedçam a algumas estratégias estabelecidas pelo investidor como: atribuir pesos baixos a ativos de empresas pertencentes a setores cíclicos da economia, selecionar somente ativos de alta liquidez e superar o tanto índice de referência de mercado, o IBrX100, quanto o índice de referência referente ao ativo livre de risco, o CDI;
- discutir sobre avaliação de desempenho de carteiras por meio de indicadores de desempenho;
- realizar a comparação dos modelos com a metodologia tradicional proposta pelo CAPM;
- verificar, por meio de *backtesting* tanto estático quanto dinâmico, o desempenho das carteiras obtidas ao longo do tempo;
- apresentar a medida coerente de risco, AVaR, e avaliar o comportamento das carteiras com o acréscimo dessa medida de risco;
- analisar o impacto dos custos de transação nos modelos confrontando com diversos períodos de relanceamento.

1.3 Estrutura deste trabalho

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

No capítulo 2 é revisitada a literatura relativa a problemas de programação não linear e não linear misto inteiro. As condições de otimalidade, critérios de parada e algoritmos de penalização são apresentados dando ênfase no algoritmo do Lagrangiano Aumentado por ser usado pelo resolvidor de programação não linear, ALGENCAN [7] e [8], e do algoritmo de *Branch-and-Bound* para a parte inteira, que será utilizado neste trabalho. Além disso, há uma apresentação sobre o uso de Otimização no mundo das Finanças incluindo os recentes temas acerca da Teoria Pós-Moderna de Carteiras finalizando com os conceitos de indicadores de desempenho de carteiras e demais ferramentas de gerenciamento como o *backtest*.

No capítulo 3 é abordado o assunto relativo aos trabalhos sobre carteiras neutras ao mercado apresentado os conceitos de neutralidade e os principais trabalhos acerca desta tema.

Já o capítulo 4, descreve algumas diretrizes para elaboração e composição das carteiras apresentando alguns critérios para seleção de ativos e dos índices de refe-

rência para as mesmas, seja em termos de índice de referência para o mercado seja para o índice de referência para o ativo livre de risco.

A apresentação dos modelos propostos assim como os parâmetros envolvidos e detalhamento da implementação dos mesmos é abordada no capítulo 5 que também descreve as variantes dos modelos propostos. E no capítulo 6 são relatados os resultados numéricos e o impacto da alteração dos parâmetros nos modelos propostos, além da análise de desempenho das carteiras no *backtests*.

Por fim, no capítulo 7 expõe-se as principais conclusões além de propostas para futuros trabalhos.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Este capítulo discute o embasamento teórico necessário para atingir os objetivos desta dissertação por meio de uma revisão bibliográfica que está dividida em duas partes: a primeira trata de técnicas de programação matemática, enquanto a segunda trata de sua aplicação em Finanças.

2.1 Otimização

Os problemas de otimização buscam a obtenção de soluções ótimas ou próximas de ótima como respostas a diversas questões do mundo da engenharia, logística, administração, etc. por meio de expressões matemáticas sujeitas a um conjunto de restrições uma vez que os recursos são limitados ou há diversas condições que o problema deve atender.

Em relação à natureza das equações matemáticas envolvidas, podem ser divididos em dois tipos: otimização ou programação linear e otimização ou programação não-linear. No que tange ao tipo de expressão matemática envolvida, frequentemente são divididas em otimização convexa ou côncava, apesar de existirem outras. Em relação às variáveis, podem ser classificadas em otimização contínua, discreta ou mista. Além disso, há um subconjunto de otimização que chamado irrestrita ou sem restrições que, na maioria das vezes, retrata apenas casos teóricos e importantes para se conhecer as técnicas de otimização.

Neste trabalho, assim como em diversos problemas aplicados a Finanças, é considerado um problema de otimização não linear. Além disso, há variáveis de natureza tanto contínua quanto discreta, o que torna a otimização ainda mais complicada.

2.1.1 Otimização Não Linear

Trata-se de problemas de otimização nos quais a função objetivo ou as restrições possuem característica não linear. Muitos fenômenos possuem essa característica

principalmente em Finanças.

Os modelos não lineares podem ser divididos em dois grupos: i) sem restrições ou irrestritos e ii) com restrições. Os modelos com restrições possuem a seguinte formulação básica:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a: } x \in D \end{aligned}$$

Onde D representa um subconjunto de \mathbb{R}^n chamado de conjunto viável que indica as restrições do problema e a solução x^* deve pertencer a este conjunto para encontrar o valor da função objetivo $f(x^*)$ de tal forma que $f(x^*) \leq f(x)$, para $\forall x \in D$.

No entanto, a dificuldade da otimização não linear é saber se de fato x^* é realmente o menor valor para que a função objetivo seja mínima. Nesse sentido, deve-se verificar se o ponto é um mínimo, máximo ou apenas um ponto de inflexão, o qual não é interessante.

2.1.1.1 Condições de Otimalidade

Para verificar se um ponto é um mínimo local ou global de uma função é importante saber se a função é convexa, pois se um ponto é um mínimo local para esta função convexa, ele também será um mínimo global.

Um mínimo global ou absoluto, x^* , é aquele que $f(x^*) \leq f(x)$ para $\forall x \in D$, onde D é o conjunto viável do problema. É um mínimo local se $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in D$ tal que $|x - x^*| < \epsilon$, sendo $\epsilon > 0$.

Para se verificar se um ponto encontrado é de fato minimizador local, devem ser observadas as condições de primeira e de segunda ordem. As condições de primeira ordem verificam se a função objetivo pode crescer ou diminuir, pois caso isso ocorra a solução encontrada ainda não é a ótima e essa busca continua até que esse gradiente seja zero ou algum valor aceitável próximo de zero. Já a condição de segunda ordem verifica se o ponto encontrado é um mínimo, máximo ou um ponto de inflexão.

2.1.1.2 Otimização Irrestrita

Para um problema sem restrições, as condições de otimalidade se resumem àquelas para a função objetivo.

- A condição necessária de primeira ordem: Seja uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é um minimizador local irrestrito; então $\nabla f(x^*) = 0$;
- A condição necessária de segunda ordem: Seja uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é um minimizador local irrestrito

atendendo a condição necessária de primeira ordem; então $\nabla^2 f(x) = H(x) \geq 0$, ou seja, a matriz Hessiana $H(x)$ é semi-definida positiva.

- A condição suficiente de segunda ordem: Seja uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é um ponto estacionário, ou seja, atende a condição de primeira ordem e a matriz Hessiana de f em x^* for definida positiva; então f satisfaz, em torno de x^* , a condição de crescimento quadrático e, portanto, é um minimizador local irrestrito para um $\lambda > 0$, tal que :

$$f(x) - f(x^*) \geq \lambda |x - x^*|^2, \quad \forall x \text{ próximo a } x^* \quad (2.1)$$

A grande complexidade relacionada aos problemas não lineares está na dificuldade de se encontrar mínimos locais. Um dos métodos usados para procurar esses extremos locais é o método do Gradiente, também chamado de *Gradient Descent Method* que usa o vetor gradiente que, por sua vez, fornece a direção de maior decréscimo da função objetivo a partir de um ponto inicial. No entanto, este não é o único método usado.

Mesmo com esses métodos, essa procura poderá ser longa e não encontrar um extremo local além do fato ser necessário o uso de derivadas, o que é um desafio para a otimização não linear.

2.1.1.3 Otimização com Restrições

O caso mais geral de otimização é aquele que contém restrições mistas de igualdade e de desigualdade em que: $\min f(x)$ sujeito a $x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$ onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Conforme visto anteriormente, a condição de primeira ordem parece indicar que $\nabla f(x^*)$ deve ser perpendicular ao conjunto viável D no ponto x^* . Assim, $-\nabla f(x^*)$ no sentido de minimização da função objetivo, deve ser uma combinação linear dos gradientes das restrições tal que:

$$\nabla L(x, \lambda, \mu) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \nabla h_i(x^*) \lambda_i + \sum_{i \in I_0} \nabla g_i(x^*) \mu_i = 0 \quad (2.2)$$

Onde o conjunto I_0 representa o conjunto de soluções ativas no ponto x^* e os coeficientes μ_i e λ_i são os chamados multiplicadores de Lagrange e se $g_i(x^*) \leq 0$, então $\mu_i \geq 0$, pois caso contrário $-\nabla f(x^*)$ e $\nabla g_i(x^*)$ apontariam na mesma direção erroneamente.

A função $L(x, \lambda, \mu)$ é chamada de função lagrangiana. Se um ponto x^* obedece às condições da equação (2.2), diz-se, então, que ele é um ponto estacionário e atende às condições de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Assim, x^* é um ponto estacionário do problema se ele pertence ao conjunto viável D e existem $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ e $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+$, onde $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ são os multiplicadores de lagrange associados ao ponto estacionário.

De acordo com [9], o sistema de KKT no ponto x^* é o conjunto de equações e inequações a seguir:

$$\begin{aligned}
\nabla_x L(x^*, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0 & \implies \text{estacionaridade lagrangiana} \\
\bar{\mu}_i g_i(x^*) = 0, \quad i \in [1, m] & \implies \text{complementaridade} \\
h(x^*) = 0 & \implies \text{viabilidade primal} \\
\bar{\mu} \geq 0 & \implies \text{viabilidade dual} \\
g(x^*) \leq 0 & \implies \text{viabilidade primal}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Sendo as restrições de igualdade e de desigualdade duas vezes diferenciáveis no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Seja o ponto x^* é uma solução local para o problema, se o ponto satisfaz as condições de regularidade de independência linear dos gradientes das restrições ativas ou se as restrições forem lineares, então existe $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ associado a este ponto.

Para verificar se este ponto atende às condições de necessárias de segunda ordem, ou seja, para verificar se o ponto é um mínimo local, então para qualquer vetor $d \in K(x^*)$ existe a relação:

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(x^*, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) d, d \right\rangle \geq 0 \tag{2.4}$$

Onde $K(x^*)$ é o cone tangente ou cone crítico, um subconjunto formado por $d \in K(x^*)$ conforme (2.5). Dessa forma, só as direções que pertencem ao cone $K(x^*)$ podem ser tangentes no ponto $x^* \in D$ em relação ao conjunto viável D .

$$K(x^*) = \left\{ \begin{array}{l} \langle \nabla f(x^*), d \rangle \leq 0, \\ \langle \nabla g_i(x^*), d \rangle \leq 0 \quad \forall i \in I_0, \\ \langle \nabla h_i(x^*), d \rangle \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array} \right\} \tag{2.5}$$

Segundo Bonnans *et al* [10] para as condições suficientes de segunda ordem, se o ponto estacionário x^* é um minimizador estrito e $d \in K(x^*)$ tal que:

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(x^*, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) d, d \right\rangle > 0 \tag{2.6}$$

Então existe um $\beta > 0$ que satisfaça $f(x) \geq f(x^*) + \beta|x - x^*|^2$ para todo x viável na vizinhança de x^* .

Algumas hipóteses adicionais que garantem que as condições de KKT sejam

válidas num minimizador local são chamadas de condições de qualificação (CQ). Por exemplo, quando as restrições de um problema de otimização são lineares, então elas satisfazem KKT e, portanto, diz-se que as restrições lineares é uma condição de qualificação.

Contudo, as condições de KKT não abarcam todos os casos. Desta forma, deve haver outras condições de qualificação ou condições de regularidade que possam assegurar a otimalidade que podem ser KKT ou não-CQ.

A condição de qualificação (CQ) mais comum e também a mais forte é a *linear independence constraint qualification* (LICQ) onde todos os gradientes das restrições de igualdade e somente os gradientes das restrições ativas do tipo $g_i(x)$ são linearmente independentes.

Uma condição mais fraca que a LICQ é a condição de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ), pois se, por exemplo, dois gradientes das restrições forem coincidentes, o LICQ não é satisfeita. A MFCQ é satisfeita no ponto estacionário se i) o jacobiano das restrições de igualdade for sobrejetivo, ou seja, foram um conjunto linearmente independente ii) existe um vetor $d \in \ker(\nabla h(x))$, tal que $\langle \nabla g_i(x)^T, d \rangle < 0$. A MFCQ explora o fato dos multiplicadores de lagrange serem não negativos formando um conjunto de gradientes positivo-linearmente independente.

Conforme Haeser [11] LICQ garante que haja únicos multiplicadores de lagrange, enquanto que MFCQ não garante necessariamente a unicidade, mas um conjunto compacto de multiplicadores. Importante ressaltar que LICQ implica em MFCQ, mas o contrário não.

No caso convexo, quando as restrições de igualdade são afins e as de desigualdade são convexas; então a condição de regularidade é satisfeita e é chamada de condição de Slater.

Uma outra condição mais fraca de qualificação é a *constant positive linear dependence* ou CPLD introduzida por Qi e Wei [12]. Em seu trabalho, Martínez [13] prova que se x^* é um minimizador local que satisfaz CPLD, então deve satisfazer as condições KKT e que, portanto, é um CQ. Para Wang [14], CPLD pode ser visto como uma relaxação de MFCQ e LICQ.

A CPLD é atendida se o ponto estacionário satisfaz o sistema gera uma solução não-nula:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_0 \subseteq J} \nabla h_j(x^*) \lambda_j + \sum_{i \in I_0} \nabla g_i(x^*) \mu_i &= 0 \\ \mu_i &\geq 0, \forall i \in I_0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Então existe uma vizinhança $N(x^*)$ de x^* onde $\nabla g_i(x)$ e $\nabla h_j(x)$ em $i \in I_0$ e $j \in J_0$ são linearmente dependentes para todo $x \in N(x^*)$, ou seja, os vetores são positivamente linearmente dependentes.

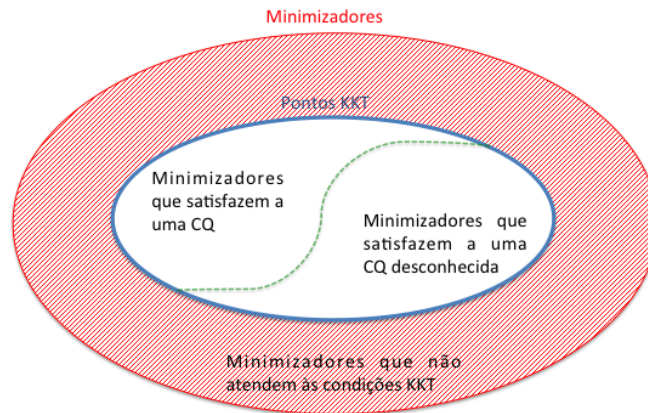


Figura 2.1: Relação de Minimizadores e Pontos KKT - Caso Convexo

2.1.1.4 Convergência e Critérios de Parada

De acordo com [15], os valores da função objetivo e de suas restrições e suas derivadas são utilizados nos algoritmos. Quando os pontos de avaliação destes valores são escolhidos a priori, temos um método passivo de resolução. Quando em cada ponto da iteração é definido com base nas informações dos pontos anteriores, tem-se um método sequencial e são considerados os mais eficientes. Essa seqüência de pontos por iteração é, na verdade, uma aproximação à solução do problema.

Entretanto, a cada seqüência de pontos na iteração k não há como garantir que x^k seja uma solução exata do problema. Para verificar se x^k é, pelo menos, uma boa aproximação da solução, para um k grande, tem-se:

$$\{x^k\} \rightarrow x^* \quad (k \rightarrow \infty) \quad (2.8)$$

Se a condição (2.8) é obtida, então há uma convergência assintótica em relação às variáveis do problema a partir do ponto inicial x^0 .

Quando:

$$f(x^k) \rightarrow f^* \quad (k \rightarrow \infty) \quad (2.9)$$

onde f^* é o valor ótimo da função objetivo, temos uma convergência em relação à função objetivo, mas não significa que a seqüência x^k convirja.

E quando:

$$\{f'(x^k)\} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (2.10)$$

tem-se uma convergência em relação ao gradiente, para o caso irrestrito.

Se a convergência acontece usando pontos iniciais próximos a uma solução, temos uma convergência local. Entretanto, se a convergência for garantida a partir do ponto inicial para todo conjunto D tal que $x^0 \in \mathbb{R}$, então teremos uma convergência global.

Evidentemente que não é computacionalmente viável que o algoritmo rode infinitamente ou por longos períodos de forma que não haja nenhuma melhora nos valores encontrados. Dessa forma, o primeiro critério de parada estabelecido é o número máximo de iterações.

Outros critérios de parada frequentemente utilizados são aqueles em que não sejam possíveis melhorar a qualidade de aproximação da solução ou da função objetivo de maneira significativa. Assim sendo, os critérios de parada podem ser sintetizados como segue:

$$|x^k - x^{k-1}| \leq \epsilon \quad (2.11)$$

$$|f(x^k) - f(x^{k-1})| \leq \epsilon \quad (2.12)$$

$$|\nabla f(x^k)| \leq \epsilon \quad (2.13)$$

O critério de parada (2.13) pode ser melhor descrito como:

$$\frac{|\nabla f(x^k)|}{\max\{1, |\nabla f(x^0)|\}} \leq \epsilon \quad (2.14)$$

Onde ϵ é um valor muito pequeno e maior que zero. São comumente chamados de tolerância: $xtol$, $ftol$ ou $gradtol$, que correspondem a (2.11), (2.12) e (2.13), respectivamente.

O exposto acima retrata uma realidade relativamente simples dos problemas irrestritos. Contudo, os problemas de restrições mistas precisam verificar as condições de qualificação. Nesse sentido, se x^k atende às condições KKT ou atende aproximadamente às condições de KKT (AKKT), então ele deve parar.

A condição AKKT é a normalmente usada calibrando um valor suficientemente pequeno e aceitável para ϵ . Assim, a cada iteração o problema é resolvido até que se resolva o sistema em $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$:

$$\begin{aligned}
|\nabla f(x^k) + \nabla h(x^k)\lambda^k + \nabla g(x^k)\mu^k| &\leq \epsilon \\
|\nabla h(x^k)| &\leq \epsilon, |\nabla g(x^k)^+| \leq \epsilon \\
g_i(x^k) &\leq -\epsilon \\
\mu_i^k &= 0, \forall i \in I_0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Para a resolução dos problemas de otimização é necessário empregar algum método computacional que possa encontrar uma solução a partir de um ponto inicial qualquer. A seguir serão apresentados os métodos de penalização e será dada a especial importância à penalização quadrática e às lagrangianas aumentadas que podem solucionar problemas com restrições mistas e será usado pelo resolvedor ALGENCAN no Capítulo 6.

2.1.1.5 Algoritmos de Penalização e as Lagrangianas Aumentadas

Os métodos de penalização têm por objetivo tornar um problema com restrições em um problema irrestrito acrescentando à função objetivo um termo que a penaliza. Há diferentes métodos de penalização dependendo da forma com que ela ocorre, os quais cita-se:

- externa: se o termo adicionado à função objetivo é nulo em pontos viáveis e é positivo em pontos não viáveis, ou seja, a função objetivo é penalizada em pontos não viáveis e não penalizada em pontos viáveis e pode ser:
 - quadrática: foi desenvolvido inicialmente para tratar de restrições de igualdade. Mais tarde foi estendida para as demais restrições. Usa uma função quadrática multiplicada por um parâmetro de penalização;
 - exato: é um caso particular da penalização externa que se utiliza de um parâmetro penalizador suficientemente grande e fixo e permite a recuperação exata de uma solução do problema original.
- interna: se o termo adicionado à função objetivo tende a mais infinito quando pontos viáveis se aproximam da fronteira do conjunto viável do problema. É também chamado de método de barreira uma vez que não permite que soluções viáveis saiam do conjunto viável e o parâmetro escalar deve decrescer a zero, ou seja, assume valores pequenos.

Segundo [15] as técnicas de otimização de penalização quadrática e das lagrangianas aumentadas introduzem variáveis de folga nas restrições de desigualdade e são métodos eficientes que não levam a resultados mais fracos do que considerando as desigualdades diretamente.

No método de penalização quadrática transforma o problema com somente restrições de igualdade do tipo:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a:} && h(x) = 0 \\ & && g(x) + t^2 = 0 \end{aligned}$$

A partir de então, a função de penalização pode ser descrita como:

$$\text{minimizar } \psi(x, t) = f(x) + \frac{c}{2}(|h(x)|^2 + \sum_{i=1}^m (g_i(x) + t_i^2)^2)$$

O método das lagrangianas aumentadas é derivado do conceito de penalização quadrática. Acrescentando-se um termo de penalização diferenciável, nesse caso quadrático, faz com que se evite o crescimento ilimitado do parâmetro de penalização.

Desta forma, uma família de lagrangianas aumentadas para restrições de igualdade a seguir onde $c > 0$ é o parâmetro penalizador e $\langle \lambda, h(x) \rangle$ é o produto interno entre λ e $h(x)$.

$$L(x, \lambda; c) = L(x, \lambda) + \frac{c}{2} \|h(x)\|^2$$

$$L(x, \lambda; c) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle + \frac{c}{2} \|h(x)\|^2$$

E para as restrições mistas:

$$L((x, t), (\lambda, \mu); c) = L((x, t), (\lambda, \mu) + \frac{c}{2} (\|h(x)\|^2 + \sum_{i=1}^m (g_i(x) + t_i^2)^2)$$

Reescrevendo, a função lagrangiana aumenta para restrições mistas é:

$$L((x), (\lambda, \mu); c) = f(x) + \frac{c}{2} \left(\sum_{i=1}^m h_i(x) + \frac{\lambda_i}{c} \right) + \frac{c}{2} \left(\sum_{i=1}^m g_i(x) + \frac{\mu_i}{c} \right)^+ \quad (2.16)$$

O algoritmo, em linhas gerais, funciona da seguinte maneira:

- escolher $\lambda^0 \in \mathbb{R}$, $\mu^0 \in \mathbb{R}_+$ e $c^0 > 0$ para $k = 0$;
- calcular x^k em 2.16 com $c = c^k$, $\lambda = \lambda^k$ e $\mu = \mu^k$;
- calcular $\lambda^{k+1} = \lambda^k + c^k h(x^k)$, $\mu_i^{k+1} = \max \{0, c_k g_i(x^k) + \mu_i^k\}$ e escolher $c^{k+1} \geq c^k$;
- tomar $k = k + 1$ e retornar até atingir algum critério de parada.

Andreani *et al* apresentam em [7] e [8] o detalhamento do resolvidor ALGENCAN que usa o método das lagrangianas aumentadas e o compara com o resolvidor IPOPT.

2.1.1.6 Problemas não lineares com variáveis inteiras

Wolsey [16] descreve diversos tipos de problemas inteiros como i) misto-inteiro: com variáveis contínuas e discretas, ii) inteiro: com somente variáveis discretas, iii) binário: com variáveis inteiras binárias (0, 1) ou iv) otimização combinatória: uma variação especial dos casos anteriores com subconjuntos viáveis dentro de um conjunto finito de possibilidades.

Segundo Belotti *et al.* [17] os problemas que possuem variáveis inteiras ou discretas, os MINLP, são problemas considerados NP-difíceis e incluem simultaneamente NLP e MILP nos subproblemas. Pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a:} && g(x) \leq 0 \\ & && h(x) = 0 \\ & && x \in \mathbb{R}^n \\ & && x_i \in \mathbb{Z}^n, \forall i \in I \end{aligned}$$

Estes problemas trazem à tona o conceito de relaxação. A relaxação é usada para encontrar uma solução que corresponde ao limite inferior ou limitante dual ou *lower bound* por meio de um problema de mais fácil resolução que o original. A relaxação mais comum é a de integralidade onde as variáveis passam a ser consideradas contínuas no subproblema relaxado.

O limitante primal ou limitante superior ou *upper bound* pode ser qualquer ponto viável para o problema principal e o objetivo do MINLP é encontrar uma diferença ou *gap* mínimo aceitável entre os limitante primal e dual

O algoritmo de *Branch-and-Bound* ou de ramificação e poda foi introduzido por Land e Doig [18] e é o mais comumente utilizado para resolução de problemas inteiros.

2.1.1.6.1 O algoritmo de *Branch-and-Bound*: é uma das mais importantes técnicas de programação inteira nos dias atuais incluindo seus derivados *branch-and-cut* e *branch-and-price*, Melo [19].

Trata-se de uma técnica de enumeração por meio de uma árvore onde cada ramificação representa um subproblema do problema principal e cada ramo da árvore, uma nova restrição que deve ser considerada, Lobato [20].

Em outras palavras, consiste em enumerar implicitamente todas as soluções possíveis para o problema por meio da partição do conjunto de soluções em subconjuntos disjuntos. Resolve-se estes subproblemas e combina-se as soluções para se obter a solução do problema original.

A enumeração implícita ocorre ao se utilizar os limitantes memorizados ao longo

da resolução dos subproblemas para podar os ramos da árvore que não possuem solução ótima encontrada. Ou seja, o conjunto de soluções é decomposto e a cada ramificação ou *branching* em cada nó os limitantes duais, que foram obtidos pela relaxação linear, e os limitantes primais, obtidos pela solução ótima do ramo, são atualizados.

De acordo com [16], um nó é amadurecido se houver poda por:

- otimalidade: as soluções encontradas são ótimas inteiras no ramo e viáveis para o problema original, então os limitantes duais são iguais aos primais;
- inviabilidade: se não existe solução viável para o subproblema relaxado, então não há solução viável para o problema original;
- dominação: se o valor da relaxação no nó k não fornece um limitante dual melhor para o problema original, então as soluções subsequentes a esse nó serão sub-ótimas, portanto devem ser eliminadas ou podadas uma vez que não haverá resultados melhores para o problema original.

O objetivo é prosseguir até que todos os nós ativos sejam esvaziados e, portanto, todas as ramificações tenham nós amadurecidos. Normalmente a regra de ramificação é definida pela variável mais fracionária. Além disso, cabe ressaltar que se deve definir uma estratégia de busca na árvore, ou seja, definir por qual nó explorar a árvore:

- busca por largura: percorre todos os nós em cada nível de *branching*;
- busca por profundidade: percorre um lado da árvore de cada vez;
- busca pelo melhor limitante dual encontrado.

A figura 2.2 ilustra um pequeno exemplo de uma árvore de *branch-and-bound* com busca por profundidade à esquerda.

A cada iteração as informações armazenadas são aquelas relativas aos nós ativos: limitantes superior e inferior em cada nó das variáveis; limitantes duais encontrados em cada nó; limitantes primais globais que permitem podar os demais por dominância e a base ótima para acelerar a reotimização.

Os critérios de parada são:

- todos os nós amadurecidos;
- algoritmo para por falta de memória devido à quantidade de nós ainda ativos;
- limite máximo de iterações foi atingido e ainda não há soluções viáveis encontradas;

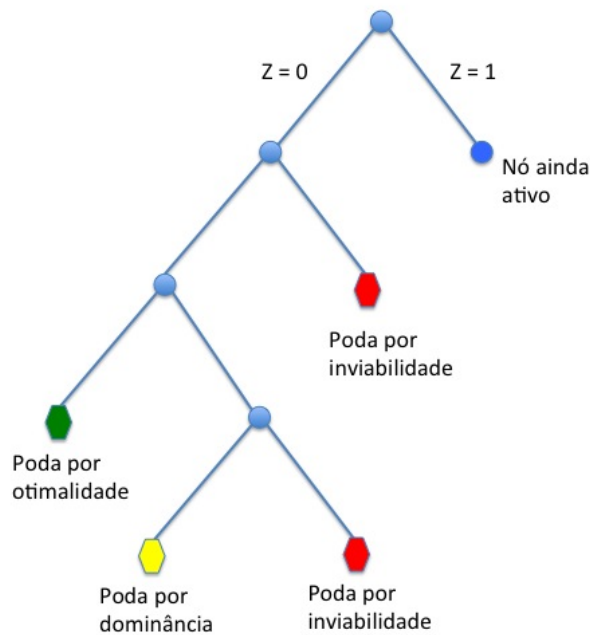


Figura 2.2: Exemplo de uma árvore de *branch-and-bound*

- *gaps* grandes entre limitantes primal e dual ao final do limite máximo de iterações.

Caso os limitantes primais ainda não melhorem ao longo da execução do algoritmo, o uso de heurísticas pode ajudar. No entanto, se os limitantes duais é que não melhoram, então deve-se reavaliar o modelo.

Outra alternativa para se melhorar os limitantes duais e permitir encontrar as soluções mais rapidamente é usar a relaxação lagrangiana, o método de geração de colunas, ou até mesmo, o algoritmo de *branch-and-cut* para adicionar restrições ou cortes para permitir que o modelo esteja mais próximo da região convexa viável.

Neste trabalho o algoritmo de *branch-and-bound* será utilizado para resolver o MINLP e em cada nó da árvore o método das lagrangianas aumentas será usado em cada nó da árvore para solucionar o NLP correspondente.

2.2 Otimização em Finanças

Desde que Harry Markowitz [2] publicou seu trabalho na década de 50, uma gama de estudos em Finanças foram desencadeados a partir de então. Os modelos variam desde os mais simples como lineares passando por lineares mistos-inteiros, não lineares, não lineares mistos-inteiros até aos modelos estocásticos conforme [21].

Em seu trabalho, Markowitz sintetizou em um modelo a relação entre o binômio risco e retorno permitindo-se perceber o *trade-off* existente entre eles. Trata-se de

um problema de seleção ou de alocação de recursos para montagem de uma carteira utilizando-se de instrumentos estatísticos de média e de variância.

Batizado de Modelo de Média-Variância ou de Variância Mínima, o modelo faz a seleção ótima de um conjunto de oportunidades de investimento visando obter um mínimo retorno com o menor risco possível, medido pela variância.

Assim, um investidor deseja escolher opções de investimento num universo de N instrumentos disponíveis conhecendo o vetor de retornos dos instrumentos, neste caso ações, e o o vetor de retornos esperados:

$$r_i = (r_1, r_2, \dots, r_N)^T$$

$$E(r) = (E(r_1), E(r_2), \dots, E(r_N))^T$$

A alocação ótima será obtida por meio do vetor de alocação definido por:

$$x_i = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$$

De tal forma que a soma dessas alocações não exceda o capital disponível.

O retorno esperado da carteira será:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^N x_i E(r_i) = x^T E(r)$$

A medida de risco da carteira é representada pela variância dos retornos:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i,j=1}^N x_i x_j \text{cov}(r_i, r_j) = x^T \Sigma x$$

Finalmente, o modelo de Markowitz para minimizar o risco e obter um retorno de, pelo menos, R definido pelo investidor é descrito por:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && x^T \Sigma x \\ &\text{sujeito a:} && \\ &&& \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\ &&& \mu_p \geq R \end{aligned} \tag{2.17}$$

Pelo modelo (2.17), Markowitz verificou que a diversificação dos investimentos diminui o risco da carteira. Isso significa que a variância da carteira diminui ao ser investir em mais ativos. No entanto, salienta que não pode ser totalmente eliminada.

O modelo é versátil e pode ser facilmente modificado para ser observado pelo viés de maximização de retornos a um nível de risco mínimo imposto pelo investidor. Além disso o modelo pode, inclusive, incorporar diversas restrições adicionais. No entanto, foi considerado ultrapassado pelo fato de considerar a variância como

medida de risco. Assim, outras medidas de risco foram substituídas ao modelo original VaR (*Value at Risk*) e o (*Conditional or Average Value at Risk*).

Como se trata de um problema de otimização não linear quadrática, alguns autores propuseram uma modelagem alternativa para utilização em forma linear como é o modelo discutido por Young em [22], chamado de modelo max-min, dado por:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } z \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad \sum_{i=1}^N r_{it}x_i \geq z, \quad t = 1, \dots, T \\ &\quad \sum_{i=1}^N x_i = 1 \end{aligned}$$

Em que z representa o retorno mínimo requerido a ser obtido, o retorno do ativo i no tempo t é r_{it} e x_i é o peso ou porcentagem do capital investido no ativo i .

Já no modelo MAD (*Mean Absolute Deviation*) desenvolvido por Konno and Yamazaki [23], a medida de risco é o desvio médio absoluto e é uma melhor alternativa ao modelo max-min:

$$|\sigma| = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{i=1}^N (r_{it} - \mu_i)x_i \right|$$

No entanto, como a função é não linear, apresentaram uma linearização onde:

$$y_t = \left| \sum_{i=1}^N (r_{it} - \mu_i)x_i \right|$$

Dessa forma, o modelo pode ser usado para resolução de problemas em larga escala por ser um problema de linear de fácil resolução, conforme indicado abaixo:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad y_t + \sum_{i=1}^N (r_{it} - \mu_i)x_i \geq 0 \\ &\quad y_t - \sum_{i=1}^N (r_{it} - \mu_i)x_i \geq 0 \\ &\quad \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\ &\quad \mu_p \geq R \\ &\quad y_t \geq 0 \end{aligned}$$

De acordo com o estudo de Mangram [24] sobre Markowitz, a Teoria Moderna do Portfólio foi iniciada por Markowitz e, posteriormente, aprimorada por William Sharpe em 1964 [25] contemplando os conceitos de CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) e CML (*Capital Market Line*).

Para Sharpe, caso se utilizasse de um ativo livre de risco em meio aos demais ativos do modelo de Markowitz, o ponto ótimo entre risco e retorno da carteira se alteraria. O ponto ótimo seria definido pelo encontro entre a reta, cuja origem é o ponto de retorno esperado do ativo livre de risco, e a curva de risco x retorno,

chamada de fronteira de eficiência. Essa taxa entre risco e retorno no ponto ótimo é chamada de taxa de Sharpe ou índice de Sharpe.

O modelo que utilizar o índice de Sharpe como objetivo também é chamado de portfólio tangente e pode ser definido por:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \frac{\mu^T - r_f}{(x^T \Sigma x)^{1/2}} \\ &\text{sujeito a:} && \\ &&& \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\ &&& \mu_p \geq R \end{aligned}$$

Trata-se de uma otimização não linear cuja função objetivo é não convexa, portanto de difícil resolução. Alguns autores propuseram alternativas para contornar o problema da não convexidade para resolver este modelo.

Tutuncu e Koenig propuseram em [26] o chamado *robust portfolio optimization* que considera de forma simultânea a maximização do retorno e minimização do risco da carteira usando um parâmetro λ que define o *trade-off* entre eles:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && -\mu^T x + \lambda x^T \Sigma x \\ &\text{sujeito a:} && \\ &&& \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\ &&& \mu_p \geq R \end{aligned}$$

Evidentemente, a carteira ótima será distinta para cada investidor em função do valor do parâmetro λ que define seu nível de aversão ou propensão ao risco.

Assim como a limitação do modelo original de Markowitz, o modelo robusto também é sensível aos valores de entrada dos retornos e da matriz de covariância, isto é, os resultados podem mudar completamente com uma pequena variação dos dados.

Este fato é deveras penoso ao investidor uma vez que, dado uma periodicidade de rebalanceamento da carteira, os custos de transação podem ser significativamente altos haja vista que o resultado do modelo pode ser completamente diferente do anterior.

2.2.1 Medidas de Risco

Conforme visto anteriormente, desde a concepção do modelo tradicional de Markowitz de média-variância ou MVA - *mean-variance analysis* a variância foi a principal medida de risco. Depois de sete anos desta publicação, em 1959, o próprio Markowitz destacou em [27] que a variância penaliza da mesma forma tanto a variação positiva quanto a negativa dos retornos e é incapaz de capturar eventos de baixa probabilidade de ocorrência, [28].

Nesse sentido o conceito de *downside risk* veio à tona e está preocupado somente com as variações negativas do retorno esperado da carteira. A primeira medida indicada por Markowitz foi a semi-variância, a qual verifica a variação abaixo do retorno esperado.

Em meado da década de 70, outra medida de *downside* foi elaborada: o *Lower Partial Moment* - LPM, [29] e [30]. Segundo [31], LPM foi a primeira medida de risco que estabelece um retorno mínimo tolerável pelo investidor dado um nível de aversão ao risco.

Cerca de 20 anos após a divulgação do LPM, surgiu o conceito de VaR uma vez que as instituições financeiras começaram a adotá-lo como medida de risco e, partir de então, ganhou bastante visibilidade principalmente após a divulgação do Acordo de Basileia II em 2004.

Segundo Hafsa [28], o principal objetivo de VaR é definir a máxima perda esperada em um investimento sobre um horizonte de tempo dado um certo nível de confiança de forma a sintetizar em um número todas as informações sobre as perdas possíveis de uma distribuição não normal do retorno do investimento.

Apesar de ainda vigorar a estimação de VaR como medida de risco para as instituições financeiras pelo Acordo de Basileia, já se sabe que ele não é considerado uma medida coerente de risco. Em seu trabalho Artzer *et al* [32] apresentou os conceitos de medida coerente de risco e identificou que VaR não atende a propriedade de subaditividade, ou seja, VaR não diminui ao se aumentar a diversificação dos investimentos.

Deste modo, AVaR tem ganhado maior visibilidade nos últimos tempos desde que Rockeafellar e Uryasev em 2000 [33] e 2002 [34] introduziram este conceito.

Para Hafsa [28], AVaR quantifica a perda que excede VaR atuando como um limitante superior para VaR e iguala a média de algumas porcentagens de piores casos de perdas dos cenários propostos. Além disso, AVaR atende a todas as propriedades de uma medida coerente de risco.

Seja $f(x, r)$ a função que representa as perdas possíveis de um investimento, x a variável de decisão de alocação ótima de uma carteira e r um vetor aleatório dos retornos, então:

$$f(x, r) = -[x_1r_1 + x_2r_2 + \dots + x_jr_j] = -x^T r$$

Se $d(r)$ é a função densidade de probabilidade de $f(x, r)$, então a probabilidade de $f(x, r)$ não exceder a uma perda u é:

$$\Psi(x, u) = \int_{f(x, r) \leq u} p(r) dr$$

Assumindo $\Psi(x, u)$ é não-decrescente e contínua em respeito a u , logo o VaR de

uma carteira a um nível de confiança $\theta \in (0, 1)$ é definido como:

$$VaR_\theta(x) = \min \{u \in R : \Psi(x, u) \geq \theta\}$$

Nesse sentido, o AVaR correspondente é:

$$AVaR_\theta = E(f(x, r) | f(x, r) \geq VaR_\theta) = \min(u + \frac{1}{1-\theta} E([f(x, r) - u]^+))$$

Cuja expressão equivalente definida por Rockafellar e Uryasev [34] é:

$$AVaR_\theta = \frac{1}{1-\theta} \int_{f(x, r) \geq VaR_\theta} f(x, r) p(r) dr$$

A integral pode ser aproximada fazendo amostras de distribuição de probabilidades de r de acordo com cada cenário j cuja probabilidade é π_j . Assim a expressão se torna:

$$AVaR_\theta = \min(u + \frac{1}{1-\theta} \sum_{j=1}^J \pi_j z_j)$$

Onde:

$$z_j = \max(f(x, r) - u, 0) = [f(x, r) - u]^+$$

Considerando a ocorrência dos cenários como equiprováveis, então a expressão final convexa e linear por partes é:

$$AVaR_\theta = \min(u + \frac{1}{J(1-\theta)} \sum_{j=1}^J z_j)$$

Onde:

$$z_j = [f(x, r) - u]^+$$

(2.18)

O exposto acima indica que a programação não linear vem sendo muito utilizada em Finanças. Cabe, portanto, verificar a aplicabilidade de um modelo não linear de forma que seja desenvolvido para aplicação em grande escala a fim de ser espelho da realidade.

Neste trabalho, os modelos de otimização visam a geração de uma carteira neutra ao mercado que permite *long-short position* usando programação não linear mista-inteira.

2.3 Gerenciamento de Carteiras

Uma vez obtidos os resultados ótimos quer seja por meio de uma otimização quer seja por outros métodos, se faz necessário realizar a gestão da carteira obtida.

Para Levisauskaite [35], há dois tipos de gerenciamento de carteiras: passivo e ativo. Enquanto a forma passiva de gerenciar é aquela que realiza poucas verificações e mudanças e normalmente não acompanha o desempenho do *benchmark*; a forma

ativa de gerenciar é justamente a forma oposta. A forma de gerenciamento pode ser crucial para o desempenho final da carteira.

O acompanhamento do desempenho da carteira é fundamental. Assim como as empresas acompanham o desempenho de seus processos, os gestores de carteira devem seguir na mesma direção e, se necessário, realizar revisões na estratégia.

Ainda segundo Levisauskaite [35], há pelo menos duas áreas a serem monitoradas pelos gestores: condições de mercado e circunstâncias do próprio gestor. Em função da imensa quantidade de variáveis que influenciam o preço dos ativos, é evidente que o gestor deve sempre avaliar as condições de mercado usando os indicadores macroeconômicos disponíveis. Já a segunda área é importante em casos de necessidades pessoais, mudanças nas taxas e custos envolvidos além de mudanças em questões legais que possam afetar os investimentos.

O processo mais difundido a respeito de monitoramento e revisão das carteiras é o rebalanceamento cuja finalidade é ajustar a carteira às condições originais de forma periódica. O rebalanceamento pode reduzir perdas significativas e é praticada pelos gestores ativos.

Assim como em qualquer gestão, o acompanhamento deve ser realizado envolvendo indicadores de performance ou de desempenho. Especificamente para gerenciamento de carteiras, é possível utilizar um método chamado de *Backtesting* para calibrar a carteira, isto é, verificar se a estratégia usada no passado será válida no futuro.

2.3.1 A Avaliação de Desempenho e os Indicadores de Desempenho de Carteiras

A avaliação de desempenho visa comparar os resultados obtidos com os resultados desejados ou planejados. Já a gestão de desempenho engloba não somente a avaliação, mas também o planejamento e o acompanhamento do desempenho.

A avaliação de desempenho é um assunto que desperta o interesse de muitos gestores uma vez que é essencial para o bom andamento das atividades. Os indicadores são as saídas de um processo e permitem, através de uma informação quantitativa, mostrar declarações resumidas e concisas do desempenho desse processo ou de um projeto ou de uma atividade e até mesmo da organização como um todo.

No âmbito organizacional, Kaplan e Norton (1992) [36] relatam que os sistemas de medição de desempenho são considerados elementos centrais no sistema de gestão devendo apresentar coerência e alinhamento com os objetivos estratégicos e consequentes estratégicas adotadas para o alcance dos objetivos.

Com uma medição de desempenho confiável e de qualidade, torna-se, então possível, a tomada de ações corretivas por parte do corpo gerencial e ainda efetuar

ações preventivas quando se analisa os indicadores que apresentam tendência, possibilitando assim, tomar ações antes que algo saia fora do planejado.

Segundo Cantarino (2003) [37], indicador consiste numa informação útil para tomada de decisão. São ferramentas de controle e gestão que proporcionam subsídios à tomada de decisão, com base em informações importantes e resumidas em declarações concisas e ilustrativas. Eles não mais são que o resumo, ilustrado através de um valor quantitativo, do desempenho de um processo e que gera informações pontuais e tendenciais no intuito de auxiliar na tomada de decisões.

Em avaliação de desempenho, indicadores são usados para monitoramento e acompanhamento de pessoas, processos, empresas e até da performance sócio-econômica de países. Afinal, “o que não é medido não é gerenciado” (KAPLAN; NORTON, 1997, [36]).

Segundo Slack *et al.* (2002) [38] para que os gerentes possam promover o melhoramento de suas operações, eles devem medir o desempenho delas. Medida tem a ver com “quantificação” do desempenho de forma a saber o quanto está o atual desempenho para promover melhorias, se necessário.

Indicador é, portanto, um instrumento utilizado para se realizar a medida do desempenho representado por um padrão ou unidade de medida. Ele é obtido por uma fórmula que calcula o índice, ou seja, a fórmula é personificação da metodologia da medida do indicador. A avaliação dos indicadores deve ser feita por um índice de referencia ou limite chamado meta (Moreira, 2002, [39]).

Para Silva (2008) [40] a medição de desempenho pode ser definida como um processo ou conjunto de métricas para se quantificar a eficiência e efetividade de uma ação.

Existem inúmeros indicadores, com diversas metodologias e com várias finalidades. Eles são métricas para avaliação de custos, prazo, qualidade, avaliações operacionais e financeiras (indicadores operacionais e financeiros) dentre outros.

Em termos de gerenciamento de carteiras de investimento, é de suma importância não somente medir o desempenho em função do retorno obtido, mas também em relação ao risco experimentado pelo investidor para se obter esse retorno, (Levi-sauskaite, 2010).

Em se tratando de retorno ou ganho obtido pela carteira ao final de um período sem considerar os riscos, os indicadores mais usados são: (i) ganho percentual da carteira, (ii) retorno médio da carteira (iii) excesso de retorno - *excess return* ou alfa (iv) valor da carteira ao longo do período.

O ganho percentual da carteira pode ser obtido simplesmente por:

$$\text{ganho} = \frac{\text{Valor Final da Carteira} - \text{Valor Inicial da Carteira}}{\text{Valor Inicial da Carteira}} \quad (2.19)$$

Enquanto que o retorno médio, nada mais é do que a média aritmética ou geométrica dos retornos ao longo do período. No entanto, o alfa da carteira é o ganho do retorno da carteira (r_p) sobre o *benchmark* ou retorno do mercado (r_m):

$$\alpha_p = r_p - r_m$$

Como já relatado anteriormente, há um *trade-off* entre risco e retorno. Os indicadores anteriormente mencionados não medem o “esforço” para se conseguir o ganho ou retorno ao final do período. Essa medida de “esforço” pode ser entendida como quanto risco se tomou para se obter o resultado final.

Essa medida relativa entre risco e retorno é importante; pois, uma vez que se houver a possibilidade de se obter um resultado semelhante ao final do período sem ter que correr riscos, seria preferível não ter corrido o risco. As medidas que consideram risco e retorno são chamadas de medidas ajustadas ao risco.

Véronique Le Sourd em [41] relacionou várias medidas de desempenho dividindo-as em categorias das quais citam-se as principais:

- medidas de desempenho absolutas ajustadas ao risco: índice de Sharpe, índice de Treynor, índices baseados em VaR;
- medidas de desempenho relativas ajustadas ao risco: índice alfa de Jensen, índice de Informação, índice de Modigliani, etc;
- medidas de desempenho baseadas em *downside risk* e *higher moments*: índice de Sortino, índice Fouse, índice de Sharpe simétrico de *downside risk*, Ômega;
- medidas de desempenho usando beta condicional;
- medidas de desempenho que não dependem do modelo de mercado: Medida de Cornel, Medida de Pesagem dos Períodos Positivos.

Para Bacon [42] as medidas de desempenho podem ser categorizadas da seguinte forma:

- Normal: Índice de Sharpe, Índice de Informação;
- Regressão: Índice de Treynor;
- Altos e Baixos Momentos Parciais: Índice de Sortino;
- Value-at-Risk: Índice de Sharpe Condicional.

A principal consideração de Le Sourd [41] sobre os indicadores é relativa à escolha adequada do *benchmark*. Como grande parte dos indicadores compararam o

desempenho em relação ao *benchmark*, é importante atentar para sua correta seleção uma vez que o desempenho pode parecer distorcido.

Dentre todas as medidas ajustadas ao risco citadas anteriormente, destaca-se:

- **Índice de Sharpe** (*Sharpe's ratio*): Estabelecido por William Sharpe, [25], representa a medida do retorno obtido em relação ao retorno do ativo livre de risco, ou seja o chamado prêmio ao risco ou *risk premium* - RP , por unidade de risco total medido pelo desvio padrão do retorno da carteira.

$$RP = r_p - r_f$$

$$SR = \frac{RP}{\sigma_p} \quad (2.20)$$

De acordo com o levantamento realizado por Ghosh e Mahanti, 2014 [43], o índice de Sharpe é a medida de desempenho mais utilizada em artigos científicos publicados entre 2009 e 2014.

- **Índice de Treynor** (*Treynor's ratio*): Segundo [44], é a medida do retorno em relação ao ativo livre de risco por unidade de risco, assim como o índice de Sharpe; no entanto o usado é o risco sistemático, representado por beta:

$$TR = \frac{r_p - r_f}{\beta_p} \quad (2.21)$$

A definição de beta de uma carteira está no próximo capítulo.

- **Índice Alfa de Jensen** (*Jensen's Alpha*): De acordo com [45], é a medida de quanto se agregou à carteira em relação ao *benchmark* levando em consideração o risco mensurado por beta:

$$\alpha = (r_p - r_f) - \beta_p(r_m - r_f) \quad (2.22)$$

Ronald Moy 2002 [46] realizou uma comparação entre as medidas de Sharpe e de Jensen e elucidou, por meio de exemplos gráficos, que os *rankings* entre as carteiras podem ser diferentes mesmo utilizando-se do mesmo índice de referência. Este fato ocorre principalmente pela diferença entre as medidas de risco utilizadas.

A diferença no *ranking* pode ocorrer em função do efeito da diversificação que o risco sistemático beta pode medir melhor que o desvio-padrão. Segundo ele, carteiras mais diversificadas tendem a possuir maiores alfas e, por consequência, índice de alfa de Jensen maior e baixo índice de Sharpe. E a carteira com índice de Sharpe alto indica baixa diversificação.

- **Índice de Sortino** (*Sortino's ratio*): Proposto por Sortino e Van der Meer em 1991 [47], esse índice se utiliza do conceito de *downside risk*, ou seja, o risco de que o retorno esperado esteja abaixo do mínimo aceitável pelo investidor.

$$Sortino = \frac{(r_p - r_{min})}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (r_{pt} - r_{min})^2}}, r_{pt} < r_{min} \quad (2.23)$$

Para Capitani, 2012 [48] as medidas de Sortino e Omega podem ser consideradas descendentes da medida de Sharpe. A maior crítica sobre o índice de Sharpe é que ele confere pesos iguais à ativos com volatilidade acima da média considerando-os “ruins”. Em contrapartida, Sortino considera somente a volatilidade abaixo da média, ou seja, a volatilidade do *downside risk*.

- **Índice de Modigliani** (*Modigliani Risk Adjustment Performance Measure - M²*): Segundo [41], expressa a medida de performance de risco ajustada de uma carteira em relação ao *benchmark*.

$$M^2 = \frac{\sigma_m}{\sigma_p} (r_p - r_f) - (r_m - r_f) \quad (2.24)$$

- **Índice de Informação** (*Information Ratio*): Consiste na medição do excesso de retorno em relação ao *tracking error*, ou seja, verifica quão a carteira está acompanhando o *benchmark*.

$$TE = \sqrt{var(r_p - r_m)} \quad (2.25)$$

$$IR = \frac{(r_p - r_m)}{TE} \quad (2.26)$$

Bossert *et al.* 2010 [49] avaliaram a aplicabilidade e confiabilidade do índice de informação como medida de desempenho importante de gestores de *Mutual Funds*. Elaborou uma escala baseada em quantis com diversos índices obtidos de forma a verificar eficiência dos Fundos considerando-os como muito bons a muito ruins. Os considerados muito bons estão acima da média com índices de 0,1 - 1,5.

- **Índice de Sharpe Condicional** (*Conditional Sharpe Ratio - CSR*): Caso a medida de risco selecionada seja o AVaR, os indicadores acima podem não ser suficientemente adequados. Começou a ser usado no trabalho de Argawal e Naik [50], depois por Wiesinger [51] e por Chow e Lai [52] onde apresentaram uma alteração no índice de sharpe para contemplar o AVaR como segue:

$$CSR = \frac{r_p - r_f}{AVaR} \quad (2.27)$$

Notação:

- r_p : retorno esperado da carteira;
- r_f : retorno esperado do ativo livre de risco;
- r_m : retorno esperado do *benchmark*;
- σ_p : desvio padrão da carteira;
- r_{min} : retorno esperado mínimo requerido pelo investidor;
- r_{pt} : retorno da carteira para cada período t ;
- r_{adj} : retorno esperado ajustado ao risco;
- TE : *tracking error*.

2.3.2 Backtesting

Segundo [53], *backtesting* é um método comumente usado para avaliar a performance de uma carteira usando os dados históricos com uma estratégia preestabelecida. Já [54] relata que *backtesting* é uma ferramenta de gerenciamento de carteiras usado frequentemente para comparar diversos modelos.

A comparação ou a simples avaliação de uma carteira pode ser realizada por meio de vários indicadores que o backtest é capaz de avaliar como: retorno obtido, risco incorrido, quantificação das perdas e ganhos da carteira, etc.

De uma forma geral, os *backtests* podem ser divididos em dois tipos: o estático e o dinâmico. No estático, a carteira é avaliada ao longo de todo histórico de dados usando as alocações aos ativos de forma fixa, ou seja, os pesos dos ativos não varia ao longo do teste. No *backtest* dinâmico, é considerada a alternativa de rebalanceamento em um período predeterminado durante a realização do teste ao percorrer os dados históricos. Desta maneira, os pesos são constantemente reavaliados ao longo da janela de avaliação sempre buscando atingir a estratégia previamente determinada.

O *backtesting* é, portanto, uma ferramenta capaz de proporcionar ao gestor da carteira uma visão de sua estratégia caso se tenha alterações nos preços e/ou retornos dos ativos. É considerada uma ferramenta de avaliação de risco de uma carteira e, de acordo com [55] é recomendada pelo Acordo de Basileia para avaliar quantos dias no último ano a perda da carteira de uma instituição financeira foi maior que a medida de risco obtida por seus modelos.

Neste trabalho, o *backtesting* será realizado sobre os modelos propostos no Capítulo 5 com objetivo de se verificar o comportamento da carteira ao longo do tempo, ou seja, se a carteira de fato se mostra neutra ao mercado ao longo do tempo. Portanto, se a carteira apresentar neutralidade ao mercado durante esse período de

testes, espera-se que ela venha a apresentar o mesmo comportamento por um período semelhante, isto é, apresente uma propriedade chamada de estabilidade temporal.

Capítulo 3

Carteiras Neutras ao Mercado

Uma carteira que exiba performance independente do desempenho do mercado é dita neutra ao mercado ou não-direcional, isto é, o objetivo desta carteira é obter lucros ao investidor sob qualquer circunstância de mercado a fim de minimizar o risco de um investimento.

Esta estratégia é comumente usada por Fundos de Pensão, *Hedge Funds* e outros fundos classificados como *Funds Managers*. Os administradores destes Fundos visam minimizar os riscos dos investimentos de seus clientes, portanto sua estratégia deve ser neutra às oscilações de mercado.

Evidentemente que na medida em que se deseje retornos maiores, deve-se incorrer a maiores riscos. Face à esta realidade, a minimização de riscos destes Fundos de Investimentos é limitada dependendo da propensão ao risco do cliente. Assim, alguns Fundos de Investimentos podem não ser completamente neutros ao mercado.

Neste capítulo, serão discutidos e apresentados os conceitos de neutralidade e sua forma de obtenção. Ademais, serão apresentados alguns conceitos fundamentais para enraizamento dos conceitos que circundam a neutralidade.

3.1 CAPM

O Modelo de Apreçamento de Ativos de Capital ou CAPM foi desenvolvido por Sharpe como alternativa ao modelo de Markowitz introduzindo o conceito do risco não sistemático medido pelo beta.

O CAPM propõe uma metodologia de precificação dos ativos em função somente do risco sistemático haja vista que o risco não sistemático é irrelevante, pois poderia ser eliminado com a diversificação. Portanto, relaciona risco e retorno de uma carteira diversificada.

O retorno do investimento requerido deve ser equivalente ao risco intrínseco assumido ou seja deve ser superior a um investimento que seja considerado sem risco a fim de se valer à pena correr o risco de se investir, chamado prêmio ao risco.

O risco sistemático ou beta representa a inclinação da reta de uma regressão linear entre as variáveis retorno esperado do ativo i no tempo t e o retorno do índice de mercado chamado de *benchmark* no tempo t . A equação (3.1) indica a relação entre as variáveis e o beta, onde α_0 representa a interseção da reta no eixo r_{it} e e_{it} representa o resíduo.

$$r_{it} = \alpha_0 + \beta_i R_t + e_{it} \quad (3.1)$$

tal que:

$$\beta_i = \rho_{(r_{it}, R_t)} \frac{\sigma_{r_{it}}}{\sigma_{R_t}} \quad (3.2)$$

Substituindo o valor de $\rho_{(r_{it}, R_t)}$, tem-se:

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(r_{it}, R_t)}{\sigma_{R_t} \times \sigma_{r_{it}}} \times \frac{\sigma_{r_{it}}}{\sigma_{R_t}} = \frac{\text{cov}(r_{it}, R_t)}{\text{var}(R_t)} \quad (3.3)$$

Então, se $\beta_i < 1$ tem-se correlações baixas com o *benchmark*. Já para $\beta_i > 1$ tem-se correlações altas com o *benchmark* e se $\beta_i = 1$ o ativo se comporta conforme o mercado. No entanto, se $\beta_i = 0$ o ativo é dito neutro ao mercado, isto é, seu comportamento é independente do comportamento do mercado.

Conforme apresentado em 2.3.1, o chamado prêmio ao risco é a diferença entre o retorno esperado da carteira r_p e o ativo livre de risco r_f . O CAPM propõe uma métrica para saber se um investidor estaria disposto a incorrer riscos investindo em ativos arriscados ou simplesmente em um ativo livre de risco de forma a receber o prêmio. A relação é dada por:

$$E(r_{it}) = r_f + \beta_i(E(R_t) - r_f) \quad (3.4)$$

A equação (3.4) retrata a essência do CAPM: quanto mais o investidor estiver disposto a incorrer a riscos sistêmicos, maior será o retorno esperado do investimento.

O CAPM parte de alguns pressupostos e recebe várias críticas:

- o mercado é considerado perfeito, ou seja, não considera custos de transação e taxas além de todos terem acesso às mesmas informações e mesmo acesso a crédito;
- os investidores seguem os pensamentos de Markowitz, isto é, só incorrem a maiores riscos se houver esperança de retornos suficientemente atraentes para tal;
- todos os ativos estão disponíveis para negociação;
- variância como medida de risco e retornos normalmente distribuídos.

Apesar das críticas, o CAPM continua sendo muito utilizado inclusive como medida de desempenho de uma carteira.

3.2 Conceito de Neutralidade

O risco sistemático medido pelo beta da carteira é uma medida de risco a que todas as empresas que compõem o mercado de ações estão sujeitas, cada uma com um nível de intensidade. Em contrapartida, os riscos não sistemáticos são aqueles a que somente um empresa ou um grupo de empresas pertencentes a um setor da economia em específico está sujeita.

Portanto, pode-se verificar que a mitigação de riscos não sistemáticos pode ser obtida ao se diversificar os investimentos, no entanto para os riscos sistemáticos essa realidade não é factível.

Seja uma carteira formada por N ativos, tem-se que a proporção ou peso do capital investido no ativo i em relação ao capital total disponível é w_i e o beta de cada ativo i como β_i ; então o beta da carteira pode ser definida pela equação conforme (3.5). Trata-se, portanto, da soma ponderada dos betas individuais de cada um dos ativos que fazem parte da carteira.

$$\beta_p = \sum_{i=1}^N \beta_i w_i \quad (3.5)$$

O beta é uma medida do reflexo da sensibilidade de um investimento em relação ao movimento de mercado, por consequência quando beta é zero é dito que há neutralidade perfeita com o mercado. Dessa forma, uma carteira que possua beta próximo de zero é considerado não correlacionado com o mercado.

De acordo com Jacobs e Levy em [56], é possível obter carteiras neutras ao mercado utilizando-se de estratégias de *long* e *short positions*. A estratégia de *long* ou de compra consiste em comprar um ativo tendo em vista o aumento de seu preço no futuro a fim de vender futuramente lucrando com a diferença de preços. Já a estratégia de *short* ou de venda consiste em encontrar um ativo de um proprietário e toma-lo emprestado por um tempo. Nesse período, vende o ativo no mercado acreditando em sua possível queda de preço. Assim, quando devolve ao proprietário o preço do ativo está mais baixo lucrando com a diferença de preços.

Da equação (3.5) é possível identificar alternativas para que β_p seja nulo teoricamente:

- a correlação de cada ativo com o mercado é nula;
- usar estratégia de *long-short*;

- usar estratégia de *long-only*, mas em ativos com betas opostos;
- investir em ativos que tenham betas nulos;
- uma combinação dos itens anteriores.

Evidentemente que a alternativa de se investir em somente ativos com betas nulos é praticamente impossível na prática assim como investir em ativos que tenham correlação nula com o mercado. Por consequência, a estratégia mais utilizada é a se empregar a estratégia de *long-short* ou *long-only* em ativos com betas opostos.

Baseado no conceito de CAPM apresentado anteriormente, tem-se que o retorno da carteira r_p é dado por:

$$E(r_p) = r_f + \beta_p(E(R_t) - r_f) \quad (3.6)$$

A figura 3.1 apresenta uma carteira com beta maior que um e, portanto, altamente correlacionado com o mercado.

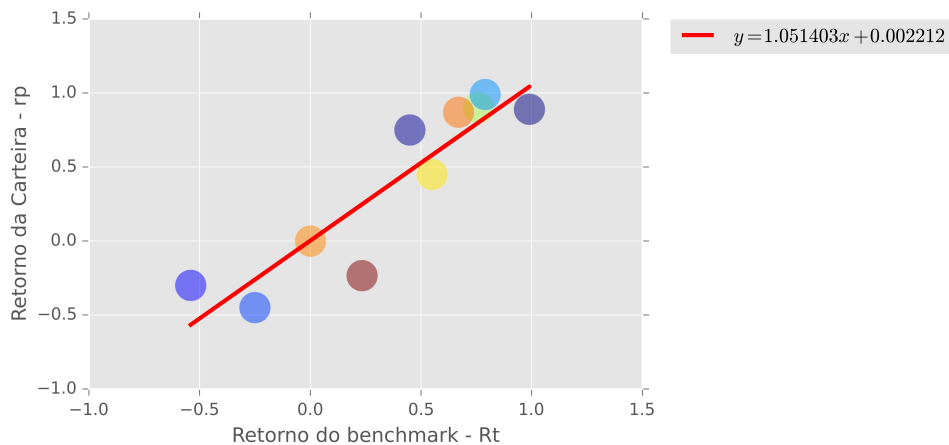


Figura 3.1: Carteira altamente correlacionada com o mercado

Para uma carteira neutra ao mercado, beta deve ser nulo ou próxima de zero. A figura 3.2 ilustra essa situação:

Em seu trabalho em [57], Patton cita outras formas de se definir neutralidade em relação ao mercado e propôs algumas testes estatísticos para verificar se fundos ditos neutros ao mercado o são de fato, apresentando seis tipos de neutralidade:

- neutralidade à correlação (*correlation neutrality*): quando a correlação linear entre a carteira e o mercado é nula;
- neutralidade à média (*mean neutrality*): quando o retorno esperado da carteira é independente do retorno do mercado assegurando que não apenas não há

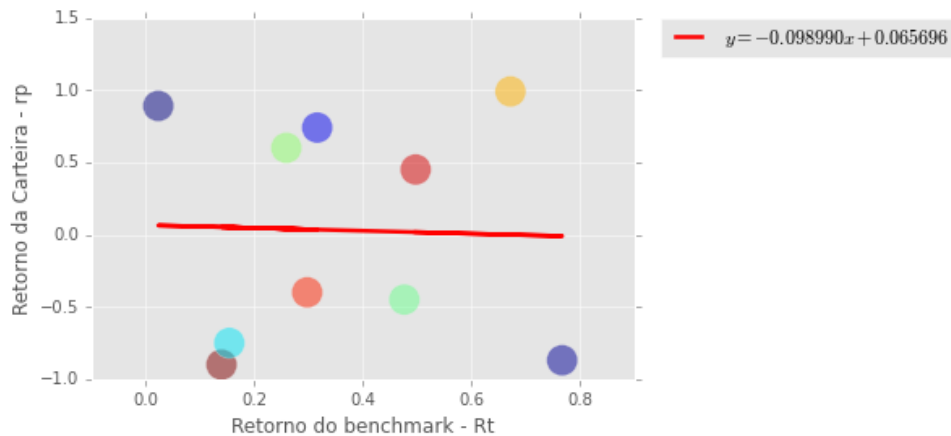


Figura 3.2: Carteira Neutra ao Mercado

relação linear entre a carteira e o mercado; mas também relação não linear de tal forma que o beta é nulo;

- neutralidade à variância (*variance neutrality*): quando o risco da carteira, medido pela variância, é independente do risco do mercado, ou seja, espera-se que o risco da carteira não cresça ao mesmo tempo que o risco do mercado;
- neutralidade ao VaR (*VaR neutrality ou quantile neutrality*): é aquela carteira com um VaR, *Value-at-Risk*, que não é afetado pelo retorno do mercado. Trata-se de uma outra neutralidade ao risco;
- neutralidade à cauda (*tail neutrality*): é um tipo de neutralidade mesmo na ocorrência de retornos extremamente baixos do mercado dada uma probabilidade de ocorrência. Trata-se de uma extensão do *VaR neutrality*
- completa neutralidade (*complete neutrality*): a mais rigorosa forma de neutralidade é aquela em que a distribuição do retorno da carteira é independente da distribuição do mercado.

Seu objetivo era verificar se os Fundos de Pensão levantados por ele eram, de fato, neutros ao mercado, conforme eles se autodenominavam. No entanto, segundo as conclusões em seu próprio trabalho, uma vez verificada a condição de neutralidade à correlação e a neutralidade à média, as demais neutralidades são obtidas.

3.3 Abordagens de Obtenção de Carteiras Neutras ao Mercado

Na literatura encontra-se diversos trabalhos sobre carteiras neutras ao mercado. A maioria deles incorre à adição de uma restrição para que o beta da carteira esteja limitado dentro de uma faixa atribuída pelo investidor e que seja próxima de zero.

Gloukhov *et al.*, 2015 [58], propuseram um algoritmo para sinalizar a compra ou venda de ativos por meio da estratégia de *pair trading* de forma a se obter a neutralidade ao mercado medida pelo beta desse par de ações. Essas ações devem ser altamente correlacionadas com coeficiente de correlação linear acima de 0,8. Utilizando-se do recurso de *long-short* não só se obtém a neutralidade mas indica quando no tempo se deve optar pela compra ou venda de cada uma das ações do par analisado.

Edirisinghe e Zhang [59] estabeleceram critérios para seleção dos ativos de empresas baseadas em *Relative Fundamental Strength - RFS*. A partir daí, obtiveram uma carteira ótima utilizando restrições sobre o beta, custos de transação e controle de risco catastrófico (queda brusca do preço da ação). Os resultados mostram que superam os resultados obtidos pelos modelos de Markowitz.

Jacobs e Levy [56] apresentam os conceitos e funcionamento das estratégias de *long-short* ressaltando algumas vantagens do uso de *short selling*. Além disso, aponta algumas questões práticas e algumas cuidados que se deve ter ao se utilizar desta prática.

Da mesma forma que Krokhmal [60], Pai e Michel em [61] apresentam um modelo que possui restrição sobre o beta da carteira assim como restrição sobre o risco da carteira medido pela variância. No entanto, usou algoritmos de meta-heurística para resolução do problema. No entanto, Krokhmal fez obteve a carteira ótima considerando diversas medidas de risco.

Badrinath e Gubellini [1] listaram alguns Fundos para verificar a existência de neutralidade usando o CAPM condicional e concluem que, de fato, os fundos denominados de neutros ao mercado possuem baixa correlação com o mercado e aderem aos seus objetivos.

Chen e Tindall, 2014, em [62] construíram uma carteira neutra ao mercado usando CAPM dinâmico (condicional) com janelas de 63 e 126 dias.

O problema desenvolvido por Valle, Meade e Beasley [3] em 2013 tem por objetivo construir uma carteira neutra ao mercado de forma a minimizar o valor absoluto da correlação entre a carteira e o *benchmark*.

O modelo utiliza tanto variáveis contínuas quanto discretas, portanto trata-se de um MINLP classificado como NP-difícil e não convexo que totaliza $11N + 2T + 5$ restrições e $6N + 2T$ variáveis havendo poucos resolvidores disponíveis mercado e

que sejam gratuitos. Portanto, não há garantia de obtenção de solução ótima por se tratar de um problema não convexo.

Neste mesmo trabalho, os autores fizeram a comparação do modelo proposto com uma carteira obtida pela minimização do valor absoluto do beta da carteira sob as mesmas restrições. Essa comparação tem por objetivo verificar se o método é mais eficaz que os métodos tradicionais que visam obter beta próximos de zero.

A medida de correlação linear usada por Patton [3] e Valle *et al.* [57], o coeficiente de Pearson, difere da medida usada por Badrinath e Gubellini [1], pois este ultimo utilizou o coeficiente de postos de Spearman ou *Spearman rank correlation*:

$$\rho_i = \frac{(1 - 6 \sum_{i=1}^n d_i^2)}{n^3 - n} \quad (3.7)$$

Onde d_i é o *rank*, que é a diferença entre as posições ou postos das variáveis.

O coeficiente de Spearman é uma medida não paramétrica que não depende de qualquer suposição sobre a natureza das variáveis incluindo suposições sobre sua distribuição de frequência.

O estudo dos autores em [63] faz uma comparação entre as duas medidas de correlação e faz ainda testes estatísticos para diferentes conjuntos de dados e conclui que o coeficiente de Spearman não deve ser superestimado como uma medida significativa de associação entre duas variáveis.

Em seu trabalho, [1] apresentaram uma estratégia *long-short* de neutralidade ao mercado usando carteiras cointegradas onde o beta zero da carteira é obtido mantendo as posições *long* e *short* devidamente balanceadas de forma a obter uma carteira cointegrada definida pelas equações (3.8) e (3.9):

$$\ln(\text{bench}_t^+) = \beta_0 + \sum_{k=0}^n \beta_k \ln(P_{k,t}^+) + \epsilon_t^+ \quad (3.8)$$

$$\ln(\text{bench}_t^-) = \beta_0 + \sum_{k=0}^n \beta_k \ln(P_{k,t}^-) + \epsilon_t^- \quad (3.9)$$

Onde bench_t^+ e bench_t^- representam o índice do *benchmark* para *long* e *short* respectivamente. $P_{k,t}^+$ e $P_{k,t}^-$ são os preços das ações que constituem a carteira *long* e *short* respectivamente e ϵ_t são os resíduos.

O termo cointegração é uma definição estatística para as séries temporais que apresentam resíduo ϵ_t estacionário. Os testes de cointegração avaliam se duas séries tem alguma relação no longo prazo.

Segundo os autores, a principal vantagem do uso de carteiras cointegradas em relação às tradicionais usando correlação é que estas não asseguram a estacionaridade do *tracking error*, ou seja, não assegura que a carteira replique o *benchmark* durante todo o período analisado.

A primeira etapa consiste na seleção das ações que comporão a carteira e a segunda etapa consiste na definição dos pesos de cada ação, os quais são obtidos pelos coeficientes da equação de cointegração (β_k).

Algumas desvantagens desse método:

- as equações devem passar por testes estatísticos de cointegração e os coeficientes obtidos devem ser normalizados;
- não se pode determinar uma quantidade mínima de ações a serem investidas;
- não é flexível ao ponto do investidor poder escolher um retorno esperado da carteira ou máximo risco que esteja disposto a correr.

Nesta dissertação, focaremos na obtenção de uma carteira neutra ao mercado em função da minimização do valor absoluto da correlação entre a carteira e o mercado conforme a metodologia de Valle *et al.*. No entanto, serão apresentadas alterações ao modelo original de forma a torná-lo factível, seja do ponto de vista computacional, seja para aderir à realidade de investimentos.

Capítulo 4

Metodologia

Este Capítulo expõe a metodologia a ser utilizada nesta dissertação fundamentada nos capítulos 2 e 3. Está dividido em duas seções: 1 - Estratégia de Seleção de Ativos e do índice de Referência - o qual evidencia e esclarece a importância da seleção de ativos que porventura possam vir a fazer parte da carteira e da seleção do índice de referência ou *benchmark*, 2 - Sequenciamento das Atividades - expõe quais testes devem ser realizados, em que sequência e com quais objetivos.

4.1 Estratégia de Seleção de Ativos e do Índice de Referência

4.1.1 Estratégia de Seleção de Ativos

Para [64] a seleção dos ativos que comporão uma carteira é de extrema importância para quem opta por investimentos de alto risco e, em seu trabalho, optaram por aplicar a metodologia DEA (*Data Envelopment Analysis*) para selecionar os melhores ativos como dados de entrada para o modelo de Markowitz e verificar se os resultados apresentam alguma melhora.

Já o trabalho de [65] buscou verificar se um modelo contendo somente ações que fazem parte do IGC (índice de governança corporativa) supera um modelo contendo as ações da ibovespa em termos de obtenção de maiores retornos ao mesmo nível de risco.

Outro exemplo é [1] que utiliza em seu modelo somente as 50 ações com mais participação no índice da BM&F BOVESPA em função de possuírem maior liquidez. Assim como [66] que incorporou em seu modelo restrições para selecionar as ações mais líquidas ao invés de uma seleção prévia dos dados de entrada.

De fato, é recomendável se definir uma estratégia para alocação dos recursos financeiros nas ações. Evidentemente que a diversificação auxilia a minimizar riscos

e, como este trabalho é voltado à formação de uma carteira neutra ao mercado, a minimização de riscos é importante, pois se presume que os investidores avessos ao risco serão mais simpáticos a esta estratégia.

Neste trabalho as diretrizes para seleção dos ativos são elencados a seguir:

1. Atribuir menores pesos a ações de setores cíclicos como Siderurgia, Bens industriais e Construção e maior peso a ações dos setores anti-cíclicos como Consumo, Utilidade Pública e Telecomunicações;
2. Selecionar ativos de alta liquidez os quais são os mais fáceis de efetuar compra e venda beneficiando os rebalanceamentos;
3. Determinar um período de rebalanceamento adequado;
4. Obter um retorno que seja mais rentável que um índice de referência adequado.

4.1.2 Estratégia de Seleção do Índice de Referência

A grande parte dos trabalhos em Finanças no Brasil utiliza o índice da Bolsa de Valores de São Paulo, o índice BM&F BOVESPA ou ibovespa, como índice de referência.

O ibovespa é um indicador que contém uma carteira teórica de ativos de maior negociabilidade e representatividade do mercado de ações brasileiro e são revisadas quadrimestralmente.

Segundo a BM&F BOVESPA [67], para a ação ser elegível ao ibovespa deve atender cumulativamente aos principais critérios elencados a seguir:

- Estar entre os ativos elegíveis que, no período de vigência das 3 (três) carteiras anteriores, em ordem decrescente de Índice de Negociabilidade (IN) e presente em conjunto 85% (oitenta e cinco por cento) do somatório total desses indicadores;
- Ter presença em pregão de 95% (noventa e cinco por cento) no período de vigência das 3 (três) carteiras anteriores;
- Ter participação em termos de volume financeiro maior ou igual a 0,1%, no mercado a vista (lote-padrão), no período de vigência das 3 (três) carteiras anteriores;
- Não ser classificado como *Penny Stock*.

Portanto, as ações que integram o ibovespa são baseadas no índice de negociabilidade o qual leva em conta o número de negócios e o volume financeiro de uma

determinada ação em relação ao mercado total. Assim a liquidez é muito importante para a seleção de um determinado ativo e para o ranking dos ativos. São excluídas da lista as ações pertencentes a companhias em recuperação judicial, processo falimentar, situação especial ou sujeitas a prolongado período de suspensão de negociação.

O ibovespa presa demasiadamente em liquidez, portanto as que empresas que estejam passando por maus desempenhos podem entrar no índice uma vez que a venda as ações, provavelmente ocasionada pelo descontentamento dos investidores, promove o aumento da sua liquidez.

Em contrapartida, o IBrX100 contempla as 100 ações mais liquidas da BM&F BOVESPA, isto é, aquelas com maior número de negócios ponderadas pelo valor de mercado do *free float*, ou seja, dos ativos disponíveis em circulação. Há ainda o IBrX50 que contempla as 50 ações ainda mais liquidas da BM&F BOVESPA que possui os mesmos critérios de seleção.

De acordo com a BM&F BOVESPA [67], para a ação ser elegível ao IBrX100 deve atender cumulativamente aos critérios a seguir:

- Estar entre as 100 melhores classificadas quanto ao seu índice de negociabilidade, no período de vigência de três carteiras anteriores;
- Ter presença no pregão de 95% no período de vigência de três carteiras anteriores;
- Não ser classificado como *Penny Stock*.

Em relação ao índice de referencia utilizado pelas medidas de desempenho apresentadas no capítulo 2 relativo ao ativo livre de risco, alguns trabalhos como [68] utilizaram a SELIC; no entanto [69] e [1] utilizam o CDI. Ambas as taxas possuem rendimento superior à poupança que seria, teoricamente, uma taxa livre de risco.

A figura 4.1 elucida a relação entre estes índices por dos meio da média móvel de doze meses de seus retornos diários e a figura 4.2 elucida a relação entre estas taxas mensais.

A SELIC é determinada pelo governo sobre as operações entre os bancos comerciais e o Banco Central do Brasil. Já a taxa do CDI é determinada pelo mercado por meio de negociação entre os bancos comerciais.

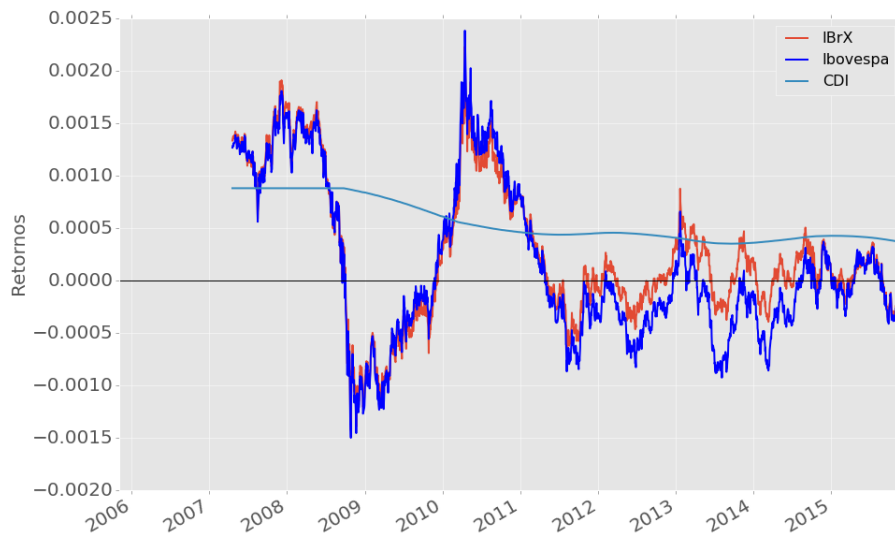


Figura 4.1: Média Móvel dos Retornos Diários dos Índices de Referência ao Mercado

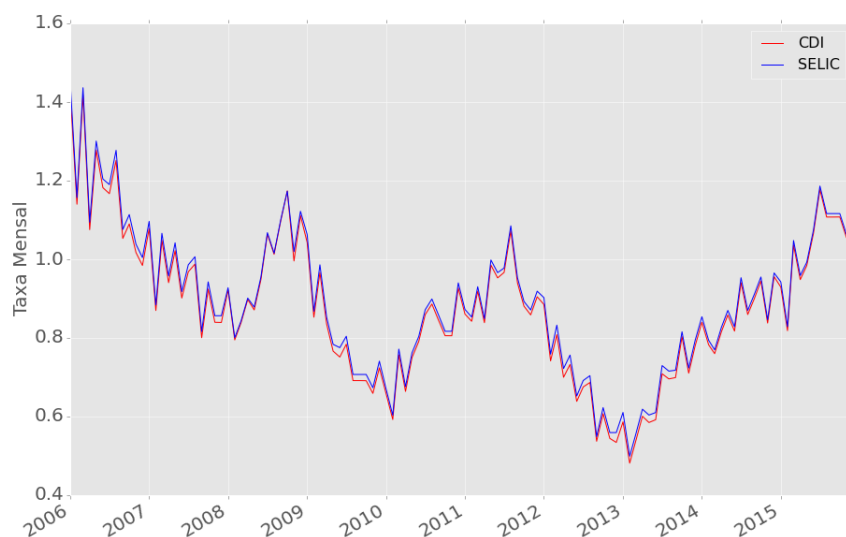


Figura 4.2: Série Temporal dos Índices de Referência dos Ativos Livres de Risco

O IBrX100 será o índice de referência ao mercado a ser utilizado pelos modelos propostos no capítulo seguinte indo ao encontro aos itens 2 e 4 das diretrizes desta Metodologia.

O índice escolhido como referência para o ativo de risco será o CDI em função de ser o principal referencial usado utilizado pelos bancos comerciais como alternativa de investimento ao mercado de ações para investidores com baixa propensão ao risco. Além de ser uma taxa que não sofre influencia política direta como a SELIC.

4.2 Sequenciamento das Atividades

Uma vez determinadas as diretrizes elencadas na primeira seção, os modelos propostos no seguinte capítulo deverão passar por duas etapas básicas. A primeira tem por objetivo verificar qual modelo, dentre os quatro modelos apresentados, deve ser usado como modelo base para o estudo das carteiras neutras ao mercado. A segunda etapa visa ao estudo das alterações dos principais parâmetros do modelo selecionado incluindo a inserção de restrições de custo e de risco.

Assim, dentro das destas duas etapas básicas, pode-se listar as atividades na seguinte sequência:

1. Avaliação dos Modelos Misto-Inteiros e Seleção da Função Objetivo;
2. Comparação do Modelo Misto-Inteiro com Modelo Contínuo;
3. Análise de Impacto do Nível de *Short Selling*;
4. Inserção das Restrições de Risco;
5. Comparação do Modelo Proposto com Modelo Beta-Zero;
6. Inserção das Restrições de Custos de Transação;
7. Impacto do Tamanho da Amostra *In-Sample*;
8. Impacto da Periodicidade de Rebalanceamentos.

A primeira atividade consiste em avaliar os três modelos misto-inteiros apresentados juntamente com os dois tipos de função objetivo descritas na seção 5.5. Conforme já mencionado, um MINPL é um problema de difícil resolução, portanto é importante detectar se um dos modelos podem ser resolvidos mais rapidamente gerando melhores resultados frente aos demais.

Em seguida, o modelo misto-inteiro selecionado pode ser confrontado com o modelo contínuo. A proposta deste trabalho é usar um modelo contínuo frente ao misto-inteiro desenvolvido por Valle *et. al* [3]. Nesse sentido, essa análise é de extrema importância para este trabalho. Ressaltando-se que, em ambos os casos, os modelos usarão sempre a mesma função objetivo.

Essa análise será realizada em duas partes. A primeira chamada de *in-sample*, corresponde à aplicação dos modelos com as estratégias descritas na seção 4.1 num período pré-determinado. A segunda parte chamada de *out-of-sample* tem por objetivo verificar o comportamento da carteira selecionada no período *in-sample* ao longo do tempo até uma data final usando *Backtesting* com uma periodicidade de rebalanceamento pré-estabelecida.

A figura 4.3 exemplifica o exposto acima. Esse tipo de *backtest* é chamado de dinâmico. Já no *backtest* estático não há o rebalanceamento periódico acreditando-se que a ação tomada no período *in-sample* se perpetuará no futuro sem necessitar de qualquer intervenção do investidor. Neste trabalho, somente será realizado o *backtest* dinâmico.

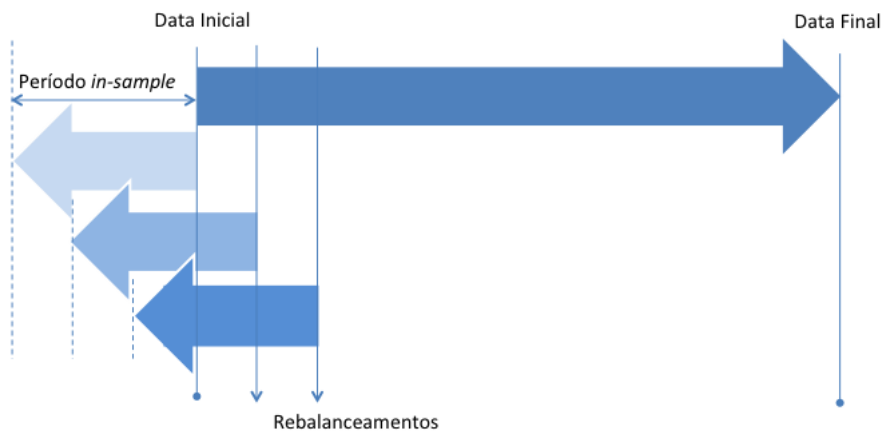


Figura 4.3: Metodologia

Na seção 5.1 estão descritos todos os parâmetros base dos modelos. Em caso de modificação, será indicado quando necessário. O período de rebalanceamento do *backtest* será de quatro meses e o período *in-sample* de dois anos. Estes parâmetros de *backtest* só serão alterados nas seções 6.7 e 6.8. A cada realização de *backtest*, as datas inicial e final serão citadas.

Importante salientar que, a cada rebalanceamento, somente as ações constantes no IBrX100 podem ser escolhidas.

Uma vez selecionado o modelo base para geração de carteiras neutras ao mercado, serão adicionadas restrições de risco, medida pelo AVaR, assim como as restrições de custos de transação. Todos os modelos também passarão pelo *backtest*.

A cada inserção de novas restrições, novos parâmetros surgirão e também será testado impacto das mudanças desses parâmetros.

Uma importante comparação será realizada entre o modelo proposto com o tradicional modelo beta-zero com restrições de AVaR. Como o modelo beta-zero é de resolução mais fácil, o objetivo é verificar se o modelo proposto, apesar de resolução

mais difícil, supera o desempenho do modelo beta-zero. Em seu trabalho Valle *et. al* [3] indicaram superioridade de seu modelo em termos de neutralidade ao mercado.

Por fim, os parâmetros de tamanho da amostra *in-sample* e da periodicidade de rebalanceamentos serão alterados com intuito de se verificar se o AVaR da carteira sofre alterações e se o ganho final da carteira é fortemente abalado em função dos custos de transação por quantidade de rebalanceamentos realizados.

Capítulo 5

Modelos Propostos

Este Capítulo apresenta os modelos propostos os quais visam a obtenção de carteiras neutras ao mercado de forma que o valor absoluto da correlação linear entre a carteira obtida e o mercado seja mínima atendendo às diretrizes estabelecidas no Capítulo 4. Está organizado da seguinte forma: na seção 5.1 - Parâmetros - onde se expõe todos os parâmetros do modelo, na seção 5.2 - Função Objetivo - é apresentada a função objetivo dos modelos, na seção 5.3 - Variáveis - são detalhadas as variáveis de cada modelo proposto, na seção 5.4 - Restrições - são apresentados os objetivos de cada conjunto de restrições para cada modelo e, finalmente na seção 5.5, são apresentados os detalhes de implementação.

Serão apresentados três modelos que foram baseados no trabalho de Valle *et al.* 2013. No entanto, várias modificações algébricas foram introduzidas aos modelos a fim de ajustá-los à realidade e de permitir uma implementação mais fácil.

5.1 Parâmetros

Os modelos podem trabalhar com *long* e *short positions*. O parâmetro que determina a proporção máxima do capital que estaria disponível para se investir em *short position* é chamado de α , ou seja, se α é 30% então o máximo que se pode utilizar para investir em *short position* é 30% do capital e essa carteira é chamada de 130/30. O uso de *shorting* permite que haja um acréscimo na quantidade a ser investida após a realização do lucro obtido nesta transação, assim a quantidade máxima que pode ser utilizada para se investir em *long position* é de no máximo $(1 + \alpha)$ do capital.

Além disso, os pesos atribuídos a cada ação seja para *long* ou para *short* podem ser limitados inferiormente por ϵ_i^L e por ϵ_i^S e superiormente limitados por δ_i^L e por δ_i^S , respectivamente. É, portanto, uma forma de se evitar que o algoritmo atribua altos pesos a poucas ações a fim de promover uma maior diversificação.

Outros parâmetros a serem utilizados para atender à diretriz 1 do exposto na

seção 4.1.1 do Capítulo 4 são o β_1 e o β_2 . Eles atuam sobre os pesos limitando a carteira a atribuir altos pesos àqueles setores considerados cíclicos da economia. Estes setores, quando as variáveis macroeconômicas estão ruins, são os primeiros a serem afetados diretamente, isto é, são setores mais sensíveis às variações da economia.

Os setores considerados cíclicos neste trabalho são: Mineração, Siderurgia e Metalurgia, Máquinas e Equipamentos, Construção e Engenharia, Transporte e Tecidos, Vestuário e Calçados. A classificação setorial foi estabelecida conforme a Bolsa de Valores de São Paulo.

A carteira deve escolher K ações dentre as N existentes, portanto K é um importante parâmetro uma vez que uma carteira com muitas ações pode ser de difícil gerenciamento e incorrer em altos custos de transação a cada rebalanceamento. Ou seja, considerando-se a existência de $i = 1, \dots, N$ ativos para se investir durante o tempo $t = 0, \dots, T$, os modelos devem escolher K ativos dentre os N existentes, ou seja, $K \leq N$ em oposição ao proposto por Valle *et al.* que indicou $K = N$.

Neste trabalho, será considerado $K \leq 20$, por entender que um investidor consegue gerenciar melhor seus investimentos com, no máximo, 20 ações. As N ações possíveis de escolha pelos modelos são aquelas constantes no IBrX100.

A tabela 5.1 sintetiza o exposto acima:

Tabela 5.1: Síntese dos Parâmetros

Notação	Valor	Unidade de Medida
N	100	—
K	20	—
β_1	20	%
β_2	100	%
α	30	%
ϵ_i^S	70	%
ϵ_i^L	0	%
δ_i^S	0	%
δ_i^L	11.5	%
R_0	Média CDI do período	diária
T	2	anos

O IBrX100 será o índice de referencia uma vez que seu comportamento também acompanha, em certo grau, o ibovespa. Nesse sentido, os modelos devem apresentar correlação mínima com o IBrX100.

Além disso, a carteira obtida nos modelos deve superar uma taxa de referencia. O trabalho de Valle *et al.* [3] usou como referencia o retorno médio do *benchmark*. No entanto, essa referencia pode não ser adequada haja vista que há a possibilidade de que o retorno médio do período ser negativo ou proximo de zero. Dessa forma,

a taxa de referencia escolhida para este trabalho é o CDI que é a taxa de depósito interbancário que é superior, inclusive, que a inflação conforme discutido na seção 4.1.2 do Capítulo 4.

Outro fator importante é o período de tempo a ser utilizado. Neste trabalho utilizaremos o período *in-sample* de dois anos de dados em consonância com o apresentado no Capítulo 4. Cabe salientar que dois anos tem em média 504 dias úteis; no entanto se houver *missing data* ou dados faltantes, essa quantidade de dias pode ser reduzido.

Os preços, os retornos logaritmos, as taxas de referencia e o período utilizados serão em unidades diárias, pois se obtém mais informações do mercado.

O valor de $\delta_i^L = 11.5\%$ limita que o máximo permitido a ser investido em cada ação na posição *long* seja de 14.95%, uma vez que $(1 + \alpha) * 11.5 = 14.95\%$, para $\alpha = 30\%$. O mesmo acontece para a posição *short* que fica limitado a -21%, pois $\epsilon_i^S = 0.7$ e $-\alpha * 0.7 = -21\%$.

Os critérios de parada dos algoritmos de NPL são o número máximo de iterações igual a 5000 e *gtol* igual a 10^{-11} , ou seja, a norma do gradiente da função lagrangiana no ponto encontrado deve ser inferior ou igual a 10^{-11} . Além disso, o número máximo de avaliações da função objetivo foi estipulado em 500000 vezes. Para os algoritmos de MINLP, *gtol* foi estipulado a 10^{-4} .

5.2 Função Objetivo

De acordo com a definição de neutralidade ao mercado visto no Capítulo 3, uma carteira perfeitamente neutra ao mercado tem correlação zero com o índice de mercado. Entretanto, dado o *trade-off* existente entre risco e retorno, a perfeita neutralidade nem sempre poderá existir em função do retorno que se deseja obter.

Nesse sentido, a função objetivo dos modelos visam minimizar o valor absoluto da correlação entre a carteira e o mercado. Assim, o valor da função objetivo pode ser diferente de zero caso o retorno esperado da carteira seja alto.

A equação que define a função objetivo é:

$$|\rho_{p_t, R_t}| = \left| \frac{cov(p_t, R_t)}{\sigma_{p_t} \times \sigma_{R_t}} \right| = \left| \frac{\sum_{t=1}^T (p_t - \bar{p})(R_t - \bar{R})}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (p_t - \bar{p})^2 \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2}} \right| \quad (5.1)$$

Onde:

- p_t : retorno logarítmico da carteira no tempo t;
- R_t : retorno logarítmico do índice IBrX100 no tempo t;
- \bar{p} : retorno esperado da carteira;

- \bar{R} : retorno esperado do IBrX100;
- σ_{pt} : desvio padrão do retorno da carteira;
- σ_{Rt} : desvio padrão do retorno do IBrX100.

Trata-se, portanto, de uma função não contínua em zero. Como as derivadas laterais de (5.1) são diferentes, então ela não é derivável no ponto zero. Na seção 5.5 é detalhada uma alternativa para otimização deste problema uma vez que o algoritmo a ser usado necessita de derivadas.

5.3 Variáveis

As variáveis dos modelos são os seguintes:

- p_t : retorno logarítmico da carteira no tempo t ;
- \bar{p} : retorno esperado da carteira;
- w_i^L, w_i^S : proporção do capital inicial (peso) mantido em *long* e *short position*, respectivamente, no ativo i ;
- z_i^L, z_i^S : variável binária que assume valor 1 se o ativo i é realizado como *long* e *short position*, respectivamente. E assume valor 0, caso contrário.

Para os modelos 2 e 3, as variáveis w_i^L e w_i^S são substituídas por apenas w_i onde os pesos não são diferenciados para *long* ou *short position*. Essa atribuição é de fácil compreensão uma vez que temos a posição de *short* quando $w_i \leq 0$ e para a posição *long* quando $w_i \geq 0$.

O mesmo acontece nos modelos 1 e 1b onde as variáveis binárias z_i^L e z_i^S são reduzidas a apenas um conjunto de variáveis binárias z_i , as quais atingem valor 1 se a ação i é selecionada para *long* e 0 para *short position*.

Já no modelo 2 as variáveis z_i assumem valor 1 se a ação i é selecionada e 0 caso contrário. Para o modelo 3, as variáveis binárias são excluídas formando um NPL.

5.4 Restrições

Conforme já relatado, este trabalho apresenta quatro modelos chamados de: 1, 1b, 2 e 3 onde os três primeiros são um MINLP e o último um NLP, os quais apresentam a mesma função objetivo com distintos conjuntos de restrições. Todos os modelos apresentam os mesmos conjuntos de restrições que têm o mesmo propósito; mas cada um com uma peculiaridade, as quais foram modificadas algebricamente para isto, principalmente no que tange às variáveis binárias.

Seja $i \in [1, N]$ o conjunto de ações disponíveis para se investir, seja também, B , um subconjunto do conjunto anterior que se refere às pertencentes aos setores cíclicos e $t = 1, 2, 3, \dots, T$ o conjunto referente ao período de tempo; então as restrições por modelo podem ser explicitadas nas tabelas a seguir. Cada conjunto de restrições tem por objetivo:

- delimitar os pesos das ações atribuídas a *long position* e *short position* não sejam superiores ou inferiores de acordo com o estabelecido pelo ϵ_i^L e ϵ_i^S e pelo δ_i^L e δ_i^S , assim como o nível de *shorting* estabelecido por α .

Tabela 5.2: Restrições - Limites Superior e Inferior dos Pesos

Modelo 1	Modelo 1b	Modelo 2	Modelo 3
$w_i^L \leq \delta_i^L z_i^L (1 + \alpha)$	$w_i^L \leq \delta_i^L z_i (1 + \alpha)$		
$w_i^L \geq \epsilon_i^L z_i^L (1 + \alpha)$	$w_i^L \geq \epsilon_i^L z_i (1 + \alpha)$	$w_i \leq \delta_i^L z_i (1 + \alpha)$	$w_i \leq \delta_i^L (1 + \alpha)$
$w_i^S \leq -\delta_i^S z_i^S \alpha$	$w_i^S \leq -\delta_i^S \alpha (1 - z_i)$	$w_i \geq -\epsilon_i^S z_i \alpha$	$w_i \geq -\epsilon_i^S \alpha$
$w_i^S \geq -\epsilon_i^S z_i^S \alpha$	$w_i^S \geq -\epsilon_i^S \alpha (1 - z_i)$		

- assegurar que a soma dos pesos não exceda ao capital disponível:

Tabela 5.3: Restrições - Capital Disponível

Modelos 1 e 1b	Modelos 2 e 3
$\sum_{i=1}^N w_i^L + w_i^S = 1$	$\sum_{i=1}^N w_i = 1$

- assegurar que o capital total disponível para *long* e *short position*, respectivamente, não sejam ultrapassados, ou seja, se há um capital de, por exemplo, 100mil para se investir, então a soma de todas as ações em posição *long* não deve exceder a 130mil, para um $\alpha = 0.3$, e a soma de todas as ações em posição *short* deve ser de, no mínimo, -30mil:

Tabela 5.4: Restrições - Limites para *Long* e *Short Positions*

Modelos 1 e 1b	Modelos 2 e 3
$\sum_{i=1}^N w_i^L \leq (1 + \alpha)$	$\sum_{i=1}^N \max(0, w_i) \leq (1 + \alpha)$

- permitir que se uma ação seja escolhida em *long*, então ela não pode ser escolhida para *short position* e vice-versa:

Tabela 5.5: Restrições - Evitar Seleção Simultânea entre *Long* e *Short Positions*

Modelo 1	Modelo 1b	Modelo 2	Modelo 3
$z_i^L + z_i^S \leq 1$	$z_i = 1$, se <i>long</i> ; ou $z_i = 0$, se <i>short</i>	$z_i = 1$, se selecionado; ou $z_i = 0$, caso contrário.	—

- impedir que a soma do capital investido nos setores considerados cíclicos não sejam ultrapassados pelo limite estabelecido pelo investidor tanto para *long* quanto para *short*:

Tabela 5.6: Restrições - Setores Cíclicos

Modelos 1 e 1b	Modelos 2 e 3
$\sum_{i=a}^B w_i^L \leq \beta_1$	$\sum_{i=a}^B \max(0, w_i) \leq \beta_1$
$\sum_{i=a}^B w_i^S \geq -\beta_2$	$\sum_{i=a}^B \min(-w_i, 0) \geq -\beta_2$

- selecionar, no máximo, K ações dentre as N disponíveis. Este objetivo é atingido usando as variáveis binárias, no entanto para o NLP é realizada uma modificação no algoritmo que será explicada mais adiante:

Tabela 5.7: Restrições - Número Máximo de Ações a Serem Selecionadas

Modelo 1	Modelo 1b e 2	Modelo 3
$\sum_{i=1}^N (z_i^L + z_i^S) \leq K$	$\sum_{i=1}^N z_i \leq K$	Modificação no algoritmo

- além do conjunto de restrições acima, a equação referente ao cálculo do retorno logarítmico da carteira (p_t) é necessária para o cálculo da correlação expressa na função objetivo:

Tabela 5.8: Restrições - Cálculo do Retorno da Carteira

Modelos 1 e 1b	Modelos 2 e 3
$p_t = \sum_{i=1}^N (w_i^L + w_i^S) r_{it}$	$p_t = \sum_{i=1}^N w_i r_{it}$

- e, por fim, obter um retorno médio da carteira (\bar{p}) de, pelo menos, igual ao CDI em todos os modelos, ou seja, $\bar{p} \geq R_0$, onde $\bar{p} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t$.

A seguir são apresentados todos os conjuntos de restrições para cada modelo:

- Modelo 1 - Possui $4N + T$ variáveis e $7N + T + B + 5$ restrições e é o modelo de resolução mais difícil dentre os apresentados por se tratar de um problema com variáveis inteiras e maior quantidade de variáveis e restrições no total. As

restrições são:

$$w_i^L \leq \delta_i^L z_i^L (1 + \alpha), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.2)$$

$$w_i^L \geq \epsilon_i^L z_i^L (1 + \alpha), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.3)$$

$$w_i^S \leq -\delta_i^S z_i^S \alpha, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.4)$$

$$w_i^S \geq -\epsilon_i^S z_i^S \alpha, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.5)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i^L + w_i^S = 1 \quad (5.6)$$

$$\sum_{i=a}^B w_i^L \leq \beta_1, \quad i \in B \quad (5.7)$$

$$\sum_{i=a}^B w_i^S \geq -\beta_2, \quad i \in B \quad (5.8)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i^L \leq (1 + \alpha) \quad (5.9)$$

$$z_i^L + z_i^S \leq 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.10)$$

$$\sum_{i=1}^N (z_i^L + z_i^S) \leq K \quad (5.11)$$

$$p_t = \sum_{i=1}^N (w_i^L + w_i^S) r_{it}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, T \quad (5.12)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t \quad (5.13)$$

$$\bar{p} \geq R_0 \quad (5.14)$$

$$z_i^L \text{ e } z_i^S \in \{0, 1\} \quad (5.15)$$

$$p_t, \bar{p}, w_i^S \text{ e } w_i^L \in \mathbb{R} \quad (5.16)$$

- Modelo 1b - Possui $3N + T$ variáveis e $6N + T + B + 3$ restrições e semelhante ao anterior, no entanto um conjunto de variáveis binárias é retirado, reduzindo

assim a quantidade não só de variáveis como de restrições. As restrições são:

$$w_i^L \leq \delta_i^L z_i (1 + \alpha), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.17)$$

$$w_i^L \geq \epsilon_i^L z_i (1 + \alpha), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.18)$$

$$w_i^S \leq -\delta_i^S \alpha (1 - z_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.19)$$

$$w_i^S \geq -\epsilon_i^S \alpha (1 - z_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.20)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i^L + w_i^S = 1 \quad (5.21)$$

$$\sum_{i=a}^B w_i^L \leq \beta_1, \quad i \in B \quad (5.22)$$

$$\sum_{i=a}^B w_i^S \geq -\beta_2, \quad i \in B \quad (5.23)$$

$$\sum_{i=1}^N z_i \leq K \quad (5.24)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i^L \leq (1 + \alpha) \quad (5.25)$$

$$p_t = \sum_{i=1}^N (w_i^L + w_i^S) r_{it}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, T \quad (5.26)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t \quad (5.27)$$

$$\bar{p} \geq R_0 \quad (5.28)$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad (5.29)$$

$$p_t, \bar{p}, w_i^S \text{ e } w_i^L \in \mathbb{R} \quad (5.30)$$

- Modelo 2 - Possui $4N + T$ variáveis e $7N + T + B + 5$ restrições e utiliza apenas um conjunto de variáveis binárias, que assume valor 1 quando a ação i é selecionada, independentemente de sua posição em *short* ou *long*. As restrições do modelo 2 são as mesmas do modelo 1 com as suas devidas adaptações, com

exceção da restrição 5.10:

$$w_i \leq \delta_i^L z_i (1 + \alpha), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.31)$$

$$w_i \geq -\epsilon_i^S z_i \alpha, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.32)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (5.33)$$

$$\sum_{i=a}^B \max(0, w_i) \leq \beta_1, \quad i \in B \quad (5.34)$$

$$\sum_{i=a}^B \min(-w_i, 0) \geq -\beta_2, \quad i \in B \quad (5.35)$$

$$\sum_{i=1}^N \max(0, w_i) \leq (1 + \alpha) \quad (5.36)$$

$$\sum_{i=1}^N z_i \leq K \quad (5.37)$$

$$p_t = \sum_{i=1}^N w_i r_{it}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, T \quad (5.38)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t \quad (5.39)$$

$$\bar{p} \geq R_0 \quad (5.40)$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad (5.41)$$

$$p_t, \bar{p}, e w_i \in \mathbb{R} \quad (5.42)$$

- Modelo 3 - Já no modelo 3 todas as variáveis são do tipo contínuas, portanto o modelo passa a ser um NPL e de mais fácil resolução que os demais passando a possuir $2N + T$ variáveis e $4N + T + B + 4$ restrições que estão descritas

abaixo:

$$w_i \leq \delta_i^L(1 + \alpha), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.43)$$

$$w_i \geq -\epsilon_i^S \alpha, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.44)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (5.45)$$

$$\sum_{i=a}^B \max(0, w_i) \leq \beta_1, \quad i \in B \quad (5.46)$$

$$\sum_{i=a}^B \min(-w_i, 0) \geq -\beta_2, \quad i \in B \quad (5.47)$$

$$\sum_{i=1}^N \max(0, w_i) \leq (1 + \alpha) \quad (5.48)$$

$$p_t = \sum_{i=1}^N w_i r_{it}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, T \quad (5.49)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t \quad (5.50)$$

$$\bar{p} \geq R_0 \quad (5.51)$$

$$p_t, \bar{p}, e w_i \in \mathbb{R} \quad (5.52)$$

Evidentemente espera-se que o modelo 3 apresente tempo de resolução menor que os demais, além de ser possível usar uma gama maior de resolvedores, o que não acontece nos modelos 1, 1b e 2 que são um MINLP.

Importante ressaltar que nos modelos MINLP as carteiras serão obtidas com um número máximo de ações estabelecido pelo investidor por meio do parâmetro K . Para assegurar uma justa comparação com o modelo contínuo que não possui esta restrição, foi implementado um *script* que retira a ação escolhida de menor peso, em valor absoluto, e retorna para encontrar uma nova solução sem essa ação e só finaliza o processo até que a quantidade de ações seja menor que K .

Adicionalmente, serão acrescentadas as restrições relativas à medida de risco, AVaR, e aos custos de transação.

1. Carteiras Neutras ao Mercado sob restrições de AVaR:

Mantendo-se as demais restrições apresentadas anteriormente, sujeita-se o modelo a um máximo risco estabelecido medido por ξ :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad |\rho_{p_t, R_t}| \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad AVaR_\theta(X) \leq \xi \end{aligned}$$

O modelo reescrito seria:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && |\rho_{p_t, R_t}| \\
& \text{sujeito a:} && \\
& && u + \frac{1}{(1-\theta)^T} \sum_{t=0}^T z_t \leq \xi \\
& && z_t \geq 0, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T \\
& && z_t + p_t + u \geq 0, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T
\end{aligned} \tag{5.53}$$

2. Carteiras Neutras ao Mercado com custos de transação:

A fim de proporcionar mais robustez e aderência com a realidade, o modelo deve ser capaz de gerar uma carteira que supere o *benchmark* depois de descontar os custos de transação envolvidos na compra e venda de ativos. Nesse sentido, as seguintes restrições serão adicionadas, baseando-se no trabalho de Hafsa [28] e mantendo-se as demais apresentadas anteriormente:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && |\rho_{p_t, R_t}| \\
& \text{sujeito a:} && \\
& && \bar{p} - \sum_{i=1}^N c|w_i - w_i^0| \geq R_0
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Onde c representa uma porcentagem, baseada em estimativas do investidor, sobre os custos que envolvem a compra e a venda de ativos. Já w_i^0 representa o valor do peso da ação i da carteira inicial. Assume-se, portanto, que os custos são diretamente proporcionais à transação de compra e de venda de ativos.

O desempenho dos modelos serão vistos no capítulo seguinte.

5.5 Detalhes da Implementação

Um ponto a ser considerado nos modelos acima é o fato de que a função objetivo não ser diferenciável no ponto zero por ser uma função modular. Os resolvidores que de NPL que usam derivadas podem não encontrar soluções viáveis.

Para contornar essa situação há duas alternativas. A primeira seria a de alterar a função objetivo conforme a equação (5.55), sem causar qualquer prejuízo aos modelos, onde $R^2 \in [0, 1]$:

$$R^2 = \rho_{(p_t, R_t)}^2 = \frac{[\sum_{t=1}^T (p_t - \bar{p})(R_t - \bar{R})]^2}{\sum_{t=1}^T (p_t - \bar{p})^2 \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2} \tag{5.55}$$

Em estatística, o valor do quadrado da correlação é chamado de coeficiente de determinação. Assim, o problema passaria a ter o objetivo de minimizar o valor do coeficiente de determinação.

A segunda alternativa é acrescentar uma variável auxiliar, alterar a função objetivo e acrescentar mais três restrições conforme indicado a seguir:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar } y \\
& \text{sujeito a: } \rho_{(p_t, R_t)} \leq y \\
& \quad \quad \quad -\rho_{(p_t, R_t)} \leq y \\
& \quad \quad \quad y \geq 0
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Além disso, as restrições do tipo $\sum_i^N \max(0, w_i) \leq (1 + \alpha)$ pertencentes aos modelos 2 e 3, apresentam característica de serem linear por partes, *piecewise linear*, e necessitam de um artifício matemático para implementá-las ao modelo.

Uma variável artificial ψ_i é acrescentada a cada restrição de cada modelo juntamente três conjuntos de restrições como segue:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \psi_i \leq (1 + \alpha) \\
& w_i \leq \psi_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \\
& 0 \leq \psi_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N
\end{aligned} \tag{5.57}$$

As restrições do tipo $\sum_i^N \min(-w_i, 0) \geq -\beta_2$, podem ser convertidas em:

$$-\beta_2 \geq \sum_{i=1}^N \max(0, w_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

E, da mesma forma que a transformação anterior, adiciona-se uma variável φ_i e três conjuntos de restrições:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \varphi_i \leq -\beta_2 \\
& -w_i \leq \varphi_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \\
& 0 \geq \varphi_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Essas modificações devem ser realizadas tanto para a primeira alternativa de modificação da função objetivo, R^2 , quanto para a segunda alternativa usando a variável auxiliar y , nos modelos 2 e 3 que não possuem variáveis distintas de peso para *long* e *short*.

Para o caso do modelo beta-zero, que será visto mais adiante no Capítulo 6, somente a alternativa de variável auxiliar é plausível. Dessa forma, o modelo se transforma em:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar } y \\
& \text{sujeito a: } \sum_{i=1}^N \beta_i w_i \leq y, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \\
& \quad \quad \quad -\sum_{i=1}^N \beta_i w_i \leq y, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \\
& \quad \quad \quad y \geq 0
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Por fim, a restrição do modelo com custos de transação também precisa de modificação substituindo o módulo contido na expressão $\sum_{i=1}^N c|w_i - w_i^0|$ com o acréscimo de duas variáveis artificiais com mais três conjuntos de restrições, como segue:

$$\begin{aligned}
 \bar{p} - \sum_{i=1}^N c(u_i^+ + u_i^-) &\geq R_0 \\
 w_i - w_i^0 &= u_i^+ + u_i^-, & i = 1, 2, 3, \dots, N \\
 u_i^+ &\geq 0, & i = 1, 2, 3, \dots, N \\
 u_i^- &\geq 0, & i = 1, 2, 3, \dots, N
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

No capítulo seguinte serão realizadas comparações entre estas alternativas de alterações na função objetivo, exceto para o modelo beta-zero.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

Neste Capítulo são apresentados e analisados os resultados obtidos em cada uma das etapas descritas no Capítulo 4.

Todos os modelos foram construídos em linguagem Python 2.7 utilizando-se a linguagem de modelagem do OpenOpt 0.5610 com resolvidor ALGENCAN versão 2.3.0 para a parte não linear o qual usa o algoritmo do lagrangiano aumentado e o resolvidor branb para a parte inteira que usa o algoritmo de *branch-and-bound*.

Outros resolvidores para a parte não linear foram testados como: mma, r-alg e auglag. No entanto, o ALGENCAN apresentou desempenho superior a todos tanto em precisão quanto em tempo de resolução.

As demais rotinas necessárias para realização de *backtesting*, *download* dos preços das ações, geração de gráficos e demais rotinas também foram construídas em Python.

Os algoritmos foram desenvolvidos no Sistema Operacional Macintosh Operating System (Mac OS X El Capitan 10.11.1) de 1,4 GHz Intel Core i5 de processador e 4 GB de memória RAM.

6.1 Avaliação dos Modelos Misto-Inteiros e Seleção da Função Objetivo

Conforme indicado na seção 5.5 do Capítulo 5, os modelos devem contemplar algumas adaptações na função objetivo para que possam contornar o fato de uma função modular não ser diferenciável no ponto zero.

6.1.1 Função Objetivo - Coeficiente de Determinação

A primeira alternativa apresentada foi a de assumir a função objetivo como sendo o coeficiente de determinação R^2 .

A alocação ótima exposta pela figura 6.1 é resultado de um teste para uma carteira pequena de 20 ações, com $K \leq 15$, de um período *in-sample* de apenas 22 dias e tolerância $gtol = 10^{-4}$, para os modelos misto-inteiros, e $gtol = 10^{-9}$ para o modelo contínuo. O número máximo de iterações foi estabelecido em 3000 e o número máximo de avaliações da função objetivo de 5000000, ou seja, um valor extremamente alto para que o modelo atinja o menor valor possível da função objetivo.

Um conjunto de pontos iniciais foi atribuído ao modelo contínuo de forma arbitrária. Para os modelos mistos-inteiros, o conjunto de pontos iniciais foi o resultado obtido no modelo contínuo. Esse artifício se mostrou necessário para se verificar se todos os modelos fossem capaz de gerar resultados iguais como deveriam.

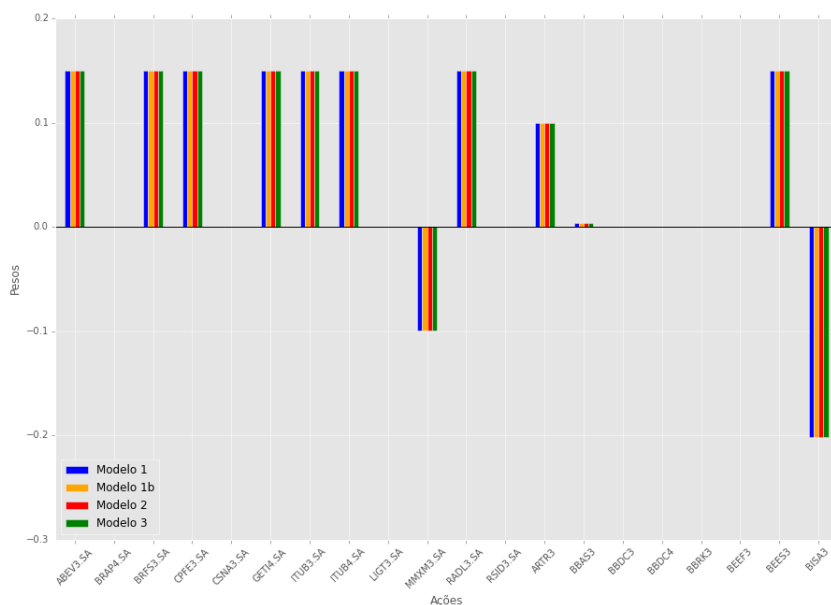


Figura 6.1: Alocação Ótima para o teste 1

A conversão de retornos diários para retornos anualizados, de forma a comparar os retornos esperados da carteira, é feita pela expressão:

$$\text{retorno anualizado (\%)} = 100 \times (\exp(\text{retorno diário} \times 252) - 1)$$

A tabela 6.1 sintetiza as principais informações dos modelos para o primeiro teste. O modelo contínuo, modelo 3, também está indicado apenas para comparação.

Os modelos misto-inteiros obtém os mesmos resultados conforme era esperado. Contudo, é necessário mais testes para verificar se o comportamento se mantém. Para um segundo teste, num período de tempo distinto do anterior, a alocação ótima e os resultados encontrados foram os seguintes:

Constata-se que os modelos misto-inteiros apresentam comportamentos seme-

Tabela 6.1: Resultados para o teste 1

	Modelo 1	Modelo 1b	Modelo 2	Modelo 3
Retorno Esperado da Carteira	24.8221427	24.8221427	24.8221427	24.8221427
Variáveis	102	82	108	88
Restrições	208	148	172	131
Correlação	0.29371635	0.29371471	0.29371245	0.29384955
Tempo de Resolução (seg)	2455.34	115.74	224.01	16.77

Tabela 6.2: Resultados para o teste 2

	Modelo 1	Modelo 1b	Modelo 2	Modelo 3
Retorno Esperado da Carteira	103.488793	103.488793	103.488793	103.488793
Variáveis	102	82	107	87
Restrições	208	148	168	127
Correlação	0.16291485	0.16232909	0.16232909	0.16292291
Tempo de Resolução (seg)	615.91	83.88	90.12	13.51

lhantes e que, a priori, o modelo 1b tem performance ligeiramente vantajosa sobre os demais modelos misto-inteiros sob o ponto de vista de menor tempo de resolução.

Cabe ainda verificar se a função objetivo com variável auxiliar tem desempenho superior a este.

6.1.2 Função Objetivo - Variável Auxiliar

Para a segunda alternativa de modificação da função objetivo, a qual é representada por uma variável auxiliar y , os resultados para teste 1 são indicados na tabela 6.3. Os mesmos parâmetros foram utilizados e o mesmo período de tempo.

Tabela 6.3: Resultados para teste 1

	Modelo 1	Modelo 1b	Modelo 2	Modelo 3
Retorno Esperado da Carteira	24.8221427	24.8221427	24.8221427	24.8221427
Variáveis	103	83	109	89
Restrições	211	151	175	134
Correlação	0.29358822	0.2935961	0.29359158	0.29373388
Tempo de Resolução (seg)	3057.01	88.68	263.85	6.25

A alocação ótima para o período foi:

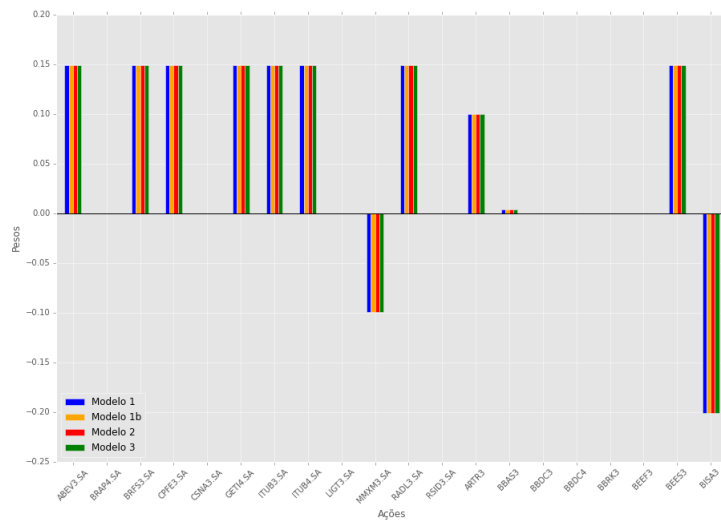


Figura 6.2: Alocação Ótima para teste 1

Constata-se que, neste primeiro momento, os resultados são semelhantes entre os modelos misto-inteiros e também se comparado ao coeficiente de determinação da seção anterior.

Procede-se à realização do teste 2 para acompanhar o desempenho dos modelos, cuja alocação ótima é:

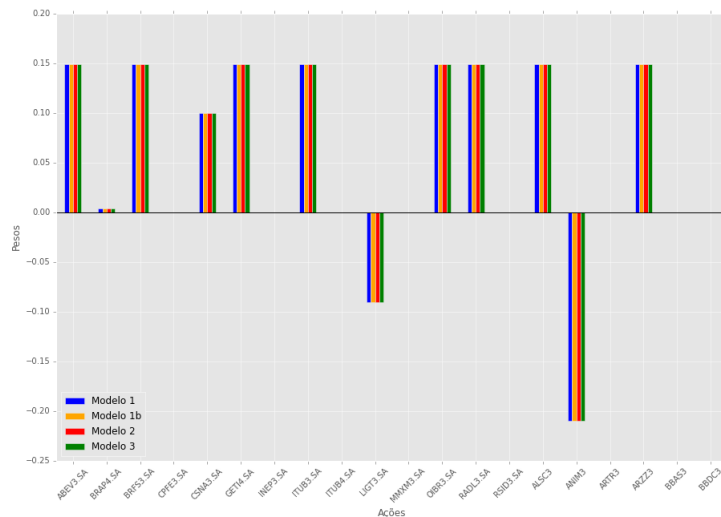


Figura 6.3: Alocação Ótima para teste 2

Os resultados estão apresentados a seguir:

Tabela 6.4: Resultados para teste 2

	Modelo 1	Modelo 1b	Modelo 2	Modelo 3
Retorno Esperado da Carteira	103.488793	103.488793	103.488793	103.488793
Variáveis	103	83	108	88
Restrições	211	151	171	130
Correlação	0.16232802	0.16232802	0.16232802	0.16232803
Tempo de Resolução (seg)	758.28	5.8	74.29	5.91

Comparando-se os resultados com os testes da função objetivo com coeficiente de determinação, constata-se que os modelos misto-inteiros apresentam os mesmos resultados. Entretanto, com a variável auxiliar o tempo de resolução dos modelos cai substancialmente, inclusive no modelo contínuo.

Todos os modelos foram capazes de encontrar soluções. Além disso, os modelos misto-inteiros apresentaram alocações muito semelhantes.

Conclui-se que, dentre os modelos mistos-inteiros, o modelo 1b apresentou melhores tempos de resolução. Já o modelo 1 apresenta o maior tempo de resolução devido, principalmente, ao aumento de variáveis inteiras. O modelo 2 apresentou-se de maneira similar ao modelo 1b, contudo os tempos de resolução foram maiores provocado pelo aumento do número de variáveis e de restrições.

Em termos da função objetivo, tanto para os modelos mistos-inteiros quanto para o modelo contínuo, a variável auxiliar tem o menor tempo de resolução e será utilizada neste trabalho.

Por fim, serão utilizados os modelos: 1b e 3. O modelo 3, que possui apenas variáveis contínuas, será chamado, a partir de então, de modelo contínuo simplesmente. O modelo 1b, que foi o escolhido dentre os modelos MINLP, será chamado de modelo misto-inteiro usando a variável auxiliar como função objetivo.

6.2 Comparação de Desempenho entre os Modelos Misto-Inteiro e Contínuo

6.2.1 Resultados *in-sample*

Como era esperado, o tempo de resolução do modelo misto-inteiro é muito superior ao modelo contínuo. Evidentemente que, ainda que os modelos misto-inteiros demorem mais a gerar os resultados, caso estes resultados sejam melhores que os resultados do modelo contínuo, valeria à pena usá-lo.

As figuras 6.5 e 6.4 elucidam os valores do coeficiente de inclinação da reta gerada, por meio de regressão linear, que representa o beta da carteira gerada no

período *in-sample* de 01/05/2014 usando os parâmetros descritos no Capítulo 5.

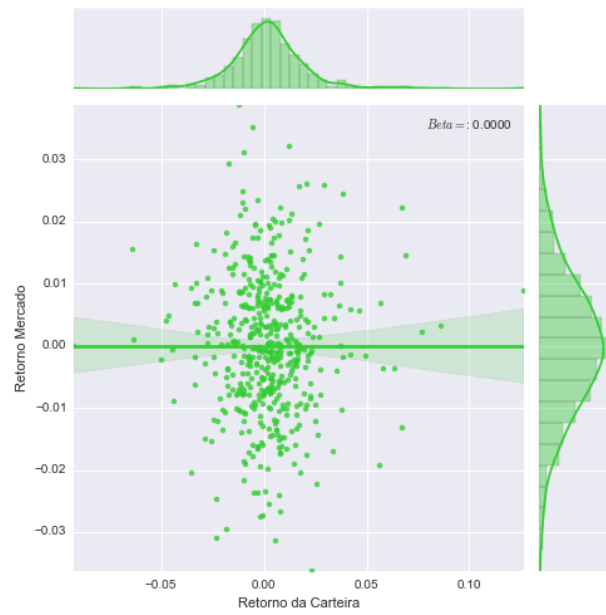


Figura 6.4: Beta da Carteira - Modelo Misto-Inteiro

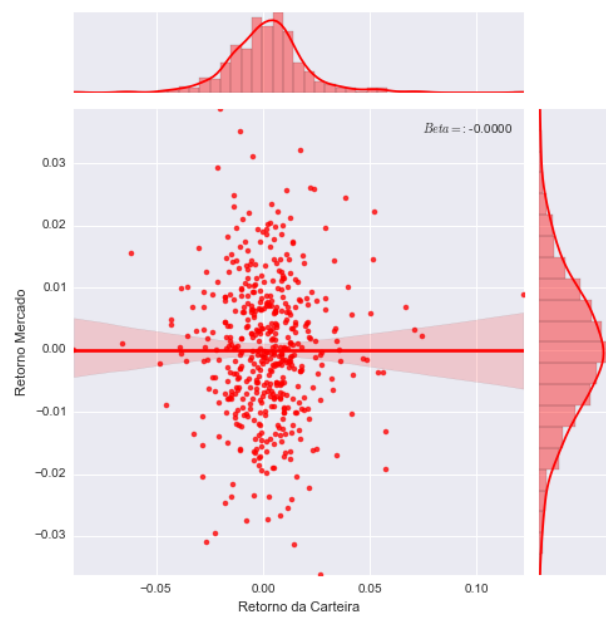


Figura 6.5: Beta da Carteira - Modelo Contínuo

Nas figuras acima é possível verificar que a distribuição do retorno das carteiras aparenta ser não normal. Testes estatísticos foram realizados a um nível de significância de 5% a fim de verificar a hipótese de que a distribuição seja normal. Sendo:

$$\text{p-valor} = P[\chi^2 > \chi_{obs}^2 | H_0]$$

Onde χ^2 é o valor do qui-quadrado e χ_{obs}^2 é o valor encontrado para a amostra. E JB representa o valor encontrado no teste de Jarque-Bera, [70].

Tabela 6.5: Teste de Hipótese para Distribuição Normal

	MINLP		NLP	
		p-valor		p-valor
Curtose	7.77	7.99E-19	7.77	5.26E-18
Assimetria	4.43	9.47E-06	4.39	1.13E-05
Qui-quadrado	79.9	4.34E-18	79.6	5.26E-18
JB	1766.7	0	1742.8	0

Constata-se que todos os valores de p-valor são inferiores a um nível de significância de 5%, portanto rejeita-se a hipótese de que a distribuição seja normal.

O valor da curtose maior que 3 indica que a distribuição é mais afunilada ao redor da média que a distribuição normal e que possui caudas mais longas. O valor da assimetria positivo indica que a distribuição não é simétrica em torno da média, sendo mais inclinada para a direita, isto é, a distribuição é assimétrica à direita.

De acordo com Rockafellar e Uryasev [33] e ratificado por Uryasev *et al.* [34], uma carteira que utiliza do AVaR como medida de risco pode ter um comportamento equivalente à carteira de Markowitz, que utiliza a variância como medida de risco, no que se refere à otimalidade caso a distribuição de perdas se ja normal. Caso a distribuição seja não normal, conforme apresentado neste trabalho, a carteira cuja medida de risco é o AVaR se comporta melhor.

Em seu trabalho Hafsa [28] relata que a variância não é uma apropriada medida de risco quando os retornos não apresentam distribuição normal e verifica que uma carteira com AVaR apresenta melhores resultados, em termos de retorno esperado e de risco ajustado ao retorno, quando a distribuição é assimétrica. Neste sentido, nas seções seguintes será introduzida a medida de de risco AVaR aos modelos propostos a fim de verificar o comportamento da carteira gerada.

6.2.2 Resultados *out-of-sample*

Enquanto que o *backtest* estático verifica o desempenho da carteira sem fazer qualquer intervenção, o *backtest* dinâmico faz a intervenção com uma periodicidade definida a critério do investidor. A esta intervenção atribui-se o nome de rebalance-

amento.

A cada rebalanceamento o modelo é chamado para se verificar os novos pesos atribuídos às ações previamente escolhidas e, até mesmo, novas ações poderão ser escolhidas. Para Xiong *et al.* [71] não somente as novas alocações são importantes, mas também o gerenciamento ativo da carteira que se preocupa com o retorno sobre o *benchmark*. Evidentemente, há custos envolvidos nestas transações de compra e de venda que podem impactar significativamente no resultado final.

Nesse sentido, é importante verificar os custos envolvidos e também a periodicidade de rebalanceamento de forma a maximizar o resultado final. Neste trabalho, veremos o impacto destes dois parâmetros no desempenho das carteiras mais adiante.

Realizar uma comparação entre as carteiras geradas no modelo misto-inteiro ou no modelo contínuo usando como referência apenas os resultados *in-sample* não são suficientes. Com o *backtest* é possível verificar o comportamento das carteiras em um período de tempo mais longo e, dessa forma, obter resultados suficientes para uma justa comparação.

Nesse sentido, as carteiras serão comparadas após 5 rebalanceamentos iniciando o período *in-sample* em 01/05/2014 e encerrando o período *out-of-sample* em 15/01/2016 usando os mesmos parâmetros definidos anteriormente.

Em cada gráfico a seguir, foram apresentadas a média móvel simples de quatro meses, com exceção das figuras 6.6 e 6.7. A média móvel permite melhor visualização de tendências e remove a alta volatilidade de curto prazo dos dados.

Alguns indicadores foram selecionados para verificarmos o desempenho da carteira ao longo do tempo. O primeiro deles é o valor da carteira que pode ser calculado segundo a equação:

$$C_t = C_{t-1} e^{pt}$$

O valor da carteira do modelo contínuo é superior àquele do modelo misto-inteiro em toda a série, conforme indicado na figura 6.6.

Plotando os retornos diários acumulados na mesma figura 6.7, é possível demonstrar que somente o modelo contínuo supera, em toda a série, o *benchmark*.

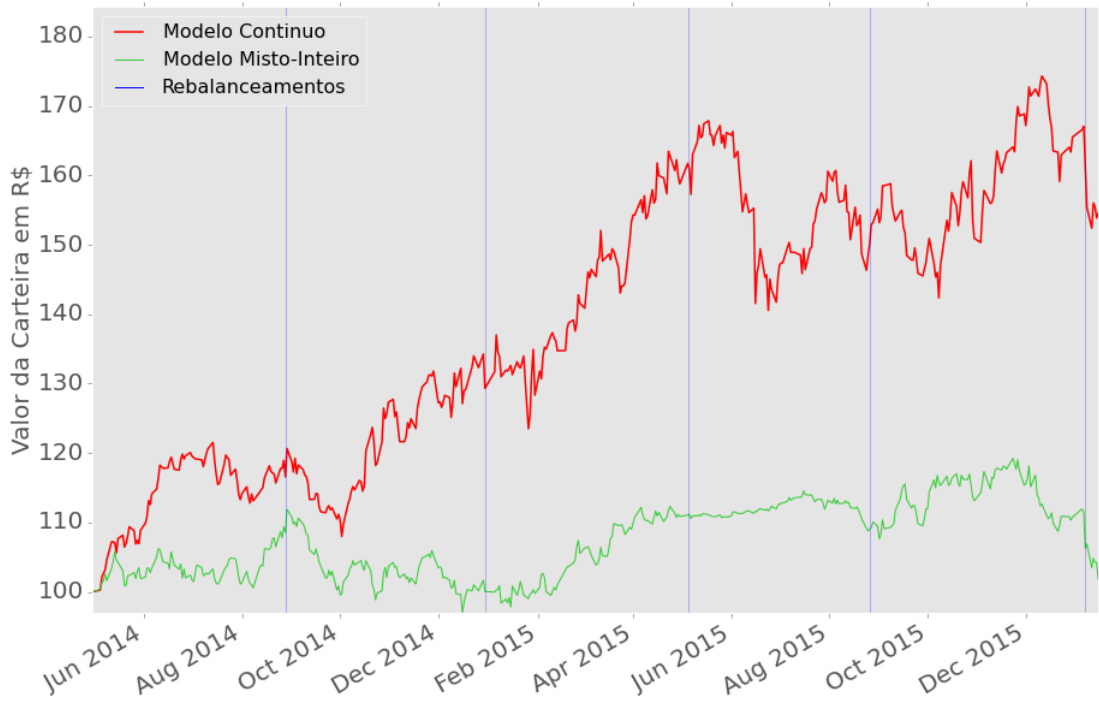


Figura 6.6: Valor das Carteiras

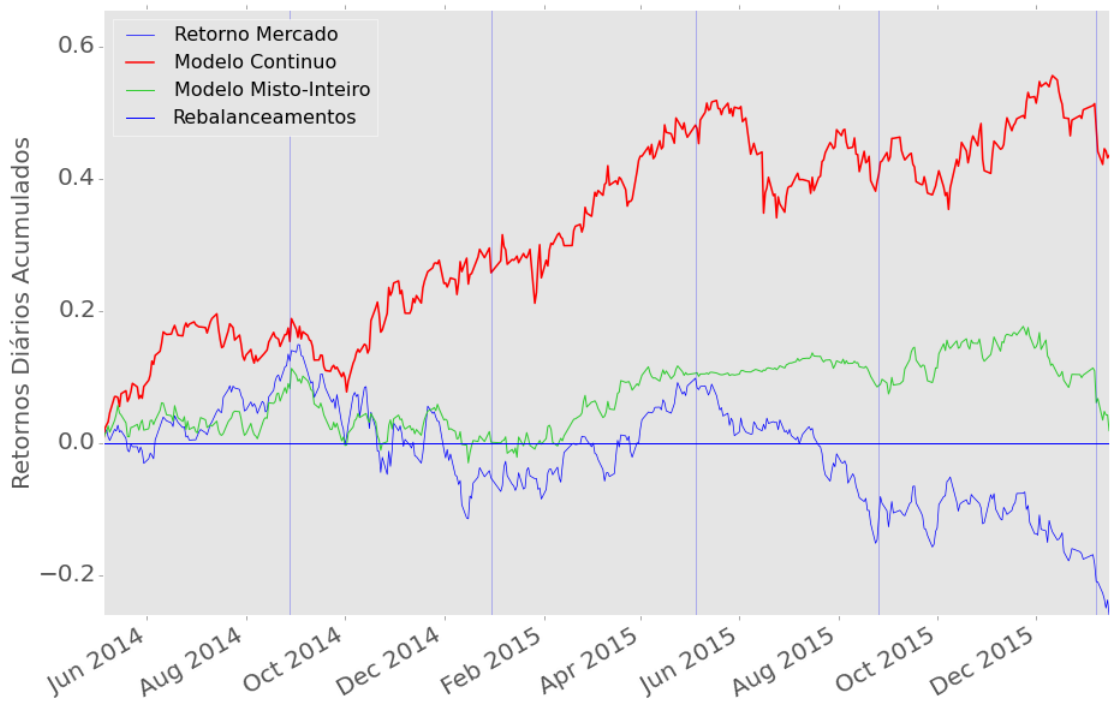


Figura 6.7: Retorno Acumulado das Carteiras

A figura 6.8 ilustra o indicador mais difundido no mundo dos investimentos,

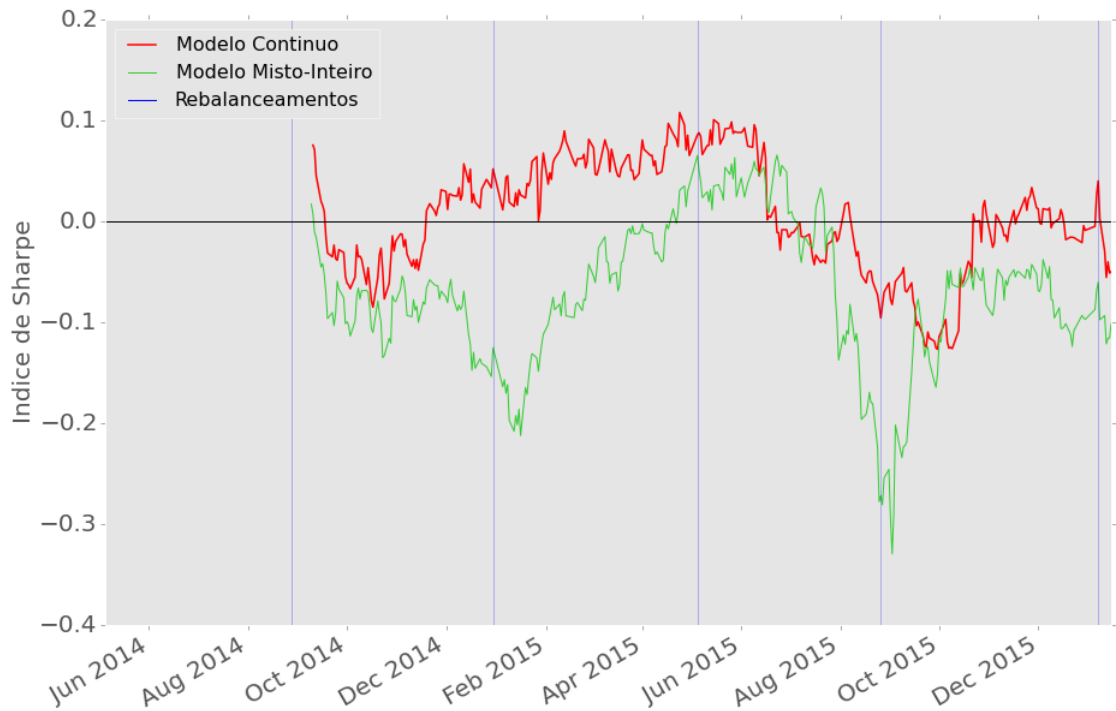


Figura 6.8: Índice de Sharpe

O índice de informação que, na visão de Le Sourd [41], quanto mais baixo estiver este índice, mais perto estará o risco da carteira do risco do mercado. Portanto, quanto maior o resíduo ou a diferença do retorno da carteira com o retorno do mercado em relação a um baixo *tracking error*, melhor.

Ambas as carteiras obtiveram bons desempenhos deste índice, mas, na média final, o modelo contínuo excedeu o modelo misto-inteiro.

No que tange ao índice de alfa de Jensen o modelo contínuo excedeu, em grande parte da série, o modelo misto-inteiro, principalmente em função da diferença entre o retorno da carteira e do CDI.

Para Le Sourd [41] o índice de Modigliani e o índice de Sharpe indicam o mesmo ranqueamento de carteiras. O índice de Modigliani também utiliza o desvio padrão como medida de risco, assim como o índice de Sharpe, e são diretamente proporcionais entre si.

O índice de Modigliani representa a medida equivalente do retorno que a carteira teria alcançado para o mesmo risco se investisse no mercado. Em praticamente toda a série, o modelo contínuo vence o modelo misto-inteiro.

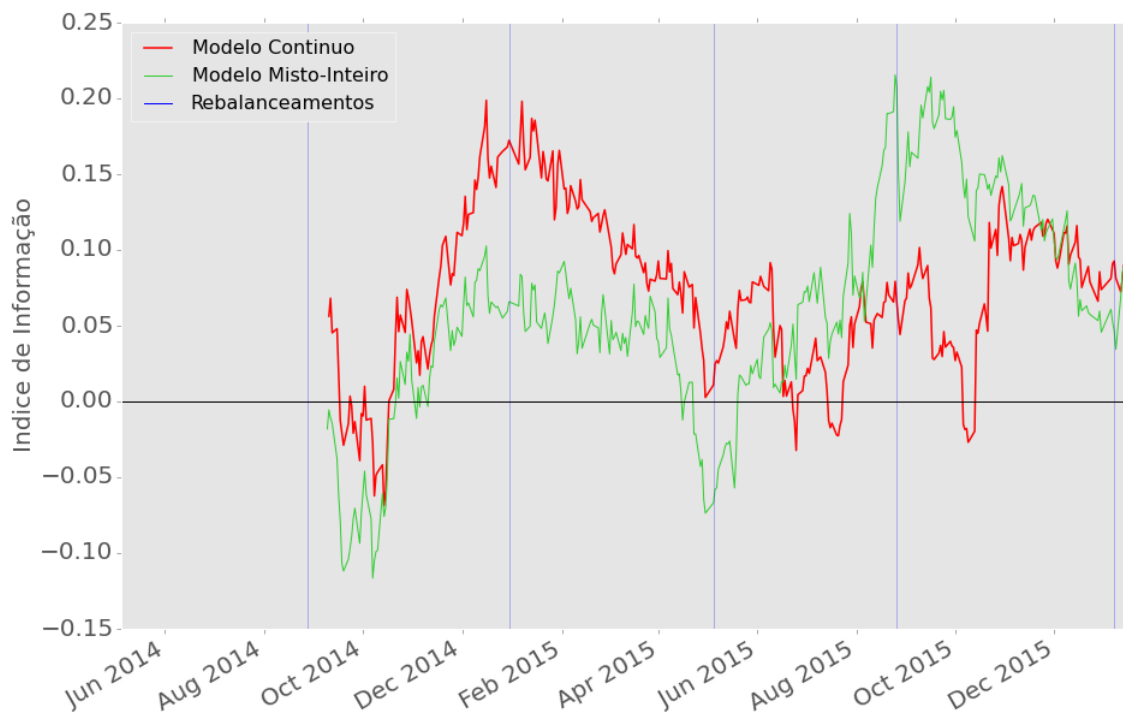


Figura 6.9: Índice de Informação

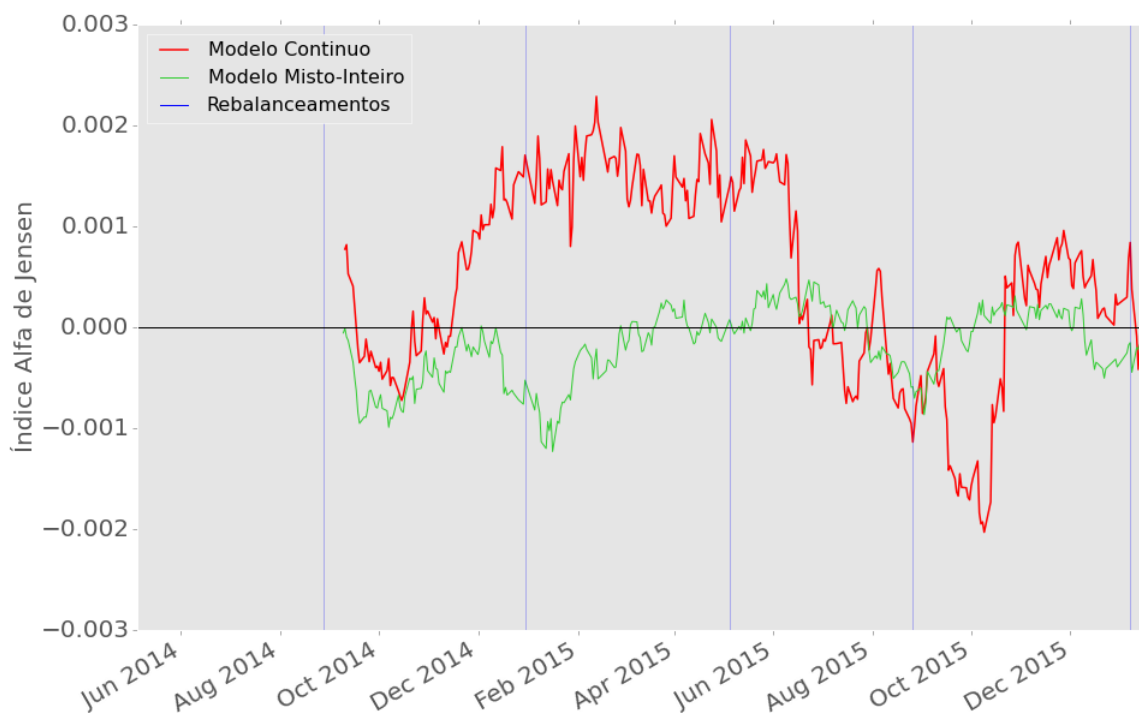


Figura 6.10: Alfa de Jensen

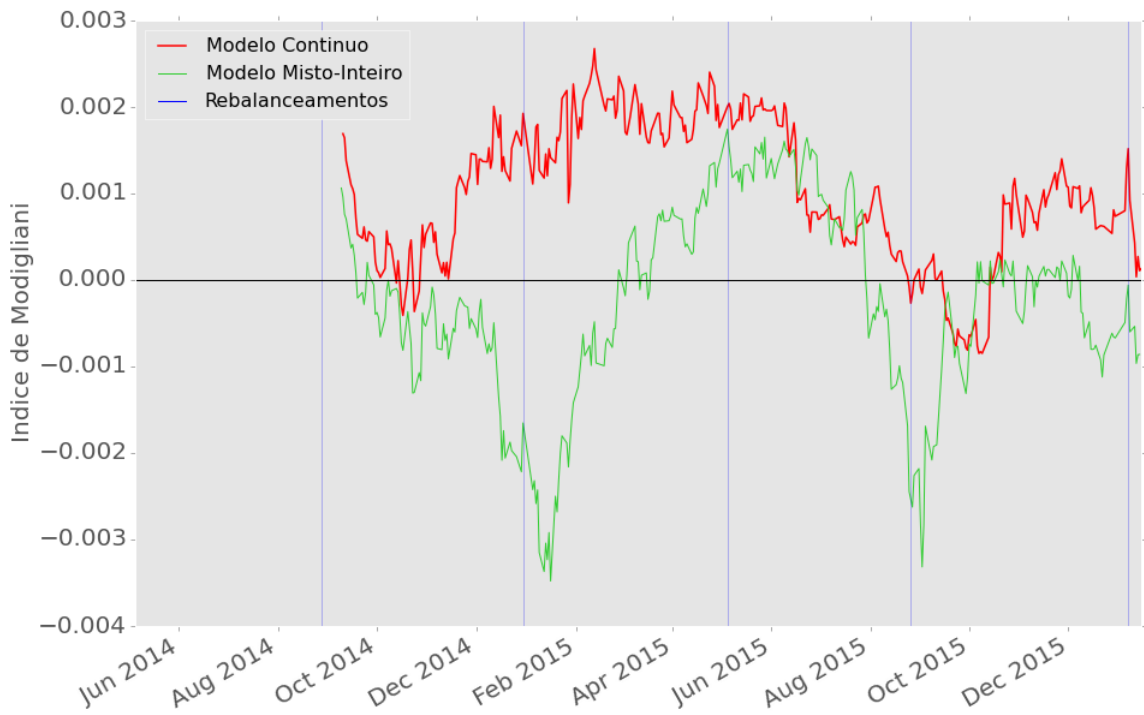


Figura 6.11: Índice de Modigliani

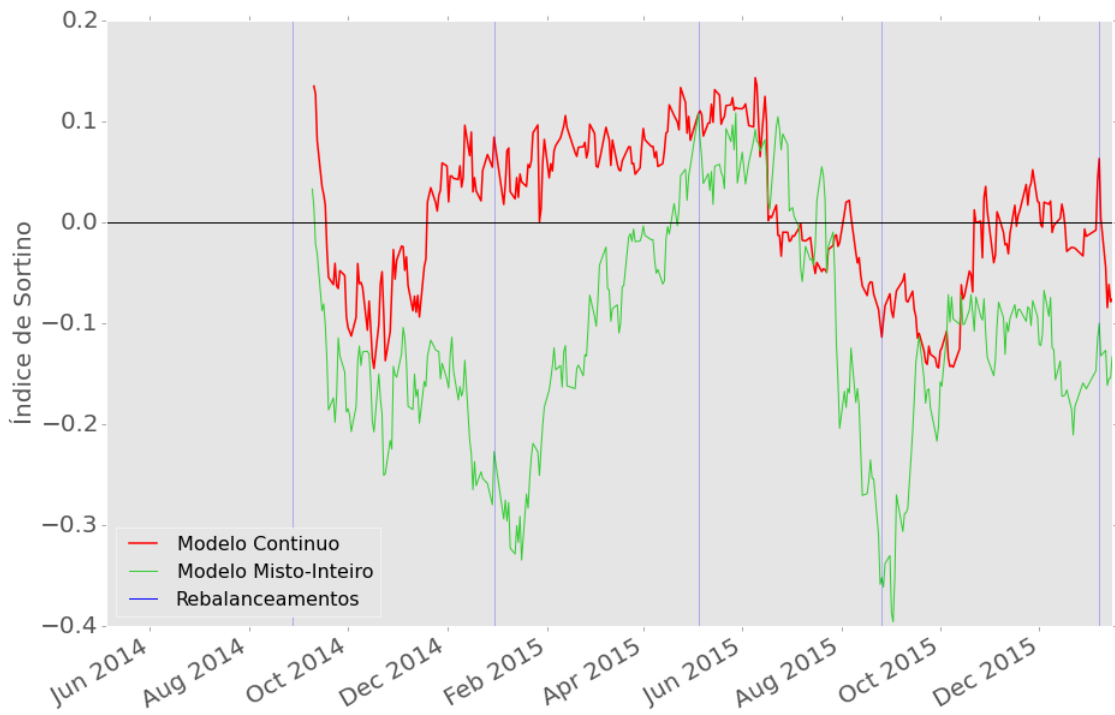


Figura 6.12: Índice de Sortino

Já o índice de Sortino é um indicador que utiliza o conceito de *downside risk* e, portanto, estaria contemplado na Teoria Pós-Moderna de Carteiras.

O índice faz a distinção da boa volatilidade e da ruim uma vez que está preocupado somente com a volatilidade abaixo da média do *benchmark* ao contrário do índice de Sharpe e demais medidas que usam o desvio-padrão que podem penalizar as volatilidades acima da média do *benchmark*.

Por fim, as figuras 6.13 e 6.14 verificam o comportamento da correlação com o mercado e do beta da carteira no período.

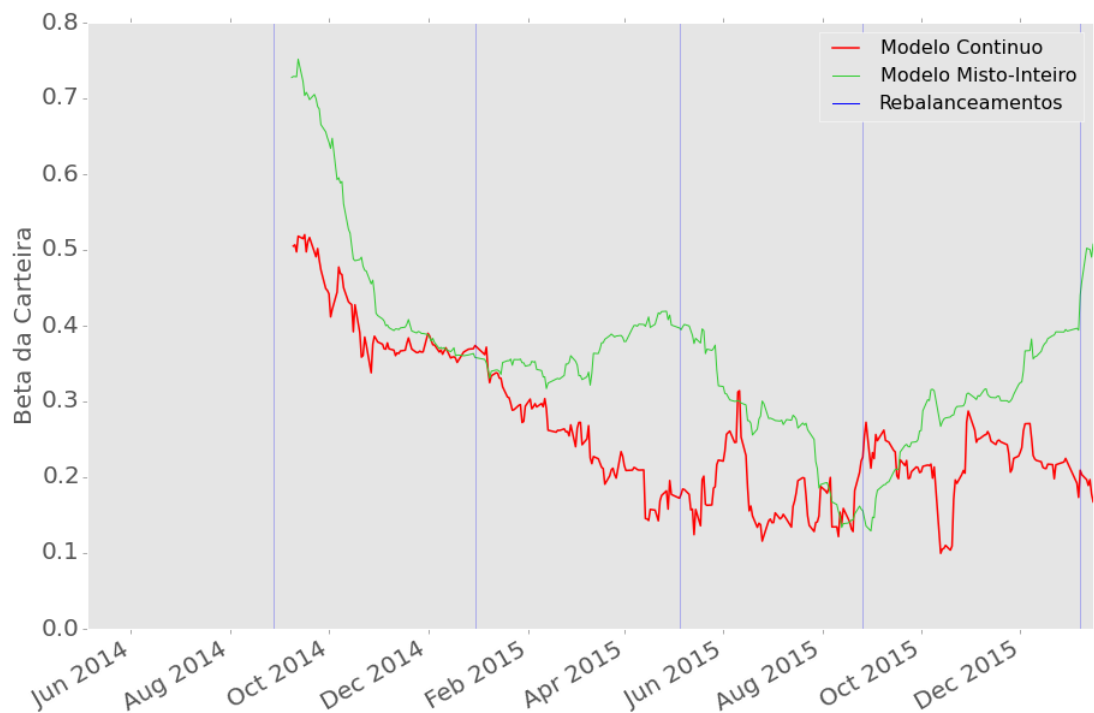


Figura 6.13: Beta

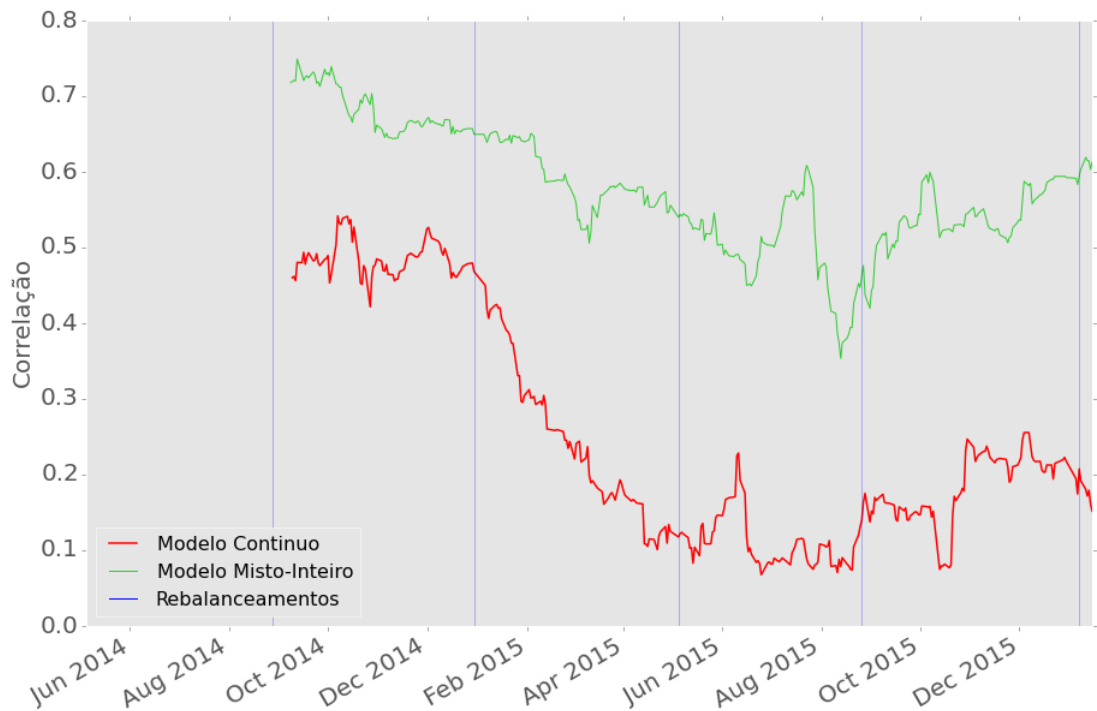


Figura 6.14: Correlação

Verifica-se, portanto, que em todos os indicadores apresentados a carteira gerada com o modelo contínuo excede a carteira gerada com o modelo misto-inteiro. A diferença fica ainda mais expressiva no que tange à neutralidade ao mercado, objetivo deste estudo. Neste sentido, o modelo contínuo passará a ser usado a partir de então onde vários parâmetros serão testados e novas restrições adicionadas como o caso da medida de risco, AVaR.

6.3 Resultados para diversos níveis de *short selling*

As carteiras que permitem *short selling* ou carteiras *long-short* constituem uma carteira comprada de *long* financiada pela carteira vendida de *short*. Os custos de transação são mais relevantes em modelos de *short selling* que nos modelos *long only* uma vez que os custos deste modelo podem ser até o dobro dos custos envolvidos nos modelos de *long only*, de acordo com Caldeira e Portugal [1]. Nesse sentido, a frequência de rebalanceamento deve ser adequada de forma a minimizar os custos sem deixar que os demais objetivos não sejam atingidos.

Nesta seção serão confrontadas as carteiras geradas desde 2010 com diversos níveis de *short selling*. Os gráficos 6.15 e 6.16 mostram que as carteiras de *long-short* assumem menores correlações e betas com o mercado se comparar às de *long only*. Nos períodos de baixa do mercado financeiro, o desempenho das carteiras é superior ao mercado, pois não acompanha seu desempenho ou não apresentam quedas tão bruscas quanto às do mercado.

Já no caso dos modelos *long only* as correlações e betas são superiores àqueles dos modelos de *long-short*. Conforme visto no capítulo 2, seria possível se obter uma carteira neutra se cada uma das ações escolhidas tivessem beta ou correlação com o mercado próximos de zero.

Entretanto, estas duas hipóteses são praticamente impossíveis de se atingir uma vez que as ações escolhidas para os modelos fazem parte do IBrX100 e, portanto, possuem betas altos e bem correlacionadas com o mercado.

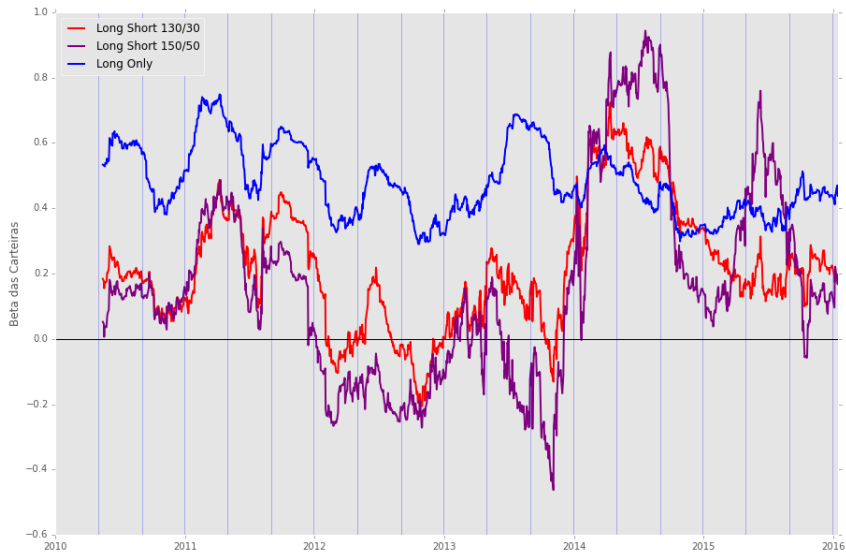


Figura 6.15: Betas das Carteiras de Long-Short e Long Only

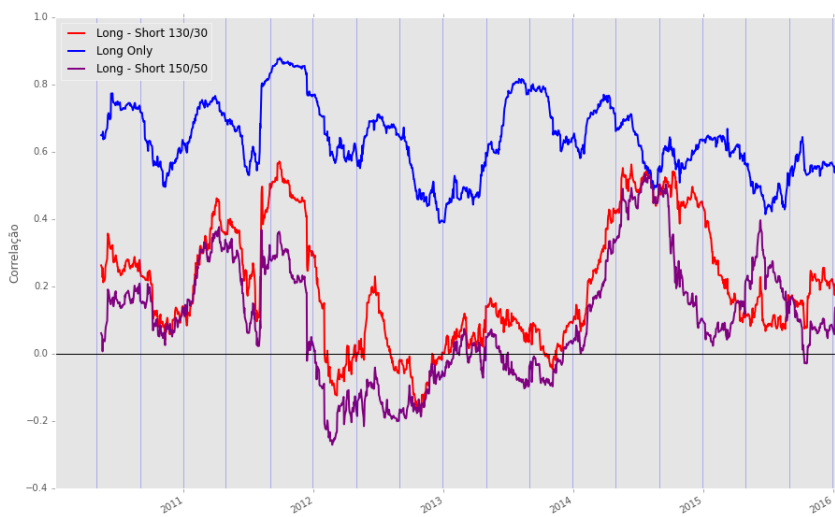


Figura 6.16: Correlação com o mercado Carteiras de Long-Short e Long Only

A figura 6.17 abaixo mostra algumas ações que fazem parte da composição do IBrX100 e seus respectivos betas de forma a ratificar o exposto anteriormente. Essas ações foram selecionadas pelo modelo de *long only* durante o ultimo rebalanceamento em 01/2016.

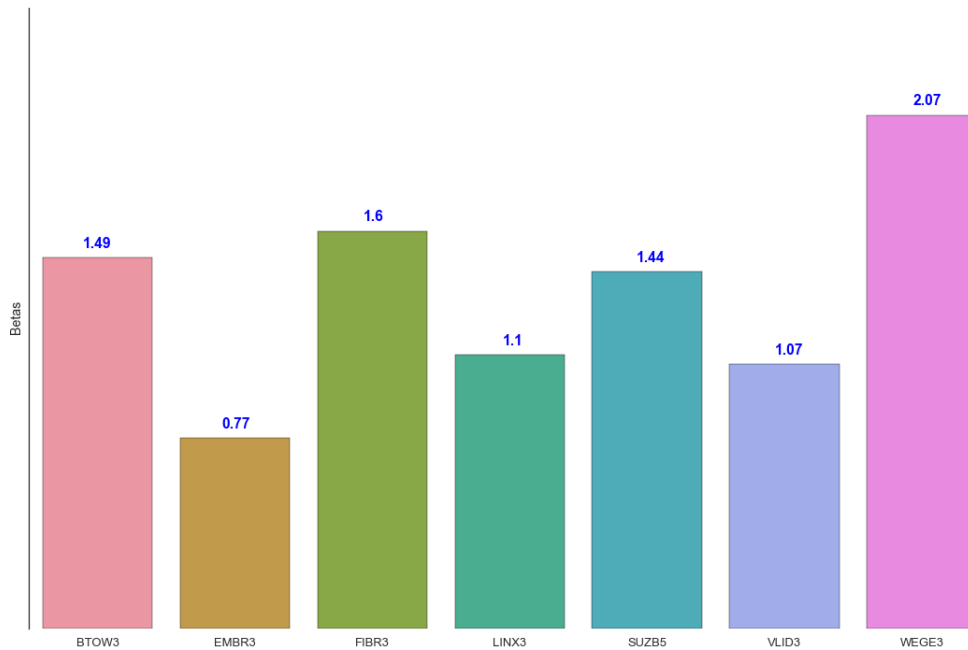


Figura 6.17: Betas dos ativos selecionados pela carteira de long only

Dessa forma, é natural que a carteira de *long only* acompanhe, em certo grau, o comportamento do mercado. E, de forma oposta, acontece com a carteira de *long-short* no mesmo período que pode usufruir o benefício de pesos negativos para se obter a neutralidade.

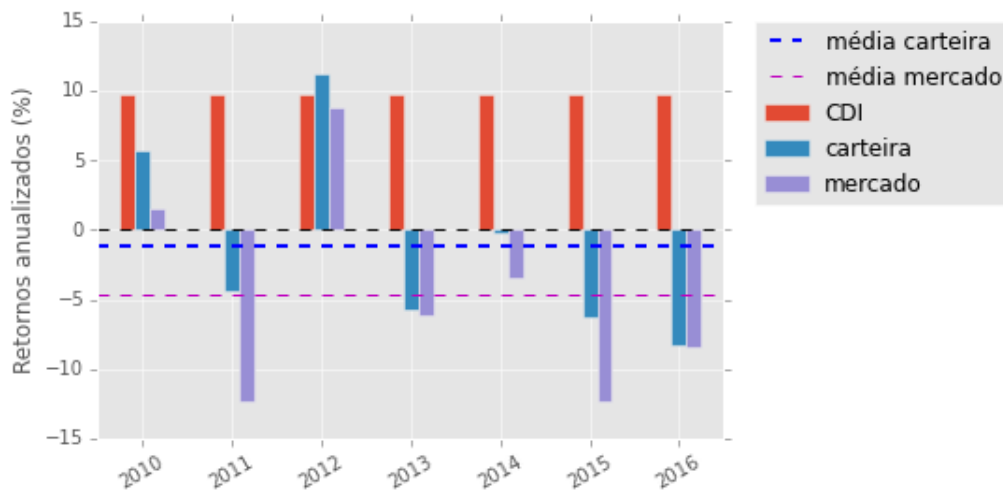


Figura 6.18: Retornos Anualizados da Carteira de Long Only

A figura 6.18 elucida claramente o acompanhamento dos retornos da carteira *long only* com os retornos do mercado.

Em termos de retorno esperado da carteira, em ambos os casos é possível superar o benchmark, porém nas carteiras de *long-short* o resultado pode ser potencializado com o recurso do *short selling*, isto é, quanto maior a disposição de se fazer *short*, maior poderá ser o retorno ao final do investimento.

Nesse sentido, à medida que o α aumenta, aumenta-se o retorno esperado da carteira conforme pode ser visto na tabela 6.6 onde todos os valores presentes são referentes às médias de todos os rebalanceamentos para cada modelo.

Mesmo para a carteira *long-only* o modelo é capaz de obter um retorno esperado para a carteira maior que o retorno do mercado, no entanto não é capaz de superar o CDI em todo o período.

Tabela 6.6: Quadro Comparativo - Médias por Rebalanceamento

Indicadores	130/30	150/50	Long Only
CAPM	0.00063022	0.00073842	0.0003764
Índice de Alfa de Jensen	0.00049642	0.00107353	-0.0003396
Beta da Carteira	0.19783626	0.15705528	0.46321664
Correlação com o Mercado	0.19221708	0.10730579	0.60778472
Alfa da Carteira	0.00127341	0.00191656	0.00016535
Índice de Informação	0.06901053	0.07851533	0.00972728
Índice de Modigliani	0.00103831	0.0013967	-0.0002459
Índice de Sharpe	0.00967961	0.03865611	-0.0859514
Índice de Sortino	0.02786252	0.05448256	-0.114175

Em relação aos indicadores para cada carteira, a tabela a seguir sintetiza as informações sobre os indicadores em todo o período de *backtest*. Assim como a tabela 6.6, os valores da tabela 6.7 também são referentes às médias de todos os rebalanceamentos para cada modelo.

Tabela 6.7: Quadro Comparativo - Média das Séries do Backtest

Indicadores	130/30	150/50	Long Only
Valor Esperado do Retorno da Carteira	0.00187612	0.00370944	0.00092942
Alfa por Rebalanceamento	0.00099628	0.0028296	4.9581E-05
Correlação por Rebalanceamento	0.07599584	1.854E-14	0.54238498
Beta por Rebalanceamento	0.05608909	0.00255093	0.41053278
Número de Ações Seleccionadas	13	14	10
Ganho da Carteira (%)	375.64852	1130.58704	-7.5231613

Percebe-se então que a carteira 150/50 tende a diversificar mais que a carteira 130/30 e esta, por sua vez, diversifica mais que a carteira *long-only*. A figura 6.19 expõe a composição setorial da carteira 150/50.

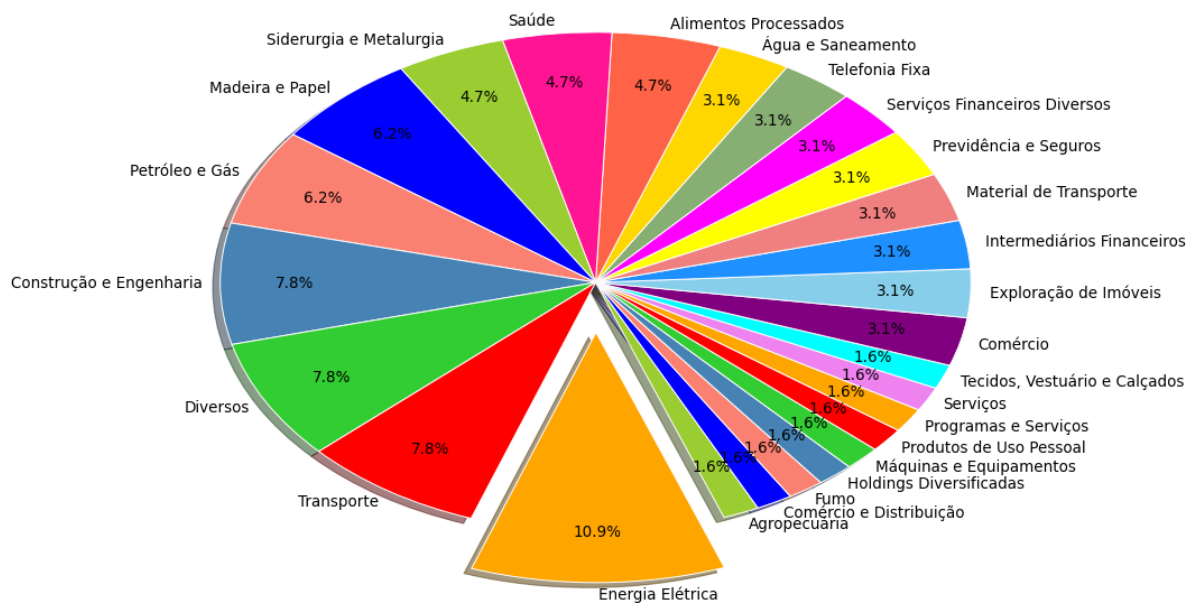


Figura 6.19: Distribuição das Ações por Setor

Se confrontada com a composição setorial da carteira 130/30 apresentada anteriormente, a carteira 150/50 apresenta o setor de Energia Elétrica como o principal setor em oposição à carteira 130/30 em que o setor de Petróleo, Gás e Biocombustíveis e os setores Diversos também figuravam isolados entre os três principais setores. Ainda sim, os setores de Transporte, Madeira e Papel, Construção e Engenharia, Diversos e Petróleo, Gás e Biocombustíveis estão entre os principais setores; mas com participação menor apontando mais uma vez para uma diversificação maior da carteira 150/50.

Os setores não cíclicos representam 78,1% da carteira formada em toda o *backtest* em contrapartida à carteira 130/30 em que estes setores representavam 80%.

Os resultados apresentados até o momento são relativos aos modelos que minimizam a correlação com o mercado de forma que o retorno esperado da carteira seja no mínimo igual ao CDI.

É possível inverter o objetivo do modelo com um viés mais propenso ao risco de modo que o objetivo seja o de maximizar o retorno esperado da carteira dado um nível aceitável de correlação estabelecida com o mercado.

No entanto, os modelos de minimização da correlação apresentam a vantagem de não precisar estabelecer um nível de correlação com o mercado para o período assegurando a obtenção de um valor para o retorno sempre superior ao CDI. Isto significa que não é preciso ter conhecimento prévio do nível de correlação para usar

o modelo. Como no primeiro teste, para níveis baixos de correlação o modelo é inviável.

Caso o investidor não deseje uma correlação ligeiramente maior com o mercado, os retornos poderão ser maiores como visto anteriormente, contudo pode-se considerar que as carteiras obtidas também sejam neutras ao mercado desde que o nível de correlação estabelecido com o mercado ainda seja relativamente baixo.

Portanto, a decisão de escolha entre um modelo e outro depende do nível de propensão ao risco e do conhecimento sobre o nível de correlação com o mercado. Cabe ressaltar novamente que este modelo pode ser inviável para determinado período em função do nível de correlação estabelecido e inviabilizar a realização do *backtest*.

Nesse sentido, o modelo de minimização da correlação pode ser considerado melhor sem precisar estabelecer este limite e dando a liberdade do modelo encontrar a menor correlação a cada rebalanceamento garantindo sempre retornos iguais ao modelo de maximização do retorno. Recomenda-se, portanto, usar o modelo de minimização da correlação.

6.4 Carteiras Neutras ao Mercado com restrição de AVaR

Como já relatado anteriormente, os modelos tradicionais de Markowitz e suas variantes que utilizam a variância como medida de risco podem penalizar tanto as “boas” volatilidades, ou seja, as volatilidades acima da média como abaixo da média. Outras medidas de risco foram introduzidas, até que VaR ganhou visibilidade; mas o mesmo atende a todas as propriedades para que seja considerado uma medida coerente de risco. Assim, o AVaR, apresentado no Capítulo 2, rouba a cena e começa a ser empregado.

Ao se utilizar desta medida de risco, deve-se estabelecer um nível de confiança para o modelo. Além disso, deve-se verificar a distribuição dos retornos usando: distribuição histórica ou simulada.

Para o caso de uma distribuição simulada, deve-se proceder à identificação da distribuição dos retornos o que pode ser trabalhoso e incerto. Após essa identificação deve-se simular as perdas de acordo com a distribuição identificada.

Neste trabalho será utilizada a distribuição histórica da própria carteira a ser montada pelo modelo como referência para distribuição das perdas.

Da mesma forma que o exposto na seção anterior, estabelecer um nível de correlação com o mercado é uma tarefa difícil e pode incorrer a erros, ou seja, utilizar um modelo com AVaR mínimo impondo uma restrição sobre a correlação com o mercado pode acarretar em inviabilidade do modelo.

Contudo, estabelecer um nível de risco medido pelo AVaR já é mais factível até mesmo frente à variância que é comumente usada. Assim, procede-se nesta seção à análise do comportamento de uma carteira 130/30 neutra ao mercado a partir de níveis de AVaR estabelecidos pelo investidor.

A tabela 6.8 expõe os primeiros resultados de um teste realizado no período de janeiro de 2016 a diversos níveis de $AVaR_{\theta}$ (retorno) estabelecidos e de níveis de confiança θ . A primeira coluna indicada por AVaR indica o máximo AVaR permitido à carteira, isto é, o valor do parâmetro ξ . As colunas VaR e AVaR ótimo apresentam os valores ótimos encontrados pelo modelo para o VaR e AVaR, respectivamente, e a última coluna indica o retorno anualizado da carteira.

Tabela 6.8: Carteira Neutra ao Mercado com AVaR

AVaR	Nível de Confiança	VaR	AVaR ótimo	Retorno da Carteira
5%	90%	4.98%	5.00%	153.79%
	95%	4.96%	5.00%	153.79%
	99%	3.94%	5.00%	153.79%
2.50%	90%	1.85%	2.50%	153.21%
	95%	1.84%	2.49%	132.60%
	99%	2.47%	2.49%	111.01%
2%	90%	1.11%	1.99%	133.47%
	95%	1.56%	1.99%	106.92%
	99%	1.96%	1.99%	85.56%

Esta mesma carteira 130/30 gerada sem restrições de AVaR apresenta retorno anualizado de 153,81%, mas ao acrescentar a medida de de risco o retorno começa a cair e mais vertiginosamente com AVaR abaixo de 2,5%.

Verifica-se que à medida que o nível de confiança aumenta, mais propensão ao risco terá o investidor e, de forma oposta, se o nível de confiança diminui, mais avesso ao risco terá o investidor. Neste exemplo, o menor nível de confiança é 90%, ou seja, o modelo deve encontrar uma carteira com média de perdas entre as 10% piores perdas indicando uma maior faixa de amostra o que não ocorre com um nível de confiança com 99% que teria apenas 1% das piores perdas.

Nitidamente a faixa de maiores perdas é mais restrita na carteira 130/30 com AVaR a 2% e nível de confiança de 99% indicando que o investidor teria maior propensão ao risco ao permitir que o modelo tenha liberdade de arriscar mais, como mostra a figura 6.20, em oposição às carteiras geradas com nível de confiança de 95% e de 90%, indicadas nas figuras 6.21 e 6.22, respectivamente.

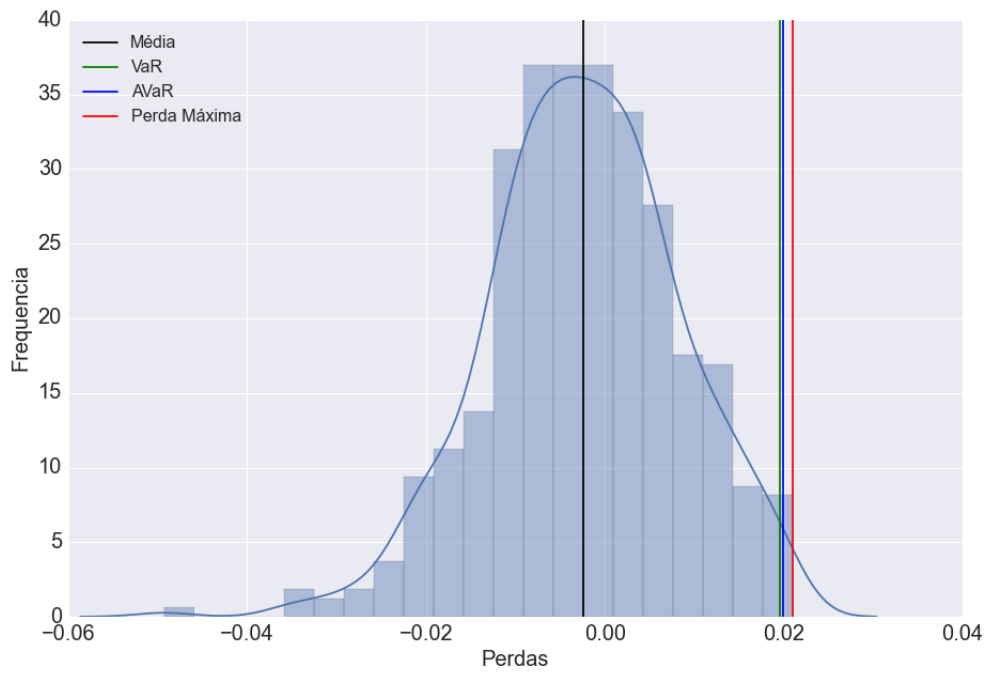


Figura 6.20: Distribuição das Perdas - Carteira 130/30 AVaR a 2% Nível de Confiança de 99%

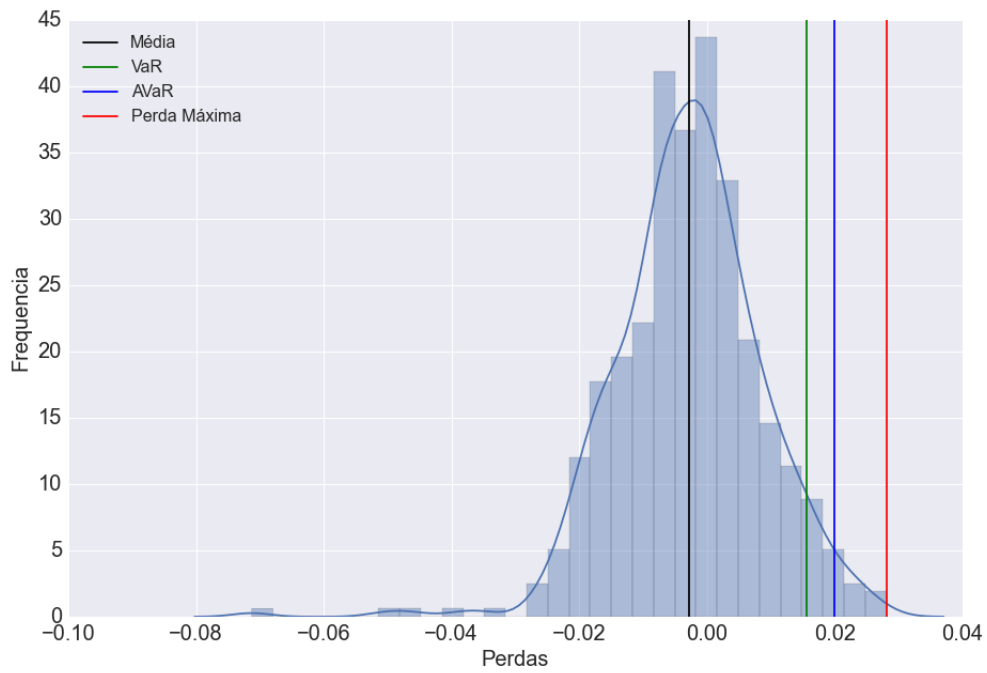


Figura 6.21: Distribuição das Perdas - Carteira 130/30 AVaR a 2% Nível de Confiança de 95%

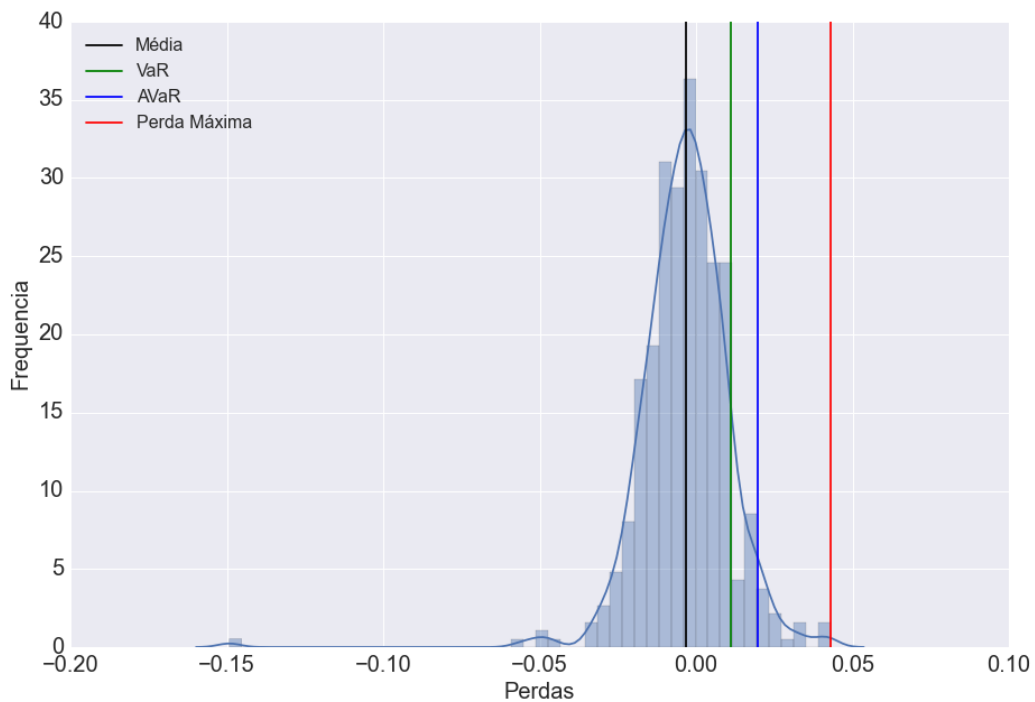


Figura 6.22: Distribuição das Perdas - Carteira 130/30 AVaR a 2% Nível de Confiança de 90%

Verifica-se claramente o *trade-off* entre o risco e retorno uma vez que se o risco estabelecido pelo AVaR é o menor possível então o retorno tende a diminuir. Comportamento idêntico ao encontrado na carteira com AVaR mínimo na seção anterior.

Conforme indicado na seção 6.2.1, a hipótese de que a distribuição da carteira seja normal foi rejeitada e ela apresenta caudas mais longas que a normal. Ao se inserir o AVaR aos modelos este quadro não muda. Para os exemplos apresentados acima os valores do teste de Jarque-Bera a um nível de significância de 5% são 566, 2241 e 14220 para as carteiras com nível de confiança de 99%, 95% e 90% e os valores de curtose e de assimetria também indicam uma rejeição à hipótese de que estas carteiras sejam normais.

A seguir será apresentado o *backtest* dinâmico para este modelo com os indicadores de desempenho da carteira comparando-as com um modelo 130/30 sem medida de risco.

6.4.1 Análise *Out-of-sample* das Carteiras com AVaR

Nesta seção será analisado o comportamento *out-of-sample* das carteiras geradas em 2011 usando nível de confiança sempre a 90% com AVaR a 2,5% e mais restrita a 1,5% além de confrontar os resultados com a carteira sem esta medida de risco.

Com a introdução da medida de risco AVaR, espera-se que a carteira tenha perdas menores, isto é, que a cauda seja menor. Comparando-se as carteiras 130/30 com e sem a medida de risco, AVaR, a 2,5% nota-se que a perda máxima é menor na carteira com AVaR conforme ilustra a figura 6.23.

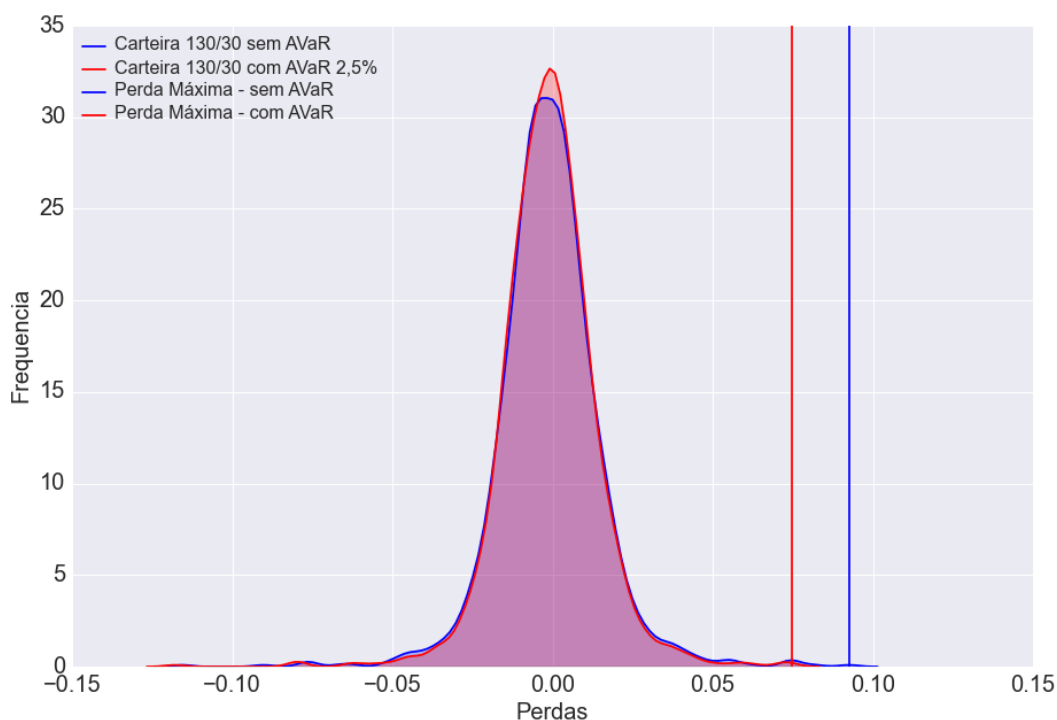


Figura 6.23: Distribuição das Perdas das carteiras 130/30 sem e com AVaR a 2,5%

A figura 6.24 apresenta as perdas das carteiras 150/50 com e sem a medida de risco para os mesmos parâmetros para o AVaR.

Plotando novamente a distribuição das perdas; mas com nível de AVaR a 1,5%, a diferença pode ser vista mais claramente, vide figura 6.25.

A característica da carteira com maior nível de *short* é que ela tem a possibilidade de maior financiamento da carteira de *long* realizando mais *short sellings* como o caso da carteira 150/50 em detrimento da carteira de 130/30.

Verifica-se que à medida que se aumenta o nível de *short*, os ganhos podem ser maiores e, para o mesmo nível estabelecido de risco com AVaR, a perda foi ainda menor.

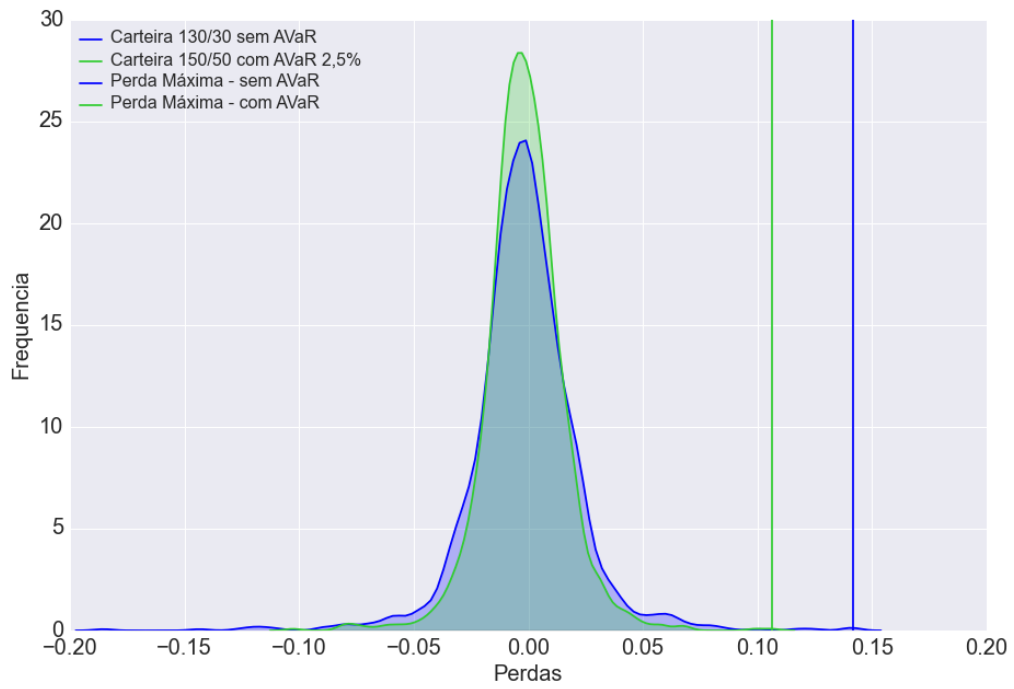


Figura 6.24: Distribuição das Perdas das 150/50 sem e com AVaR a 2,5%

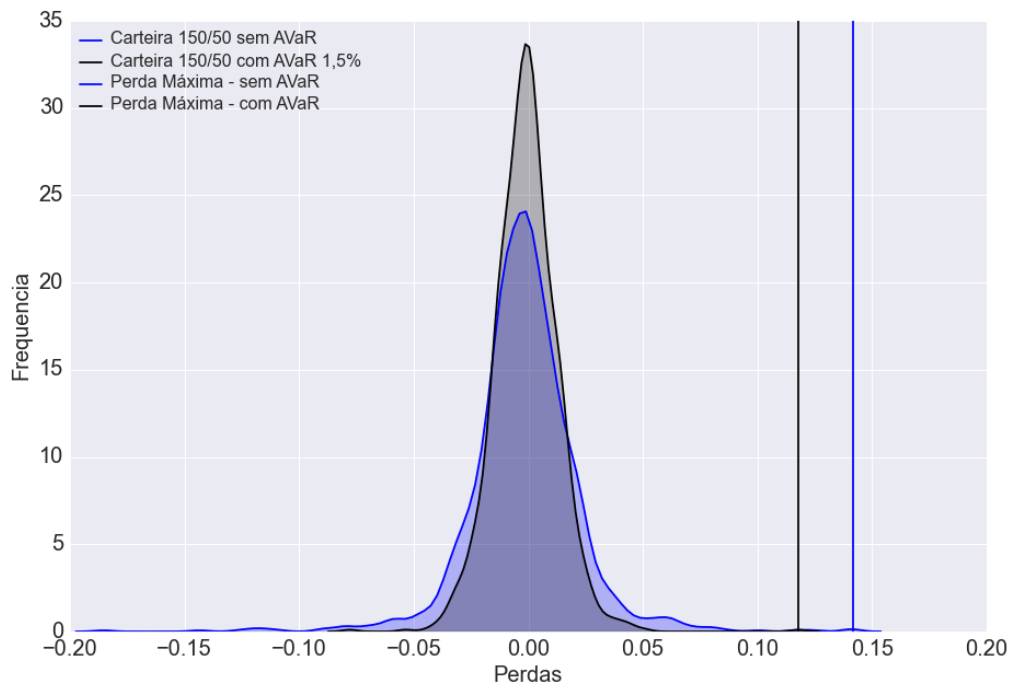


Figura 6.25: Distribuição das Perdas das carteiras 150/50 sem e com AVaR a 1,5%

As carteiras com AVaR apresentam mais afunilamento em torno da média e caudas mais finas, além de possuírem perdas máximas menores, pois foram limitadas pelo nível de AVaR estabelecido.

Comparando-se as carteiras em relação ao nível de *short selling*, a figura 6.26 apresenta a distribuição de perdas para carteiras de 130/30 e 150/50, ambas com mesmo nível de AVaR a 1,5%, juntamente com a carteira 150/50 sem risco.

O valor ideal do nível de *short* e a quantidade de rebalanceamentos podem ser respondidos em função dos custos de rebalanceamentos que serão vistos mais adiante. Cabe ao investidor averiguar sua propensão ao risco e levantar em conta os custos envolvidos.

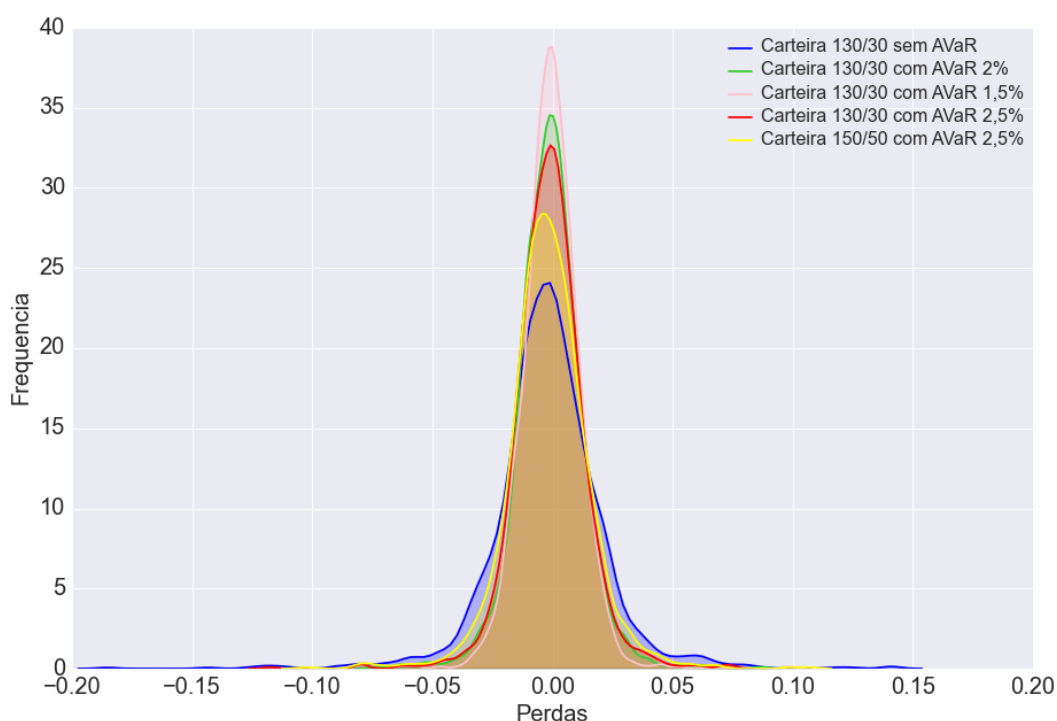


Figura 6.26: Comparação entre os modelos com e sem AVaR

A figura 6.35 ilustra a média móvel de 4 meses do retorno das carteiras 130/30 e 130/30 com AVaR a 1,5% e sem AVaR iniciando o período *in-sample* em 2011 e a tabela 6.9 agrupa todos os resultados ao longo de toda a série para efeitos de comparação.

No balanço geral, após realizados os rebalanceamentos do período *out-of-sample*, a carteira sem risco apresenta um valor final superior à aquela com risco. Evidentemente, constata-se o aparecimento do *trade-off* entre risco e retorno.

Tabela 6.9: Impacto da Inserção da Medida de Risco em uma Carteira 130/30

Indicadores	Sem AVaR	AVaR 2,5%	AVaR 1,5%
CAPM	0.000641858	0.000639152	0.000697054
Índice de Alfa de Jensen	0.000537777	0.000525343	-0.000239081
Beta da Carteira	0.213251504	0.22516893	0.166929326
Correlação com o Mercado	0.1850748	0.199277055	0.181437138
Alfa da Carteira	0.001332294	0.00131653	0.000757239
Índice de Informação	0.066309634	0.064531499	0.034903292
Índice de Modigliani	0.001078521	0.00104959	0.00054215
Média do Retorno da Carteira	0.001074151	0.001058611	0.00049932
Índice de Sharpe	0.018151817	0.014316989	-0.029182824
Índice de Sortino	0.044488255	0.041477378	-0.033612867
Ganho da Carteira (%)	245.4129982	239.6330598	78.01804404

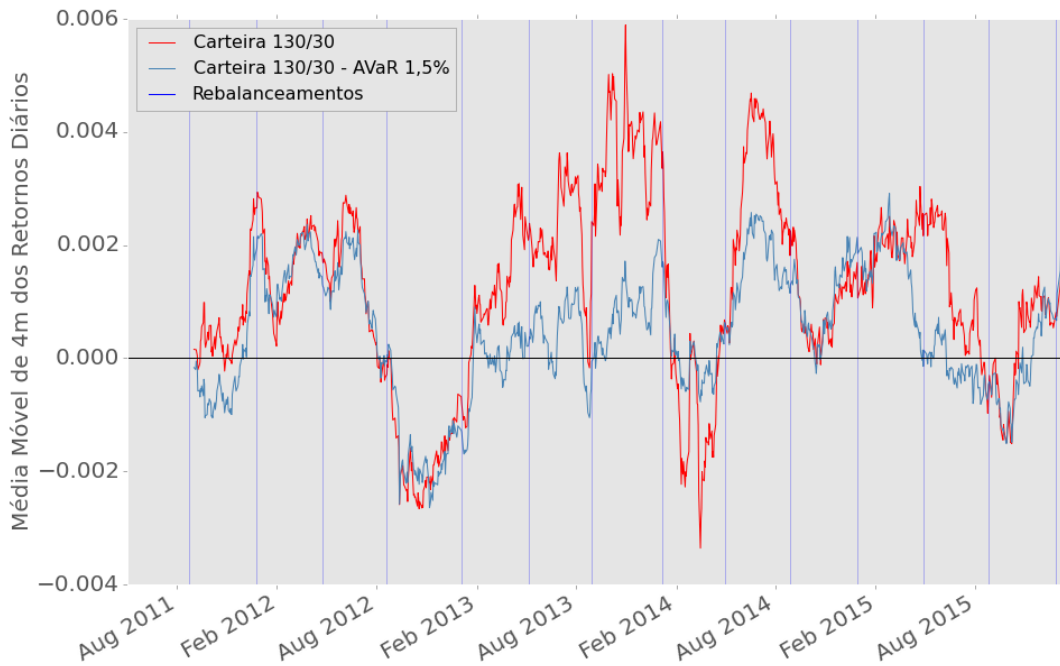


Figura 6.27: Média Móvel dos Retornos das Carteiras

Em termos de distribuição das ações selecionadas para cada setor da economia, as figuras 6.28 e 6.29 exibem este arranjo e detalha para os setores cíclicos e não cíclicos. Os resultados dizem respeito a uma carteira com AVaR a 2,5% com 90% de nível de confiança.

A carteira com AVaR tende a aumentar a diversificação e, por consequência, tende a possuir menores valores de beta (risco sistemático) em relação a uma carteira

sem essa medida de risco. Se a distribuição setorial das ações selecionadas for comparada à carteira 130/30 sem risco ilustrada na figura ??, nota-se que os setores com maiores percentagens continuam sendo os de Energia Elétrica, Petróleo, Gás e Biocombustíveis e Diversos.

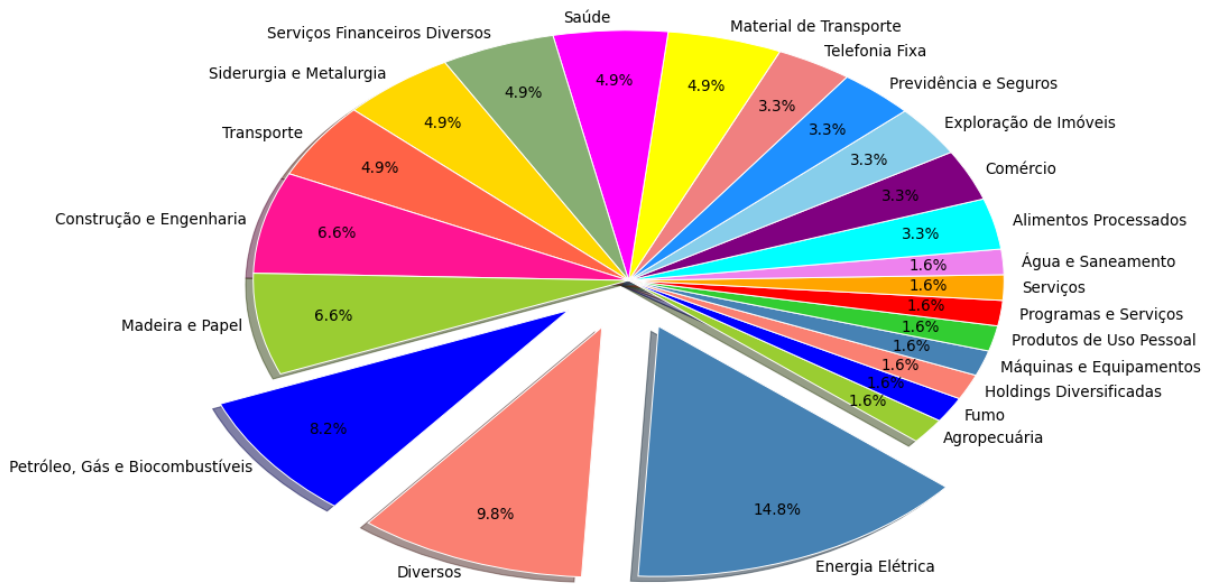


Figura 6.28: Distribuição das Ações por Setor

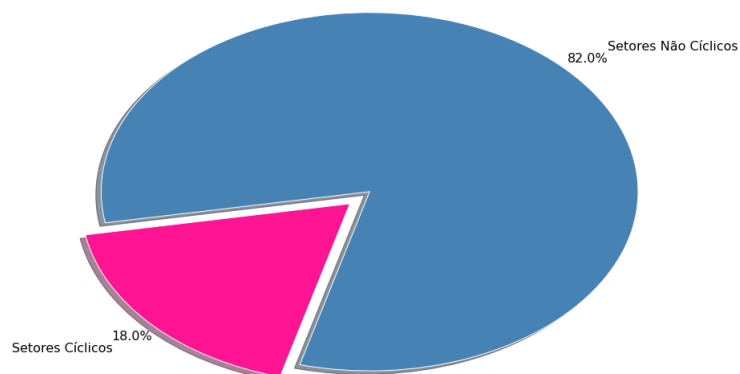


Figura 6.29: Proporção entre Setores Cíclicos e Não Cíclicos

Contudo, os setores cíclicos tiveram uma redução de 2% sinalizando que uma carteira com AVaR tende a evitar a seleção de ações destes setores.

Não somente há uma diversidade de setores selecionados, mas também a quantidade de ações selecionadas por rebalanceamento aumenta ao se acrescentar a medida de risco, AVaR. A figura 6.30 elucida a média do número de ações selecionadas para cada tipo de carteira.

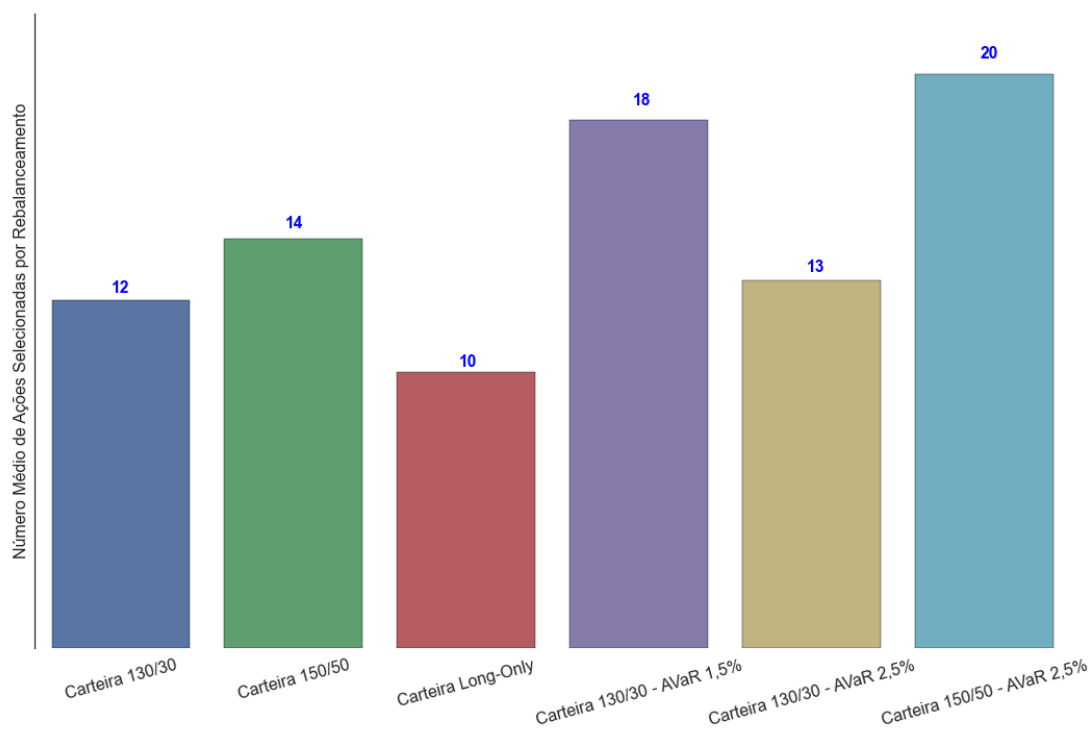


Figura 6.30: Diversificação das Carteiras

Como já relatado, com o aumento do nível de *short* as carteiras tem mais flexibilidade para obter a neutralidade ao mercado e aumenta a diversificação. Aliado a isto, uma carteira com AVaR cada vez mais restrito tende também a aumentar a diversificação.

No que diz respeito ao índice de Sharpe condicional, é de se esperar que, ao se inserir a medida de risco ao modelo, este indicador apresente melhoras. Primeiramente, é interessante realizar a comparação entre as carteiras geradas sem a restrição de AVaR tanto para 130/30, figura 6.31, quanto para 150/50, figura 6.32. Ambas as figuras representam uma média móvel de 4 meses.

As diferenças ficam mais significativas nas carteiras de 150/50. Obviamente, quanto menor o AVaR imposto à carteira, maior será o indicador conforme indica a figura 6.32.

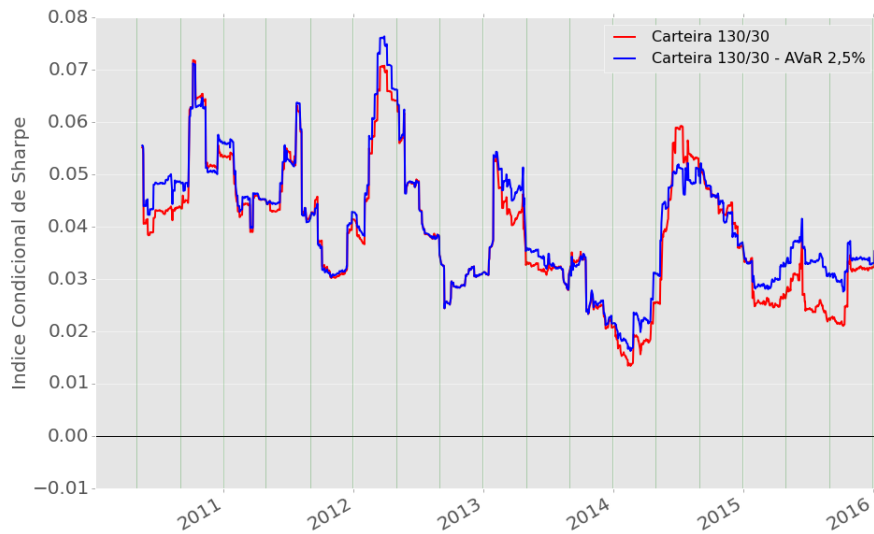


Figura 6.31: Índice de Sharpe Condicional - Carteiras 130/30

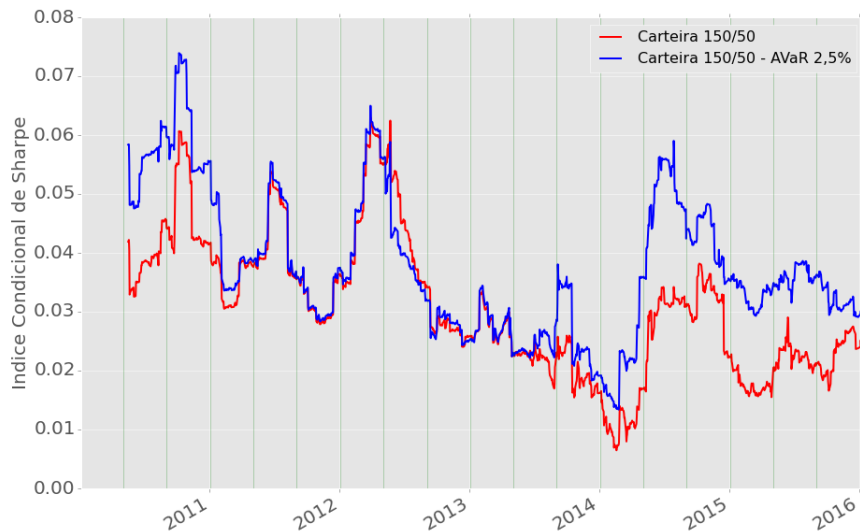


Figura 6.32: Índice de Sharpe Condicional - Carteiras 150/50

6.5 Comparação com as Carteiras Beta-Zero

Uma forma alternativa e mais comumente usada de se obter carteiras neutras ao mercado é a de limitar o beta da carteira a níveis baixos acrescentando-se restrições aos modelos tradicionais de Markowitz. Ao invés disso, Valle *et al.* [3] apresentaram um modelo que minimiza o beta da carteira sujeito às mesmas restrições dos demais

como forma de comparação ao modelo proposto por eles. No entanto, não há muitas informações sobre este modelo chamado de beta-zero. Nesse sentido, também serão confrontados os modelos aqui apresentados com o modelo beta-zero, adicionando-se as restrições de risco com o AVaR. Portanto, o modelo beta-zero é:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar} && |\sum_{i=1}^N \beta_i w_i| \\
 & \text{sujeito a:} && \\
 & && u + \frac{1}{1-\theta} \sum_{t=0}^T z_t \leq \xi \\
 & && z_t \geq 0, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T \\
 & && z_t + p_t + u \geq 0, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Onde o beta da carteira é a soma ponderada dos betas dos ativos selecionados sujeitos às mesmas restrições que os modelos propostos anteriormente com a limitação sobre o AVaR da carteira.

O chamado modelo beta-zero ou beta-zero que produz uma carteira com menor beta possível, é um modelo de menor complexidade que os demais uma vez que não é preciso calcular a correlação da carteira com o mercado. Ao invés disso, utiliza-se dos betas dos ativos disponíveis para produzir a carteira que são calculados separadamente, ou seja, podem ser considerados como dados de entrada desse modelo.

Como os modelos anteriores também geram carteiras neutras ao mercado, resta compará-los e extrair as maiores informações possíveis. Para isto, o desempenho das carteiras são plotadas de forma conjunta de forma a facilitar a visualização das semelhanças entre as carteiras 150/50 e o modelo beta-zero, também com 150/50, ambas com AVaR de 2,5% para um nível de confiança de 90% com período *in-sample* iniciando em 2011.

A figura 6.33 retrata o desempenho dos retornos acumulados ao longo de toda a série. Enquanto o mercado gera resultados ínfimos, ambas as carteiras geram resultados extraordinários. No entanto, o modelo proposto que gera a carteira 150/50 supera significativamente a carteira beta-zero.

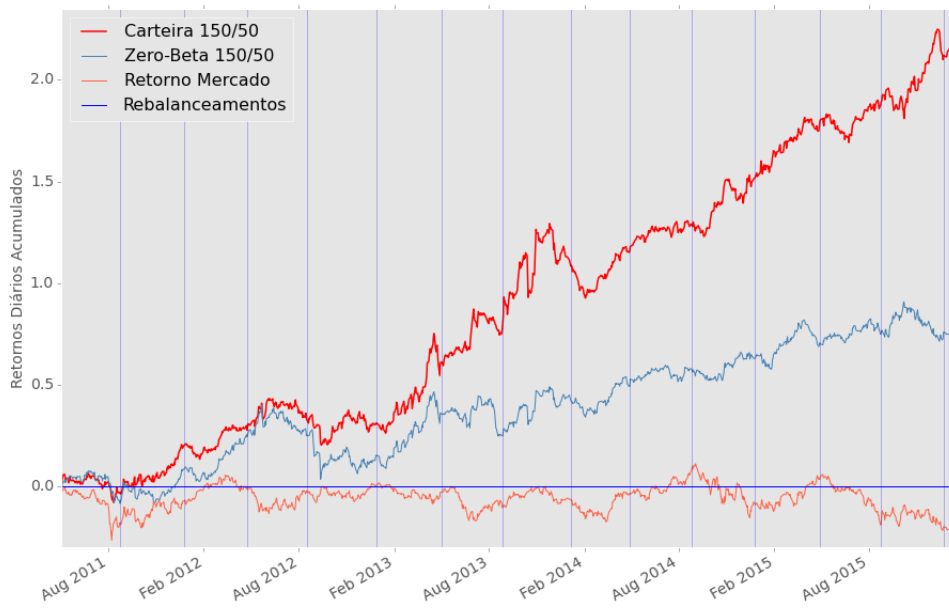


Figura 6.33: Retornos Acumulados das Carteiras

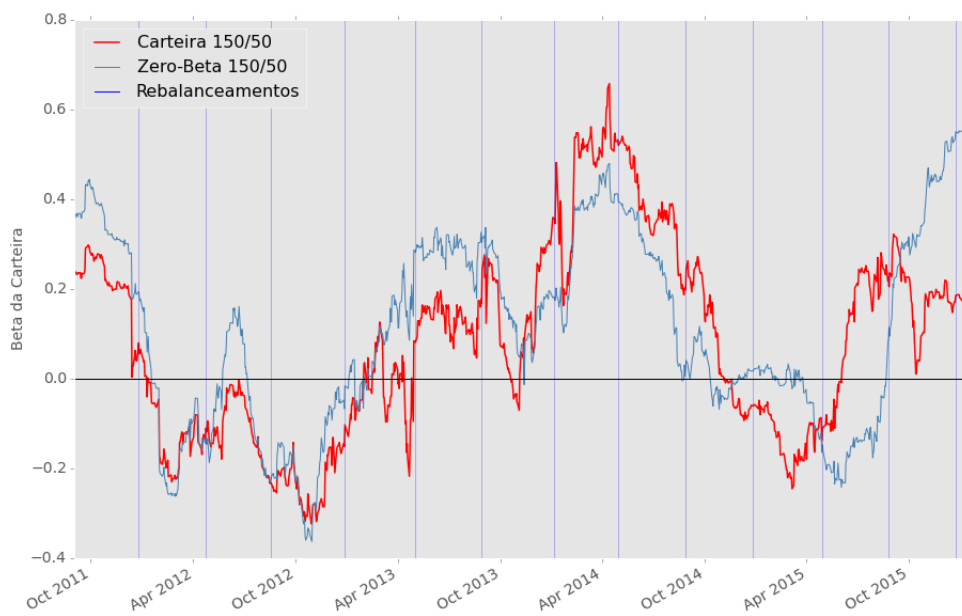


Figura 6.34: Beta das Carteiras

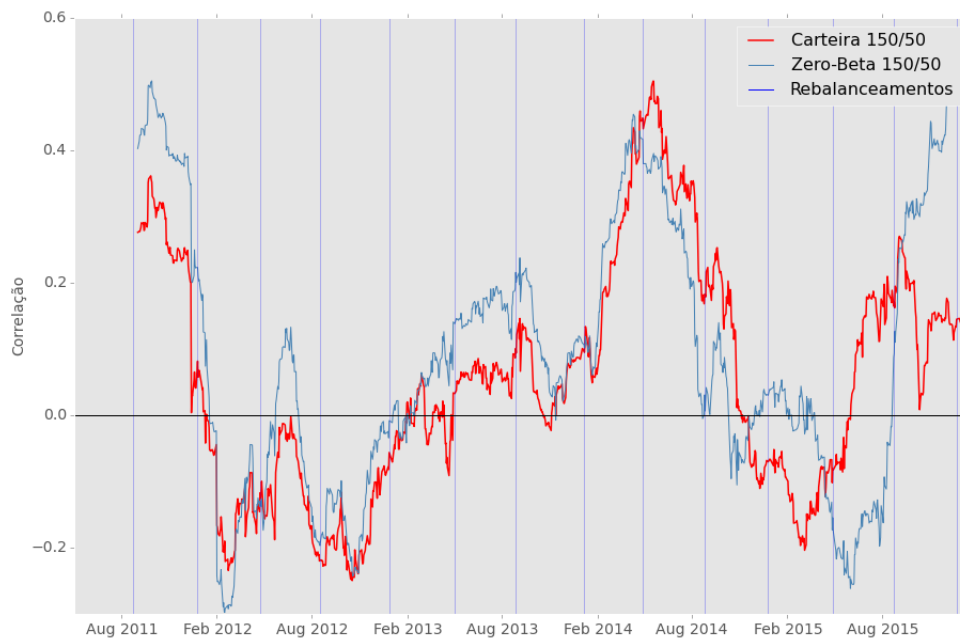


Figura 6.35: Correlação com o Mercado das Carteiras

Na tabela 6.10 encontram-se as médias para toda esta série de forma a balizar o exposto anteriormente sobre a grande diferença do modelo proposto sobre o modelo beta-zero.

Tabela 6.10: Comparação com Modelo beta-zero com AVaR a 2,5%

Indicadores	Carteira 150/50	beta-zero 150/50
CAPM	0.000763488	0.000684412
Índice de Alfa de Jensen	0.001117332	4.41611E-05
Beta da Carteira	0.083105379	0.106657265
Correlação com o Mercado	0.056271725	0.092550062
Alfa da Carteira	0.002072449	0.000877437
Índice de Informação	0.08559741	0.046112667
Índice de Modigliani	0.001584729	0.000749537
Valor Esperado do Retorno da Carteira	0.001814307	0.000619518
Índice de Sharpe	0.053546958	-0.005799718
Índice de Sortino	0.094699913	-0.000624246
Ganho da Carteira (%)	711.4967316	104.5297444

Desta forma é possível concluir que o modelo proposto neste trabalho supera, no que se refere à neutralidade em relação ao mercado, o modelo beta-zero que é um modelo mais tradicional na literatura. Além disso, corrobora com a constatação de Valle *et al.* [3] de que este modelo gera resultados iguais ou melhores que o modelo beta-zero.

6.6 Carteiras Neutras ao Mercado com Custos de Transação

Nas seções anteriores os modelos propostos foram confrontadas com novas restrições e outros modelos. Agora exploraremos o impacto da inserção dos custos de transação aos modelos.

Não será discutido qual a porcentagem adequada de custos de transação que devem ser aplicadas às transações do mercado acionário brasileiro. Os custos de transação serão considerados como uma porcentagem de 0,10% e de 0,15% da compra e da venda dos ativos.

Segundo Alexander *et al.* em [72], em uma carteira de AVaR mínimo o risco tende a aumentar à medida que os custos aumentam assim como o número de ações selecionadas.

As figuras 6.36 e 6.37 mostram o impacto da inserção dos custos de transação e da medida de risco na distribuição de perdas das carteiras geradas.

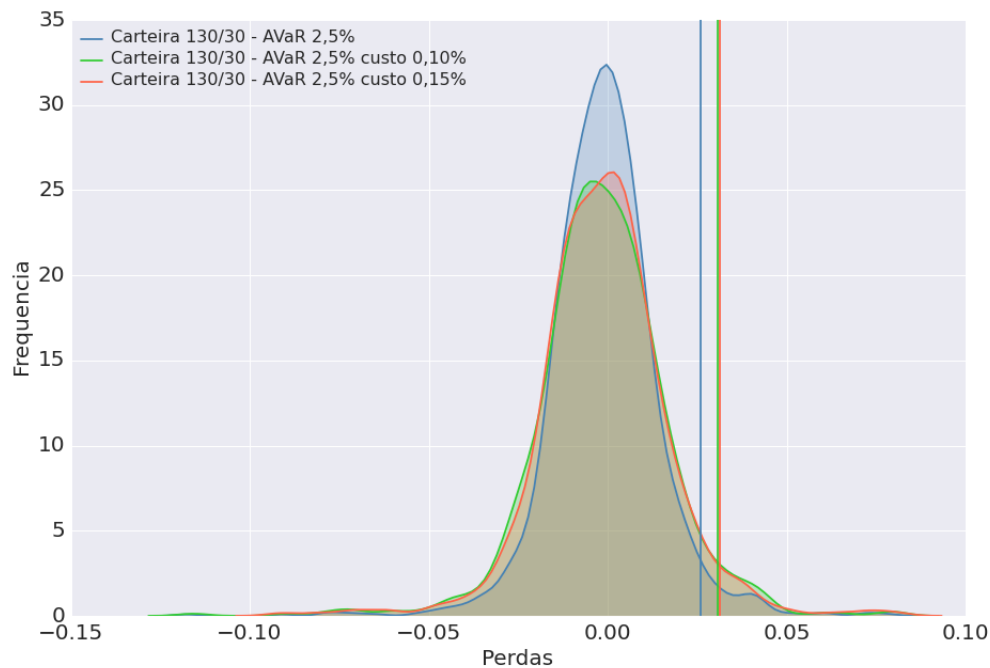


Figura 6.36: Distribuição das Perdas - Carteira 130/30 com AVaR e custos

As retas verticais indicam o valor da média das perdas da carteira, isto é, o AVaR com nível de confiança de 90%. Constata-se que a carteira sem custos apresenta perda máxima menor e maior afunilamento em torno da média em contrapartida das demais carteiras com custos que apresentam caudas mais longas e distribuição

mais achatada ao redor da média. Este comportamento pode ser observado quanto para uma carteira de 130/30 quanto para uma de 150/50.

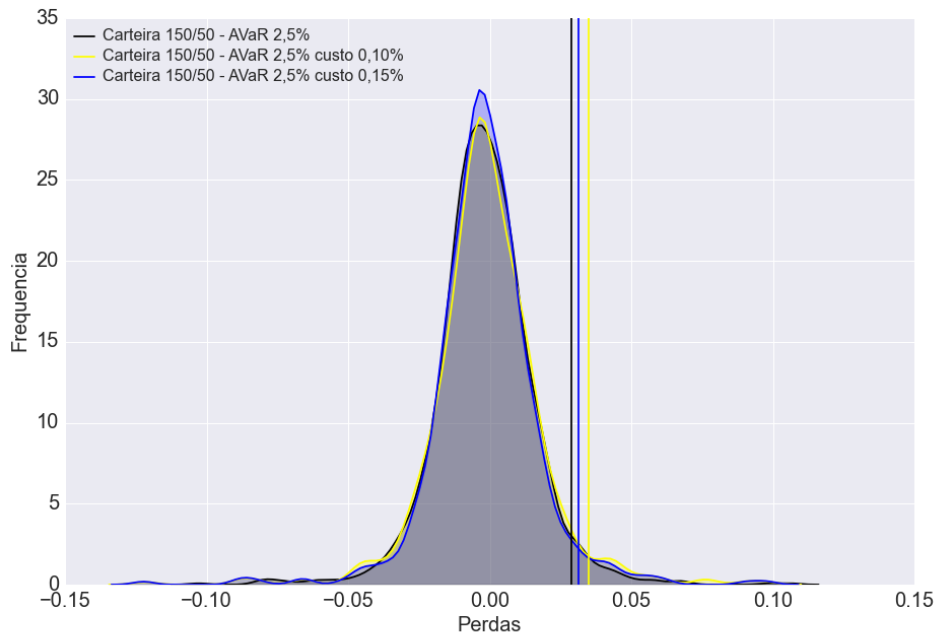


Figura 6.37: Distribuição das Perdas - Carteiras 150/50 com AVaR e custos

Portanto, o AVaR tende a aumentar à medida que os custos aumentam. Cabe verificar o número total de ações selecionadas de uma carteira com custos em detrimento a uma carteira sem custos.

As figuras 6.38 e 6.39 apresentam o número total de ações selecionadas em todo o período de *backtest* onde o número total de ações selecionadas decrescem à medida que os custos de transação aumentam.

Tabela 6.11: Desempenho das Carteiras com AVaR 2,5% e custos de 0,15%

	Carteira 150/50	Carteira 130/30
AVaR	0.031365911	0.031223552
Beta da Carteira	0.045382532	0.392889235
Correlação	0.03704985	0.347557495
Custo Total	0.005726868	0.010513162
Índice de Sharpe Condicional	0.04030325	0.036904849
Número Médio Ações	20	14

A tabela 6.11 apresenta o AVaR da carteira em toda o período de *backtest* gerada pelo modelo com restrição de 2,5% sobre o AVaR ao nível de confiança de 90% e custos de transação de 0,15%. O AVaR apresentado supera aquele das carteiras

nas mesmas condições, mas com custos de transação a 0,10% apresentado na tabela 6.12 da mesma forma que o AVaR das carteiras 150/50 são maiores que o AVaR das carteiras 130/30.

Verifica-se que, em termos de neutralidade ao mercado, os custos de transação aumentam as correlações e os betas da carteira se comparados às carteiras sem custos uma vez que a carteira fica com menos liberdade para selecionar ações novas para superar o CDI com custos mínimos.

Tabela 6.12: Desempenho das Carteiras com AVaR 2,5% e custos de 0,10%

	Carteira 150/50	Carteira 130/30
AVaR	0.03498395	0.030736674
Beta da Carteira	0.217314958	0.40474465
Correlação	0.23224106	0.358471276
Custo Total	0.003924211	0.008181344
Índice de Sharpe Condicional	0.03609596	0.03686445
Numero Médio Ações	19	15

A neutralidade ao mercado das carteiras 130/30 se deterioram mais que as carteiras 150/50 e os custos totais, a soma dos custos finais de cada rebalanceamento, também são maiores que das carteiras 150/50. O desempenho da carteira 150/50 também é superior no que se refere aos índices de sharpe condicionais.

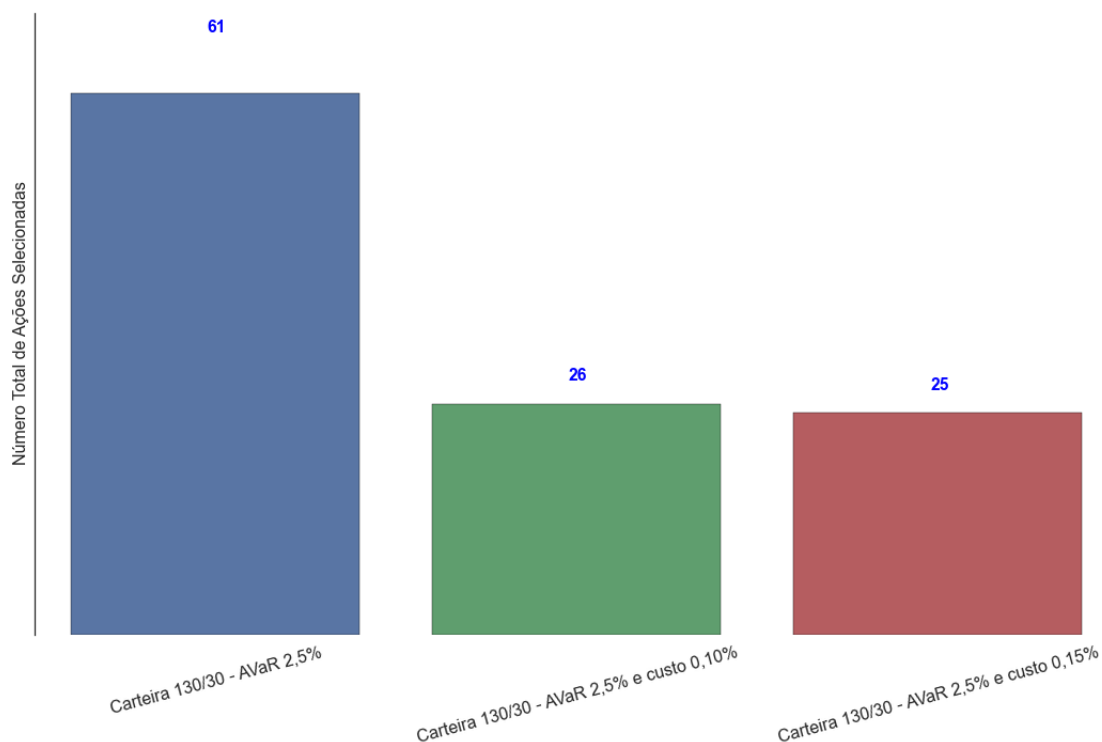


Figura 6.38: Diversificação das Carteiras 130/30 com AVaR e custos

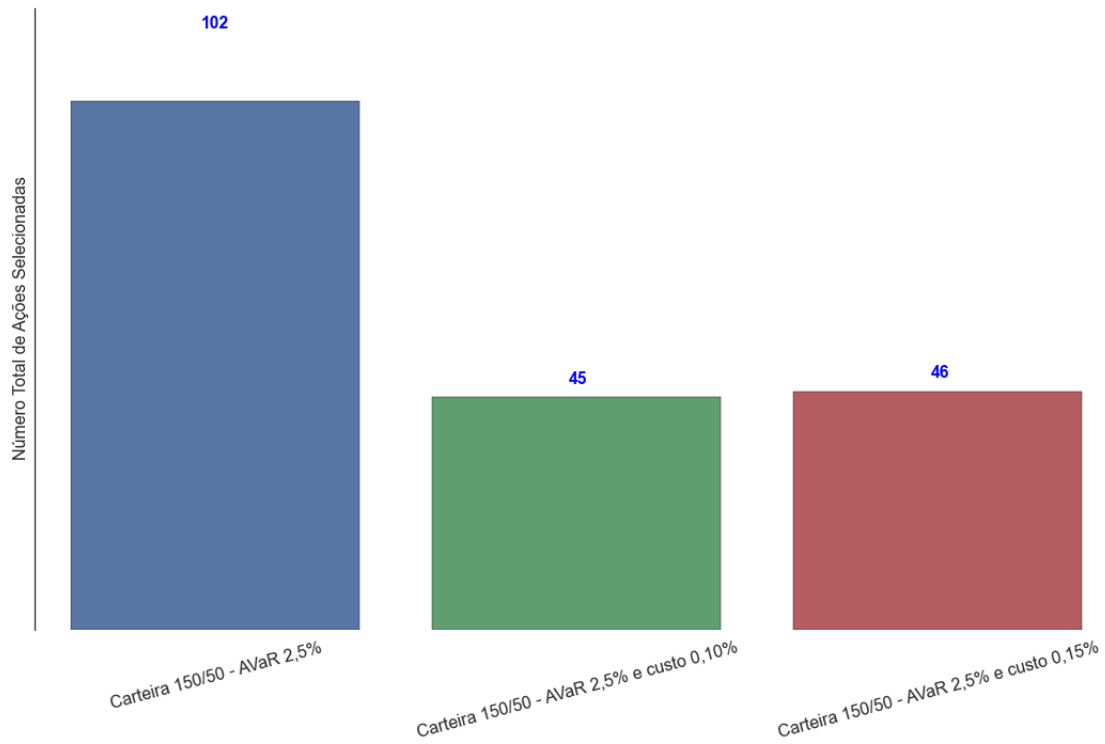


Figura 6.39: Diversificação das Carteiras 150/50 com AVaR e custos

Portanto, para comparando-se as carteiras com diferentes níveis de *short* para o mesmo período de rebalanceamento (quatro meses) as carteiras 150/50 apresentam desempenho superior em termos de maior neutralidade ao mercado, menores custos totais, maior ganho final e maior diversificação.

6.7 Impacto do Parâmetro: Tamanho da Amostra *in-sample*

As carteiras anteriores foram geradas a partir de modelos com tamanho de amostra de 2 anos. Nesta seção pretende-se analisar o desempenho das carteiras considerando-se um tamanho de amostra *in-sample* de 1 ano e 4 anos confrontando com os resultados das carteiras geradas com 2 anos de amostra.

Definir o tamanho da amostra é importante uma vez que os modelos podem se tornar mais fáceis de se resolver, caso o tamanho seja menor, ou mais difíceis caso o tamanho da amostra seja maior. Isso ocorre em função do aumento do número de variáveis e de restrições impostos ao modelo em função do parâmetro T .

Além disso, deve-se ter em mente que há dados faltantes ou *missing data* entre os dados de entrada e um tamanho de amostra muito grande pode reduzir o número de ações disponíveis quando o algoritmo retira esses dados faltantes. Neste trabalho, foram retiradas as ações que apresentavam mais de 50 dados faltantes em cada

rebalanceamento com período *in-sample* de 1 e 2 anos e de 200 para 4 anos.

Outro fato importante é saber se o tamanho da amostra pode melhorar a neutralidade ao mercado e, como será visto mais adiante, o AVaR da carteira em toda a série do *backtest*. Deve-se calibrar o modelo de forma a não deteriorar o desempenho em termos de neutralidade, mas também usar o AVaR com amostra significativa o suficiente para dar confiabilidade aos modelos.

Uma carteira gerada com amostras muito grandes pode ser bem calibrada com o passado, contudo isso não garante bom desempenho futuro. Portanto, analisar o tamanho da amostra é importante para entender melhor o comportamento das carteiras somado à realização do *backtest* para compreender como ele afeta o desempenho futuro delas.

Percebe-se que o valor de cada uma das carteiras tem comportamento semelhante nos períodos iniciais da série, com leve desvantagem para a carteira gerada com amostra de 1 ano. A partir do último quadrimestre de 2012, a carteira gerada com amostra de 2 anos começa a se descolar das demais mantendo este desempenho até o fim da série. Já a carteira gerada com amostra de 4 anos de dados perde seu desempenho no início de 2014 e tem leve melhora ao final de 2015.

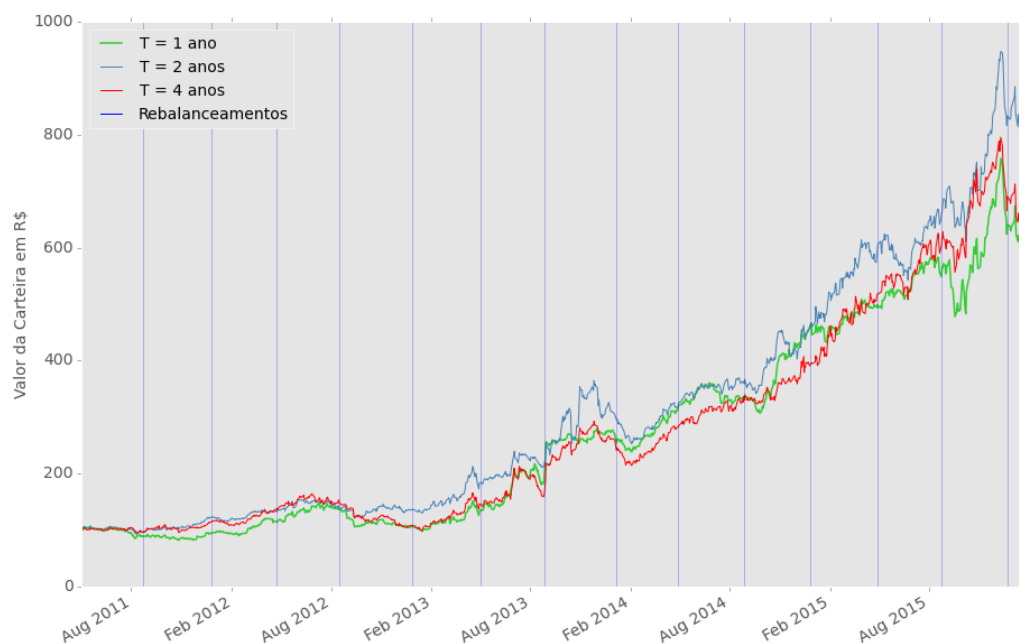


Figura 6.40: Valor das Carteiras 150/50 - AVaR 2,5% para Diferentes Tamanhos de Amostras

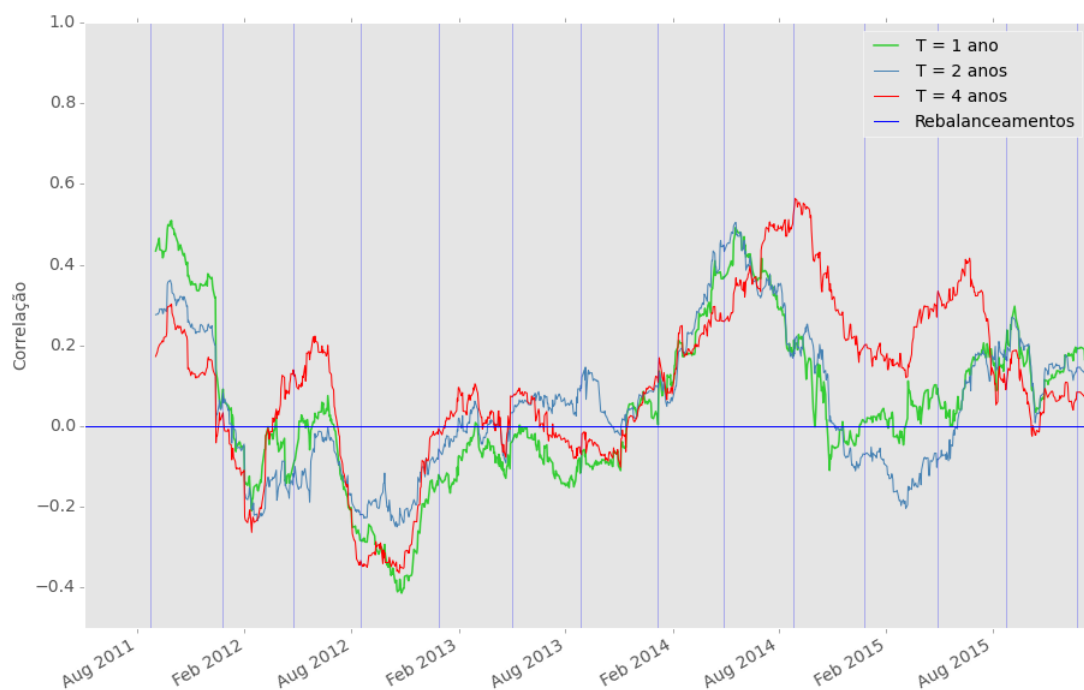


Figura 6.41: Correlação das Carteiras 150/50 - AVaR 2,5% para Diferentes Tamanhos de Amostras

As figuras 6.41 e 6.42 apresentam a média móvel de 4 meses das séries relativas à correlação das carteiras com o mercado e do beta das carteiras. A carteira gerada com amostra de 4 anos apresenta menos neutralidade ao mercado ao final da série, enquanto que as carteiras geradas com amostra de 1 e 2 anos apresentam menos oscilações e médias próximas, conforme relata a tabela 6.13.

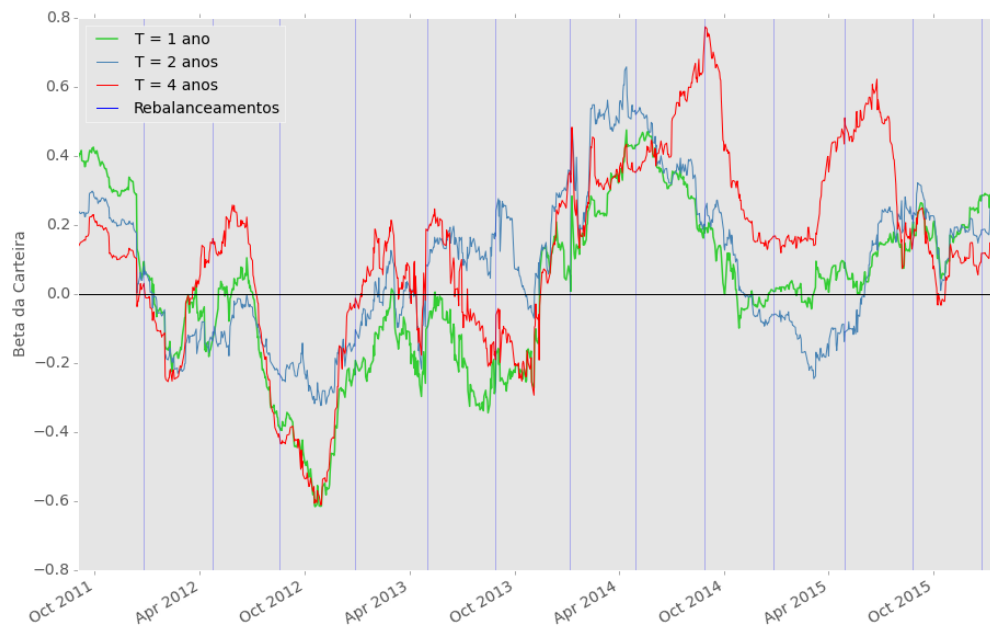


Figura 6.42: Beta das Carteiras 150/50 - AVaR 2,5% para Diferentes Tamanhos de Amostras

Tabela 6.13: Desempenho das Carteiras 150/50 AVaR 2,5% para Diferentes Tamanhos de Amostra

Indicadores	T = 1 ano	T = 2 anos	T = 4 anos
CAPM	0.000829462	0.000763488	0.000782191
Índice de Alfa de Jensen	0.000866309	0.001117332	0.000995888
Beta da Carteira	0.01953438	0.083105379	0.125690115
Correlação com o Mercado	0.049846667	0.056271725	0.106543971
Alfa da Carteira	0.001827599	0.002072449	0.001872347
Índice de Informação	0.077513584	0.08559741	0.083231926
Índice de Modigliani	0.001364648	0.001584411	0.001471055
Média do Retorno da Carteira	0.001569457	0.001814307	0.001614428
Índice de Sharpe	0.038818088	0.053546958	0.04483989
Índice de Sortino	0.094500246	0.094699913	0.089054281
Ganho da Carteira (%)	511.7498466	711.4967316	545.3766111

Em termos de neutralidade, a carteira gerada com 1 ano de amostra tem leve vantagem sobre a carteira de 2 anos. No entanto, os demais indicadores apontam a carteira gerada com 2 anos de amostra como a carteira que apresenta o melhor desempenho geral.

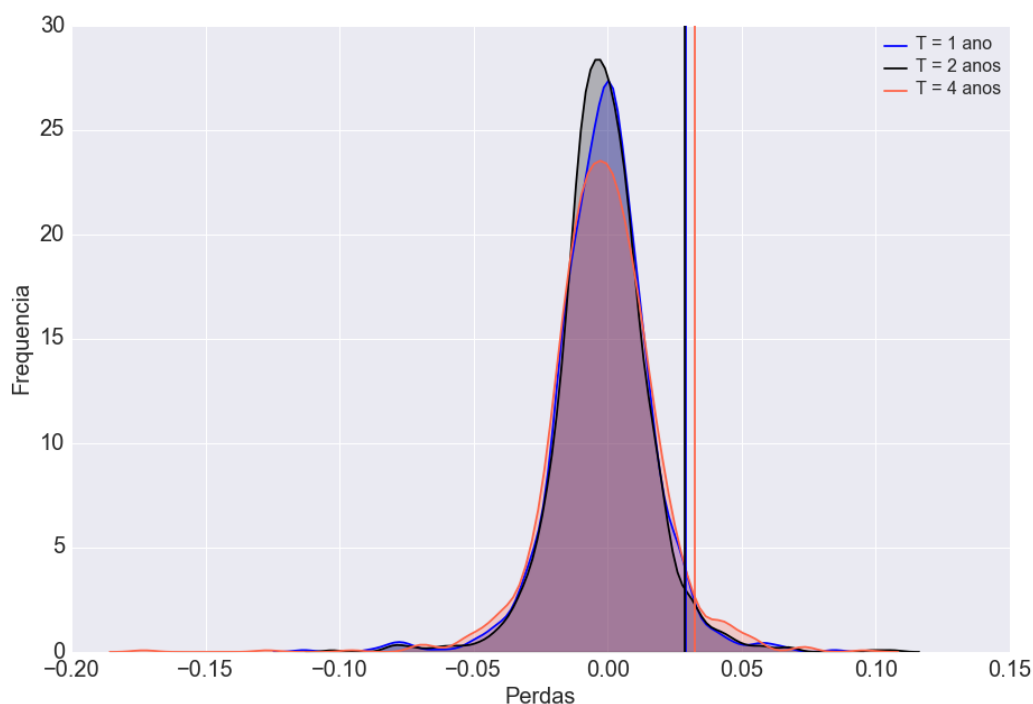


Figura 6.43: Distribuição das Perdas das Carteiras 150/50 com AVaR 2,5% para Diferentes Tamanhos de Amostras

É importante verificar o comportamento do AVaR com a alteração do tamanho da amostra. A figura 6.43 mostra a distribuição das perdas para toda a série de cada carteira e as retas verticais indicam o AVaR de cada série.

O AVaR da série para as carteiras de 1 e 2 anos são muito próximos. A tabela 6.14 permite verificar melhor as diferenças encontradas.

Tabela 6.14: Impacto do Tamanho da Amostra sobre o AVaR das Carteiras

	AVaR da Serie	Perda Máxima	Maior Ganho
T = 1 ano	0.029137368	-0.054584506	0.014987452
T = 2 anos	0.028928087	-0.077710059	0.016869885
T = 4 anos	0.032466211	-0.092157443	0.0163117

6.8 Impacto do Parâmetro: Periodicidade de Rebalanceamentos

Nas seções anteriores já foram discutidas as alterações de alguns parâmetros nos modelos como: nível de *short selling*, nível de confiança para o AVaR e diferentes valores de custos de transação. Nesta seção o objetivo é verificar como a periodicidade de rebalanceamentos, dado um custo de transação, pode interferir no desempenho das carteiras.

Evidentemente, há um *trade-off* entre a quantidade de rebalanceamentos e a neutralidade ao mercado. Quanto mais rebalanceamentos houver, mais neutra ao mercado deverá ser a carteira, isto é, as correlações e betas devem apresentar patamares menores. No entanto, há o aumento da quantidade de rebalanceamentos aumenta os custos envolvidos nas transações de compra e de venda de ações. Nesse sentido, deve-se analisar com que periodicidade uma carteira deve ser rebalanceada mantendo níveis adequados de neutralidade e de desempenho em termos de retorno do investimento.

A tabela a seguir elucida o desempenho das carteiras 130/30 ao longo de toda a série do *backtest* realizado do ultimo quadrimestre de 2013 em diante para um custo de transação de 0,15% com AVaR de 2,5% a um nível de confiança de 90% para vários períodos de rebalanceamentos. Todos os valores, com exceção do ganho da carteira, refletem a média da série.

Tabela 6.15: Desempenho das Carteiras 130/30 em Diferentes Rebalanceamentos

Indicadores	4 meses	6 meses	10 meses
CAPM	0.000507231	0.00030811	0.000426365
Índice de Alfa de Jensen	0.000669957	0.000796423	0.000290179
Beta da Carteira	0.392889235	0.517611324	0.472029887
Correlação com o Mercado	0.347557495	0.446984186	0.397704107
Alfa da Carteira	0.001497393	0.001165268	0.001055251
Índice de Informação	0.082844419	0.079838639	0.057999811
Índice de Modigliani	0.00128186	0.001252599	0.000793227
Média do Retorno da Carteira	0.001138488	0.000785612	0.000610856
Índice de Sharpe	0.027890211	0.027626797	-0.005329049
Índice de Sortino	0.050912373	0.047311767	-0.005742466
Ganho da Carteira (%)	93.54169852	58.09272013	42.86638519

Foi realizado um teste com rebalanceamentos de 12 em 12 meses, ou seja, rebalanceamentos anuais; no entanto nem sempre o modelo gerou soluções ótimas. Dado que a carteira busca manter ao máximo as mesmas ações para incorrer em menos custos, no período seguinte as ações a serem selecionadas podem não se apresentar tão atrativas quanto no ano anterior e o modelo busca outras para superar o CDI,

mas os custos de transação podem aumentar sobremaneira de tal forma que, em alguns casos, o problema pode se tornar inviável.

Cabe verificar se o AVaR da série é afetado assim como o índice de Sharpe condicional. A tabela 6.16 mostra a média de toda a série assim como a soma dos custos de cada rebalanceamento.

Tabela 6.16: AVaR e Custo Total - Carteiras 130/30 em Diferentes Rebalanceamentos

	4 meses	6 meses	10 meses
AVaR	0.031224	0.033144	0.034358
Custo Total	0.01051316	0.00809008	0.00516214
Índice de Sharpe Condicional	0.03690485	0.03531209	0.03296899

Conforme era esperado, os custos totais aumentam à medida que a periodicidade de rebalanceamento diminui em função do aumento do número de transações realizadas. Contudo, isso não foi capaz de reduzir o ganho da carteira ao final do período assim como o desempenho do AVaR para a série, índice de Sharpe condicional e a neutralidade ao mercado da carteira com rebalanceamento de 4 meses foram superiores ao desempenho das demais carteiras.

Para as carteiras 150/50 com a mesma parametrização o rebalanceamento anual também não se mostrou eficaz uma vez que em alguns períodos o modelo encontrou inviabilidade mesmo com o aumento do nível de *short*.

Tabela 6.17: Desempenho das Carteiras 150/50 em Diferentes Rebalanceamentos

Indicadores	4 meses	6 meses	10 meses
CAPM	0.000762868	0.000717997	0.00054055
Índice de Alfa de Jensen	-2.5383E-06	0.001082042	0.001014176
Beta da Carteira	0.149779038	0.264476707	0.459899927
Correlação com o Mercado	0.111500407	0.206591388	0.355522742
Alfa da Carteira	0.001248505	0.002090572	0.001865457
Índice de Informação	0.042118129	0.100955428	0.09892451
Índice de Modigliani	0.00086271	0.001860434	0.001563731
Valor Esperado do Retorno da Carteira	0.001031843	0.001902438	0.001421062
Índice de Sharpe	-0.006829482	0.071438312	0.044565019
Índice de Sortino	-0.003273155	0.127485919	0.066364374
Ganho da Carteira (%)	80.25140168	197.4562076	129.3089685

A tabela 6.18 mostra que os custos totais das carteiras 150/50, considerando os custos de transação a 0,15%, é menor que os custos das carteiras 130/30. Esse fato ocorre por dois motivos: diversificação e peso das ações. A carteira 150/50 diversifica mais atribuindo pesos menores por ações. Em contrapartida, as carteiras 130/30 selecionam menos ações a cada rebalanceamento atribuindo pesos altos

por ação selecionada. Nesse sentido, como os custos de transação são diretamente proporcionais à diferença de pesos entre o rebalanceamento atual e o anterior; as carteiras 130/30 incorrem em custos maiores devido aos pesos maiores atribuídos a poucas ações.

Tabela 6.18: AVaR e Custo Total - Carteiras 150/50 em Diferentes Rebalanceamentos

	4 meses	6 meses	10 meses
AVaR	0.32304	0.0372367	0.03867109
Custo Total	0.00705701	0.00680614	0.00466067
Índice de Sharpe Condicional	0.03765722	0.03647608	0.03080193

Desta forma, esta análise corrobora o exposto anteriormente na seção 6.6 em que o desempenho das carteiras 150/50 se sobrepõem ao desempenho das carteiras 130/30. E no que se refere à periodicidade de rebalanceamentos, cabe ao investidor optar por neutralidade ao mercado ou retorno sobre o investimento inicial uma vez que uma periodicidade de 4 meses que acompanha a mudança da composição do IBrX100 apresenta menores correlações e betas e uma periodicidade de rebalanceamentos de 6 meses apresenta maiores ganhos finais.

Capítulo 7

Conclusões

O objetivo principal deste trabalho consistia em apresentar um modelo de programação não linear usando somente variáveis contínuas como contraproposta ao modelo apresentado por Valle *et. al* [3] a fim de se obter uma carteira neutra ao mercado que tivesse rentabilidade igual ou superior a outros investimentos e fosse aplicado ao mercado brasileiro de ações.

As principais motivações para não usar um modelo misto-inteiro, conforme usado por Valle *et. al* [3], são: - tempos de resolução altos devido à dificuldade do problema, - existência de poucos resolvidores gratuitos disponíveis no mercado. Portanto, seria interessante verificar se, com um modelo contínuo, seria possível a obtenção de resultados tão bons quanto os modelos misto-inteiros.

O uso do Python como linguagem de programação vai ao encontro com a tendência de seu uso em algumas Universidades Americanas como Massachusetts Institute of Technology (MIT) e Stanford University conforme levantamento feito por Guo em [73]. Nesse sentido, este trabalho procurou difundir seu uso e promover maior aceitação no meio acadêmico em contrapartida aos comumente usados como R, Matlab e C++.

Para realizar a comparação entre os modelos contínuo e misto-inteiro, foram apresentados três modelos misto-inteiros com a mesma função objetivo com distintos conjuntos de restrições e de variáveis, mas como mesmo propósito.

Além da proposta acima, este trabalho contribuiu para explorar alguns diferenciais ao modelo como:

- A inserção de restrições ao modelo para que as alocações ótimas a setores cíclicos da economia sejam de baixos pesos, que somente ativos de alta liquidez sejam selecionados e que a carteira supere um ativo livre de risco como o CDI. Assim, os setores cíclicos como: Siderurgia, Mineração, Máquinas e Equipamentos, Construção e Engenharia, Transporte, Tecidos e Vestuário e Calçados devem receber baixos pesos;

- O modelo contínuo deve escolher, no máximo, 20 ações de forma a permitir o melhor gerenciamento por parte do investidor;
- A realização de testes para verificação da melhor periodicidade de rebalanceamentos de modo que a carteira tenha melhor desempenho durante a realização do *backtest*;
- A inserção de restrições de custos de transação para se verificar o comportamento da carteira ao longo do tempo e como a periodicidade de rebalanceamentos pode afetar o desempenho ao final do *backtest*;
- A inserção de restrições da medida de risco AVaR de forma a avaliar como a carteira se comporta;
- A comparação do desempenho da carteira com métodos tradicionais como CAPM e outros indicadores de desempenho.

O modelo precisou de algumas técnicas para que seja implementado. Foram apresentadas duas formas para a função objetivo para viabilizar a questão da não diferenciabilidade da função modular no ponto zero. Verificou-se que a opção com a inserção de uma variável auxiliar e a adição de três restrições obtinha resultados mais rapidamente que a função objetivo como sendo o coeficiente de determinação e que o modelo misto-inteiro 1b apresentou resultados iguais ou melhores com melhores tempos de resolução em relação aos demais.

Uma vez determinada a melhor alternativa para a função objetivo e o modelo misto-inteiro a ser usado, partiu-se para a realização do um *backtest*. No que tange à comparação entre modelos misto-inteiro e contínuo, o modelo contínuo apresentou resultados superiores ao modelo misto-inteiro tanto em relação à neutralidade ao mercado, com baixos betas e correlações, quanto em relação aos demais indicadores e retorno esperado da carteira ao final do teste.

O primeiro teste de mudança de parâmetros foi realizado a fim de verificar o comportamento dos modelos durante a realização do *backtest* no que diz respeito ao nível de *short selling*. As carteiras 150/50 apresentaram resultados superiores à carteira 130/30 e, mais significativamente, em relação a uma carteira *long only*. A medida que o nível de *short* aumentou, a alocação aos setores não cíclicos aumentou e o mesmo acontece para os indicadores, retorno esperado da carteira e valor final da carteira. Em termos de neutralidade ao mercado, ao final do teste a carteira com maior nível de *short* apresentou maior neutralidade.

Adicionando as restrições de risco, o AVaR, nota-se que à medida que aumenta o nível de confiança maior propensão ao risco do investidor e, evidentemente, há um *trade-off* entre risco e retorno da carteira uma vez que a adição do AVaR ao

modelo promove uma redução no retorno esperado da carteira em comparação a uma carteira gerada por um modelo sem as restrições de risco. Além disso, a carteira com AVaR possui maior diversificação selecionando mais ações para compor a carteira.

Em uma análise *out-of-sample* das carteiras 130/30 e 150/50, com diversos níveis sobre a restrição de AVaR, nota-se que a diversificação aumenta com o aumento do nível de *shorting* e ainda mais com o acréscimo da restrição do AVaR. Quanto maior a restrição sobre o AVaR, ou seja, quanto menor deve ser a média de perdas da carteira, maior é a diversificação. As ações correspondentes aos setores de energia elétrica, que figuram entre os setores não cíclicos, correspondem às principais alocações juntamente com o setor de Petróleo, Gás e Biocombustíveis.

Os modelos propostos superam os resultados obtidos pelas carteiras beta-zero em termos de valor final da carteira, de retorno esperado e de neutralidade. A diferença aumenta principalmente quando o nível de *short* aumenta.

A inserção de restrições sobre os custos de transação promovem menor diversificação, analisando todo o período do *backtest*, e não muda significativamente a alocação das ações.

O impacto de dois parâmetros, tamanho da amostra *in-sample* e periodicidade de rebalanceamentos, foi de extrema importância para este trabalho. Enquanto o primeiro pode interferir na qualidade da carteira gerada, o segundo interfere diretamente na neutralidade ao mercado uma vez que quanto mais rebalanceamentos realizados, mais neutra a carteira; no entanto, a quantidade deve ser limitada devido aos altos custos de transação envolvidos que podem derrubar o desempenho da carteira.

Um tamanho de amostra muito elevado calibra uma carteira com o passado e, não necessariamente, este comportamento poderia se perpetuar no futuro. Assim como um tamanho de amostra muito pequeno pode capturar comportamentos insuficientes das ações deturpando os resultados presentes e comprometendo resultados futuros. Para as amostras consideradas, não se verificou grandes mudanças nos resultados das carteiras.

Por fim, cabia verificar qual a periodicidade de rebalanceamentos ideal para o modelo. Para um custo de transação de 0,15% e um AVaR máximo de 2,5%, os melhores resultados para uma carteira de 130/30 e de 150/50 foram respectivamente quatro e seis meses de rebalanceamento. No entanto, se compararmos ambas as carteiras, com os mesmos parâmetros, uma carteira de 150/50 apresenta resultados significativamente superiores à carteira 130/30 no que tange à neutralidade ao mercado, indicadores de desempenho e retorno esperado da carteira.

Verifica-se, portanto, que, para o mercado brasileiro, é necessária a realização de uma grande quantidade de *short selling* para que a carteira seja neutra ao mercado.

Ressalta-se ainda que o retorno esperado da carteira obtido pelo modelo proposto

supera o retorno esperado utilizado pela tradicional metodologia do CAPM.

7.1 Recomendações para trabalhos futuros

Os principais recomendações para trabalhos futuros, baseado na pesquisa bibliográfica e nos resultados do presente trabalho são:

- estudar o custos de transação de compra e de venda praticados no mercado brasileiro de ações a fim de aproximar o modelo ainda mais à realidade;
- utilizar outros indicadores de desempenho de *downside* e *upperside risk* para comparação com outras carteiras;
- examinar os setores cíclicos e não cíclicos da economia brasileira e propor melhores alternativas a investidores avessos e propensos ao risco;
- examinar os resultados da carteira em períodos de crise do mercado financeiro a fim de investigar se as restrições sobre os pesos das ações sobre os setores cíclicos estão, de fato, alcançando o efeito esperado.

Referências Bibliográficas

- [1] CALDEIRA, J. F., PORTUGAL, M. S. “Long-Short Market Neutral and Index Tracking Strategies Based on Cointegrated Portfolios”, *Brazilian Review of Finance*, v. 8, n. 4, pp. 469–504, 2010.
- [2] MARKOWITZ, H. “Portfolio selection*”, *The journal of finance*, v. 7, n. 1, pp. 77–91, 1952.
- [3] VALLE, C., MEADE, N., BEASLEY, J. “Market neutral portfolios”, *Optimization Letters*, v. 8, n. 7, pp. 1961–1984, 2014.
- [4] CASAROTTO F, N. “Análise de Investimentos: Matemática Financeira, Engenharia Econômica, Tomada De Decisão, Estratégia Empresarial. São Paulo: Atlas, 1994. 445p. __. N.; KOPITTKKE, BH”, *Análise de Investimentos: Matemática Financeira, Engenharia Econômica, Tomada De Decisão, Estratégia Empresarial. São Paulo: Atlas*, v. 9, 2000.
- [5] MARINHO, M. N. “FATORES RELEVANTES PARA O INVESTIDOR INDIVIDUAL BRASILEIRO NA FORMAÇÃO DA SUA CARTEIRA DE INVESTIMENTOS”, .
- [6] NERI, M., CARVALHO, K., CORSI, A. “Motivações financeiras para as pessoas da terceira idade”, *Os novos idosos brasileiros, muito além dos*, v. 60.
- [7] ANDREANI, R., BIRGIN, E. G., MARTÍNEZ, J. M., et al. “On augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints”, *SIAM Journal on Optimization*, v. 18, n. 4, pp. 1286–1309, 2007.
- [8] ANDREANI, R., BIRGIN, E. G., MARTÍNEZ, J. M., et al. “Augmented Lagrangian methods under the constant positive linear dependence constraint qualification”, *Mathematical Programming*, v. 111, n. 1-2, pp. 5–32, 2008.
- [9] IZMAILOV, A., SOLODOV, M. “Otimização volume 1-Condições de Otimalidade”, *Elementos de Análise Convexa e de Dualidade. 2a edição, Rio de Janeiro: IMPA*, 2009.

- [10] BONNANS, J.-F., GILBERT, J. C., LEMARÉCHAL, C., et al. *Numerical optimization: theoretical and practical aspects*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [11] HAESER, G. “Condições de otimalidade de primeira e segunda ordem em otimização não linear”, .
- [12] QI, L., WEI, Z. “On the constant positive linear dependence condition and its application to SQP methods”, *SIAM Journal on Optimization*, v. 10, n. 4, pp. 963–981, 2000.
- [13] MARTÍNEZ, J. M. “Otimização prática usando o Lagrangiano Aumentado”, *Opúsculo, Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Brasil*, 2006.
- [14] WANG, Z., FANG, S.-C., XING, W. “On constraint qualifications: motivation, design and inter-relations”, *MANAGEMENT*, v. 9, n. 4, pp. 983–1001, 2013.
- [15] IZMAILOV, A., SOLODOV, M. “Otimização, volume II”, *Rio de Janeiro, IMPA*, 2007.
- [16] WOLSEY, L. A. *Integer programming*, v. 42. Wiley New York, 1998.
- [17] BELOTTI, P., KIRCHES, C., LEYFFER, S., et al. “Mixed-integer nonlinear optimization”, *Acta Numerica*, v. 22, pp. 1–131, 2013.
- [18] LAND, A. H., DOIG, A. G. “An automatic method of solving discrete programming problems”, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 497–520, 1960.
- [19] DE MELO, W. A. X. *ALGORITMOS PARA PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR INTEIRA MISTA*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.
- [20] LOBATO, R. D. *Algoritmos para problemas de programação não-linear com variáveis inteiras e contínuas*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2009.
- [21] CORNUEJOLS, G., TÛTÛNCÛ, R. *Optimization methods in finance*, v. 5. Cambridge University Press, 2006.
- [22] YOUNG, M. R. “A minimax portfolio selection rule with linear programming solution”, *Management science*, v. 44, n. 5, pp. 673–683, 1998.

- [23] KONNO, H., YAMAZAKI, H. “Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market”, *Management science*, v. 37, n. 5, pp. 519–531, 1991.
- [24] MANGRAM, M. E. “A simplified perspective of the Markowitz Portfolio Theory”, *Global Journal of Business Research*, v. 7, n. 1, pp. 59–70, 2013.
- [25] SHARPE, W. F. “The sharpe ratio”, *The journal of portfolio management*, v. 21, n. 1, pp. 49–58, 1994.
- [26] TÛTÛNCÛ, R. H., KOENIG, M. “Robust asset allocation”, *Annals of Operations Research*, v. 132, n. 1-4, pp. 157–187, 2004.
- [27] MARKOWITZ, H. “Portfolio selection: efficient diversification of investments”, *Cowies Foundation Monograph*, , n. 16, 1959.
- [28] HAFSA, H. “CVaR in Portfolio Optimization: An Essay on the French Market”, *International Journal of Financial Research*, v. 6, n. 2, pp. p101, 2015.
- [29] BAWA, V. S. “Optimal rules for ordering uncertain prospects”, *Journal of Financial Economics*, v. 2, n. 1, pp. 95–121, 1975.
- [30] FISHBURN, P. C. “Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns”, *The American Economic Review*, pp. 116–126, 1977.
- [31] NAWROCKI, D. N. “A brief history of downside risk measures”, *The Journal of Investing*, v. 8, n. 3, pp. 9–25, 1999.
- [32] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M., et al. “Coherent Measures of Risk1”, *Risk management: value at risk and beyond*, p. 145, 2002.
- [33] ROCKAFELLAR, R. T., URYASEV, S. “Optimization of conditional value-at-risk”, *Journal of risk*, v. 2, pp. 21–42, 2000.
- [34] KROKHMAL, P., PALMQUIST, J., URYASEV, S. “Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints”, *Journal of risk*, v. 4, pp. 43–68, 2002.
- [35] LEVIŠAUSKAIT, K. “Investment Analysis and Portfolio Management”, *Leonardo da Vinci program project*, 2010.
- [36] NORTON, D., KAPLAN, R. “The Balanced Scorecard. Measures that drive performance”, *Harvard Business Review*, enero-febrero”, 1992.

- [37] CANTARINO, A. A. A. *Indicadores de desempenho ambiental como instrumento de gestão e controle nos processos de licenciamento ambiental de empreendimentos de exploração e produção de petróleo nas áreas offshore*. Tese de Doutorado, Dissertation (doctoral). COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, 2003.
- [38] SLACK, N. “CHAMBERS; S.; JOHNSTON; R”, *Administração da produção*, v. 2, pp. 367–388, 2002.
- [39] MOREIRA, E., OTHERS. “Proposta de uma sistemática para o alinhamento das ações operacionais aos objetivos estratégicos, em uma gestão orientada por indicadores de desempenho”, 2002.
- [40] SILVA, E. *O relacionamento entre estratégia de manufatura, práticas de produção e desempenho operacional e de negócio: uma survey em firmas do setor moveleiro*. Tese de Doutorado, Tese (Doutorado em Engenharia de Produção)–Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- [41] LE SOURD, V. “Performance measurement for traditional investment”, *Financial Analysts Journal*, v. 58, n. 4, pp. 36–52, 2007.
- [42] BACON, C. “How sharp is the Sharpe-ratio?-Risk-adjusted Performance Measures”, *Statpro White Paper*, 2000.
- [43] GHOSH, A., MAHANTI, A. “Investment Portfolio Management: A Review from 2009 to 2014”, *Indian Institute of Management*, 2014.
- [44] ARAGON, G. O., FERSON, W. E. “Portfolio performance evaluation”, *Foundations and Trends in Finance*, v. 2, n. 2, pp. 83–190, 2006.
- [45] ELING, M., SCHUHMACHER, F. “Does the choice of performance measure influence the evaluation of hedge funds?” *Journal of Banking & Finance*, v. 31, n. 9, pp. 2632–2647, 2007.
- [46] MOY, R. L. “Portfolio performance: illustrations from morningstar”, *Journal of Education for Business*, v. 77, n. 4, pp. 226–229, 2002.
- [47] SORTINO, F. A., PRICE, L. N. “Performance measurement in a downside risk framework”, *the Journal of Investing*, v. 3, n. 3, pp. 59–64, 1994.
- [48] DE CAPITANI, L. “Interval estimation for the Sortino Ratio and the Omega Ratio”, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, v. 43, n. 6, pp. 1385–1429, 2014.

- [49] BOSSERT, T., FÜSS, R., RINDLER, P., et al. “How “Informative” Is the Information Ratio for Evaluating Mutual Fund Managers?” *The Journal of Investing*, v. 19, n. 1, pp. 67–81, 2010.
- [50] AGARWAL, V., NAIK, N. Y. “Risks and portfolio decisions involving hedge funds”, *Review of Financial studies*, v. 17, n. 1, pp. 63–98, 2004.
- [51] WIESINGER, A. “Risk-adjusted performance measurement: State of the art”, *Bachelor Thesis of the University of St. Gallen, School of Business Administration, Economics, Law and Social Sciences (HSG), St. Gallen, Switzerland*, 2010.
- [52] CHOW, V., LAI, C. W. “Conditional Sharpe Ratios”, *Finance Research Letters*, v. 12, pp. 117–133, 2015.
- [53] WAN, Y., CLUTTER, M. L., MEI, B., et al. “Assessing the role of US timberland assets in a mixed portfolio under the mean-conditional value at risk framework”, *Forest Policy and Economics*, v. 50, pp. 118–126, 2015.
- [54] WÜRTZ, D., CHALABI, Y., CHEN, W., et al. *Portfolio optimization with R/Rmetrics*. Rmetrics, 2009.
- [55] DE MELO MENDES, B. V. “Avaliação de Modelos de Risco através de Back-testing”, 2013.
- [56] JACOBS, B. I., LEVY, K. N. “Long/short equity investing”, *The Journal of Portfolio Management*, v. 20, n. 1, pp. 52–63, 1993.
- [57] PATTON, A. J. “Are “market neutral” hedge funds really market neutral?” *Review of Financial Studies*, v. 22, n. 7, pp. 2495–2530, 2009.
- [58] GLOUKHOV, V. V., ILIN, I. V., KOPOSOV, V. I., et al. “Market Risk Neutral Strategies: Modeling and Algorithmization”, *Asian Social Science*, v. 10, n. 24, pp. p209, 2014.
- [59] EDIRISINGHE, C., ZHANG, X. *Portfolio Risk Management: Market Neutrality, Catastrophic Risk, and Fundamental Strength*. INTECH Open Access Publisher, 2011.
- [60] KROKHMAL, P. A., URYASEV, S. P., ZRAZHEVSKY, G. M. “Comparative Analysis of Linear Portfolio rebalancing strategies: an application to hedge funds”, *U of Florida ISE Research Report*, , n. 2001-11, 2001.

- [61] PAI, G., MICHEL, T. “Differential evolution based optimization of risk budgeted equity market neutral portfolios”. In: *Evolutionary Computation (CEC), 2012 IEEE Congress on*, pp. 1–8. IEEE, 2012.
- [62] CHEN, J., TINDALL, M. L. “Constructing Zero-Beta VIX Portfolios with Dynamic CAPM”, *Occasional Paper*, v. 14, pp. 01, 2014.
- [63] HAUKE, J., KOSSOWSKI, T. “Comparison of values of Pearson’s and Spearman’s correlation coefficients on the same sets of data”, *Quaestiones Geographicae*, v. 30, n. 2, pp. 87–93, 2011.
- [64] LOPES, A. L. M., CARNEIRO, M. L., SCHNEIDER, A. B., et al. “Markowitz na otimização de carteiras selecionadas por Data Envelopment Analysis–DEA”, *Gestão e Sociedade*, v. 4, n. 9, pp. 640–656, 2011.
- [65] SIRQUEIRA, A. B. D., KALATZIS, A. E. G., TOLEDO, F. M. B. D. “Boas práticas de governança corporativa e otimização de portfólio: uma análise comparativa”, *Revista Economia. Brasília*, v. 7, n. 3, pp. 521–544, 2007.
- [66] PEREIRA, G. M. “Integração de restrições de liquidez em modelos de seleção de carteiras”, 2014.
- [67] BMFBOVESPA. “Bolsa de Valores de São Paulo”, em <http://www.bmfbovespa.com.br>, Acesso 15 jan. 2016.
- [68] RIGHI, M. B., CERETTA, P. S., DA SILVEIRA, V. G. “ANÁLISE DE DESEMPENHO FINANCEIRO SETORIAL NO MERCADO BRASILEIRO”, *Estudos do CEPE*, pp. 252–272, 2013.
- [69] ÁVILA, G. “Análise de desempenho de fundos de investimento em ações no período de 2007-2010”, 2011.
- [70] JARQUE, C. M., BERA, A. K. “A test for normality of observations and regression residuals”, *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, pp. 163–172, 1987.
- [71] XIONG, J. X., IBBOTSON, R. G., IDZOREK, T. M., et al. “The equal importance of asset allocation and active management”, *Financial Analysts Journal*, v. 66, n. 2, pp. 22–30, 2010.
- [72] ALEXANDER, S., COLEMAN, T. F., LI, Y. “Minimizing CVaR and VaR for a portfolio of derivatives”, *Journal of Banking & Finance*, v. 30, n. 2, pp. 583–605, 2006.

- [73] GUO, P. “Python is Now the Most Popular Introductory Teaching Language at Top US Universities.(2014)”. 2015.