



SOBRE O SEGUNDO MAIOR AUTOVALOR DE UM GRAFO

André Ebling Brondani

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.

Orientadores: Nair Maria Maia de Abreu
Carla Silva Oliveira

Rio de Janeiro
Março de 2017

SOBRE O SEGUNDO MAIOR AUTOVALOR DE UM GRAFO

André Ebling Brondani

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Examinada por:

Prof^a. Nair Maria Maia de Abreu, D.Sc.

Prof^a. Carla Silva Oliveira, D.Sc.

Prof^a. Christina Fraga Esteves Maciel Waga, D.Sc.

Prof. Leonardo de Lima, D.Sc.

Prof. Luiz Emilio Allem, D.Sc.

Prof^a. Maria Aguiéiras Alvarez de Freitas, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2017

Brondani, André Ebling

Sobre o segundo maior autovalor de um grafo/André Ebling Brondani. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XII, 114 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Nair Maria Maia de Abreu

Carla Silva Oliveira

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Produção, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 97 – 105.

1. Grafos. 2. Matriz de adjacência. 3. Segundo maior autovalor. I. Abreu, Nair Maria Maia de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Produção. III. Título.

*À minha esposa Francisca e ao
meu filho Miguel, com todo o
meu amor.*

Agradecimentos

À minha esposa, Francisca, pela ajuda e confiança. Aos meus pais e irmãos pelo incentivo.

Às professoras, Nair M. M. de Abreu e Carla S. Oliveira, por toda orientação e auxílio que me foram dados.

Aos componentes do grupo TEG, por todo o apoio. Em especial ao professor Leonardo Lima, pelas importantes contribuições e pela atenção dispensada.

A todos os funcionários do PEP, pelo profissionalismo e competência.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

SOBRE O SEGUNDO MAIOR AUTOVALOR DE UM GRAFO

André Ebling Brondani

Março/2017

Orientadores: Nair Maria Maia de Abreu
Carla Silva Oliveira

Programa: Engenharia de Produção

Seja G um grafo de ordem n e \bar{G} seu grafo complementar. Nesta tese provamos uma desigualdade do tipo Nordhaus-Gaddum para o segundo maior autovalor de um grafo G , denotado por $\lambda_2(G)$, quando este tem cintura pelo menos 5. Também provamos que este resultado é válido para algumas classes de grafos tais como árvores, grafos unicíclicos e apresentamos uma classe infinita de grafos extremais para tal cota. Além disso, caracterizamos explicitamente todos os grafos cujos autovalores, exceto o maior e o menor, estão em $[-2, 0]$.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ABOUT THE SECOND LARGEST EIGENVALUE OF A GRAPH

André Ebling Brondani

March/2017

Advisors: Nair Maria Maia de Abreu
Carla Silva Oliveira

Department: Production Engineering

Let G be a graph on n vertices and \overline{G} its complement. In this thesis, we prove a Nordhaus-Gaddum type inequality to the second largest eigenvalue of a graph G , denoted by $\lambda_2(G)$, when G has girth at least 5. Also, we prove that this result holds for some classes of graphs such as trees and unicyclic graphs and we present a infinity family of extremal graphs. We conjecture that this bound holds to any graph. Moreover, we have explicitly characterize all graphs whose eigenvalues, except the largest and the smallest, are in $[-2, 0]$.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
2 Preliminares	4
2.1 Teoria dos Grafos	4
2.2 Teoria de Matrizes	12
2.3 Teoria Espectral de Grafos	15
3 Cotas para λ_2	23
3.1 Cotas gerais para λ_2	23
3.2 Cotas para λ_2 em grafos pertencentes a classes especiais	27
4 Grafos em que λ_2 não excede 1	34
4.1 Caracterização de grafos em que $\lambda_2 \leq 1$	34
4.2 Grafos em que $\lambda_2 \leq 1$	37
5 Grafos caracterizados por λ_2	46
5.1 Grafos em que $0 < \lambda_2 < \frac{1}{3}$	46
5.2 Grafos em que $0 < \lambda_2 \leq \sqrt{2} - 1$	50
5.3 Grafos em que $0 < \lambda_2 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	54
6 Relações do tipo Nordhaus-Gaddum	56
6.1 NG-relações espectrais	56
6.2 NG-relações para λ_2	60
6.3 Grafos que verificam a cota NG_2	63
6.4 Grafos extremais para a cota NG_2	70
7 Grafos com todos os autovalores, exceto os extremais em $[-2, 0]$	78
7.1 Resultados da literatura	78
7.2 Grafos com todos os autovalores, exceto os extremais, em $[-2, 0]$	83

7.3	Caracterização da classe \mathcal{C}'	85
8	Considerações finais	95
	Referências Bibliográficas	97
A	Algumas demonstrações	106
	Índice Remissivo	113

Lista de Figuras

2.1	Grafo G com pares de vértices gêmeos.	5
2.2	Grafos K_8 e $CP(4)$	6
2.3	Grafos S_5 e $L(S_5)$	7
2.4	Subgrafos proibidos para grafos linha.	8
2.5	Grafo G e seu grafo linha generalizado $L(G; 2, 1, 0, 3)$	8
2.6	Grafo $\bigvee_3 P_3$	9
2.7	Grafo $H[G_1, G_2, G_3]$	10
2.8	Grafo $K_3 \cdot K_3$	10
2.9	Subgrafos induzidos de \mathcal{D} -grafos.	11
2.10	Dupla estrela $S_{3,4}$	12
2.11	Dupla vassoura $S_{3,4,3}$	12
2.12	Grafos relacionados a Proposição 2.15.	17
2.13	Grafo P_5	19
2.14	Grafo H	19
2.15	Grafo de Petersen.	22
3.1	Grafo $G_{4,7}$	23
3.2	Grafo com exatamente um autovalor positivo.	26
3.3	Grafos dupla pipa.	27
3.4	Grafos regulares em que $\lambda_2 = 1$	28
3.5	Grafo 3-regular em que $\lambda_2 \approx 2.89$	28
3.6	Grafo 3-regular em que $\lambda_2 \approx 2.7785$	30
3.7	Grafo 4-regular em que $\lambda_2 = 1$	31
3.8	Grafos em \mathcal{B}_4	32
3.9	Grafos $2K_{2,2}^e$ e $2K_{2,3}^e$	32
3.10	Dupla vassoura $S_{3,3,4}$	33
4.1	Todos os grafos de ordem 6 em que $\lambda_2 > 1$	35
4.2	Grafos que satisfazem a condição (ii) do Teorema 4.1.	35
4.3	Grafos que não atendem a condição (ii) do Teorema 4.1.	36
4.4	Grafos que não atendem a recíproca do Teorema 4.3.	37

4.5	Árvore $T_{3,2}$	38
4.6	Grafos bipartidos em que $\lambda_2 = 1$	38
4.7	Classes infinitas de grafos bipartidos em que $\lambda_2 = 1$	39
4.8	Grafo $F_{1,3}$	40
4.9	Grafos linha em que $\lambda_2 = 1$	40
4.10	Grafos linha generalizados com $\lambda_2 = 1$	41
4.11	Theta grafos $\Theta_{2,2,2}$ e $\Theta_{3,3,4}$	41
4.12	Theta grafo generalizado $G_{1,2,3,5}$	42
4.13	Classes de theta grafos generalizados com $\lambda_2 \leq 1$	42
4.14	Grafo $U(6, 2)$	43
4.15	Grafos unicíclicos em que $\lambda_2 = 1$	43
4.16	Grafos bicíclicos.	44
4.17	Grafos bicíclicos em que $\lambda_2 = 1$	44
4.18	Grafos tricíclicos.	44
4.19	Grafos tricíclicos com $\lambda_2 = 1$	45
5.1	Grafos para os quais $\lambda_2 > \frac{1}{3}$	46
5.2	Grafo $4K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$	48
5.3	Grafos em que $\lambda_2 > \sqrt{2} - 1$	51
5.4	Subgrafos proibidos para σ -grafos.	55
6.1	Grafos com ordem e cintura no intervalo $[5, 8]$	67
6.2	Grafos em $\mathcal{H}(P_4)$	71
6.3	Par de grafos complementares em \mathcal{H}'	71
6.4	Grafo $H_{2,2,2,2}$	73
7.1	Grafos L_3 e L_4	79
7.2	Grafos com dois autovalores diferentes de ± 1	79
7.3	Grafos Γ_3 e Γ_4	81
7.4	Grafos $\Omega_{1,2}$, $\Omega_{2,2}$ e $\Omega_{3,4}$	81
7.5	Grafos R , Υ_1 e Υ_2	82
7.6	Grafos esporádicos com dois autovalores diferentes de -2 e 0	82
7.7	Grafo G_{13}	83
7.8	Subgrafo proibido para os grafos em \mathcal{C}'	84
7.9	Grafos esporádicos que satisfazem a Proposição 7.6.	91
7.10	Grafos que satisfazem a Proposição 7.7.	93
7.11	Grafos que satisfazem a Proposição 7.8.	94

Lista de Tabelas

3.1 Grafos regulares.	29
-------------------------------	----

Capítulo 1

Introdução

A Teoria Espectral dos Grafos é um dos temas mais dinâmicos e fascinantes da Teoria dos Grafos. Além da conexão com outros ramos da Combinatória, da Álgebra e da Geometria, há inúmeras aplicações em outros campos como Química [1], [2] e [3]; Física e Engenharia Elétrica [2]; Estatística [4]; Otimização Combinatória [5] e [6]; Ciência da Computação [7], [8] e [9]; Teoria Extremal de Grafos [6] e [10]; Códigos de Correção de Erro [11] e, para outras aplicações, citamos [12]. A importância da Teoria Espectral de Grafos também evidencia-se pela grande quantidade de livros publicados dedicados ao estudo de autovalores de grafos, com destaque para [3], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19] e [20].

Todo grafo pode ser representado por uma matriz que contém informações sobre a sua estrutura. Há várias matrizes que representam grafos, entre elas destacam-se a matriz de adjacência, matriz laplaciana e matriz laplaciana sem sinal. A Teoria Espectral dos Grafos investiga como os autovalores, de tais representações matriciais, se relacionam com propriedades estruturais do grafo. Nesta tese, concentramos nossas pesquisas em resultados que estão associados ao segundo maior autovalor da matriz de adjacência, o qual denotamos por λ_2 . Tal autovalor está relacionado a invariantes estruturais do grafo tais como diâmetro e conectividade, veja [18] e [20].

Um dos principais problemas investigados na literatura relacionados a λ_2 , é a determinação de cotas inferiores ou superiores para grafos com a propriedade $\lambda_2 \leq r$, onde

$$r \in \left\{ \frac{1}{3}, \sqrt{2} - 1, \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, 2 \right\}.$$

Todos os grafos com $\lambda_2 \leq \frac{1}{3}$ foram determinados por CAO e HONG [21]. Grafos com $\lambda_2 < \sqrt{2} - 1$ foram completamente determinados por PETROVIĆ [22]. Aqueles em que $\lambda_2 \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ foram investigados por CVETKOVIĆ e SIMIĆ [23], SIMIĆ [24] e determinados de maneira não explícita via subgrafos proibidos, por SIMIĆ [25]. A caracterização dos grafos com a propriedade $\lambda_2 \leq 1$ foi dada parcialmente por

CVETKOVIĆ [26], permanecendo em aberto o caso em que um grafo G e seu respectivo grafo complementar \overline{G} têm a propriedade $\lambda_2(G) \leq 1$ e $\lambda_n(\overline{G}) < -2 \leq \lambda_{n-1}(\overline{G})$. A alta complexidade deste problema levou os pesquisadores a investigar classes de grafos com $\lambda_2 \leq 1$. Os grafos bipartidos com essa propriedade foram determinados por PETROVIĆ [27] e algumas classes de grafos regulares, por STANIĆ [28] e KOLEDIN e STANIĆ [29]. Outras classes especiais de grafos também foram caracterizadas para este caso tais como, grafos linha generalizados, PETROVIĆ e MILEKIĆ [30]; grafos unicíclicos, XU [31]; grafos bicíclicos, GUO [32] e grafos tricíclicos, LI e YANG [33]. Alguns grafos para os quais $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$ e $\lambda_2 \leq \sqrt{3}$ foram investigados por STANIĆ [34], KOLEDIN [35] e KOLEDIN e STANIĆ [36]. Em 2014, MIHAILOVIĆ [37] determinou todas as árvores tais que $\lambda_2 \leq \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. Em geral, o estudo dos grafos em que $\lambda_2 \leq 2$ tem aplicação direta na construção e classificação de grupos reflexivos, veja NEUMAIER e SEIDEL [38] e, para mais detalhes teóricos, sugerimos MIHAILOVIĆ *et al.* [39].

Em 1956, NORDHAUS e GADDUM [40] determinaram cotas inferiores e superiores para a soma e o produto do número cromático de um grafo e de seu complementar. Desde então, as desigualdades que relacionam um invariante de um grafo e o mesmo invariante de seu grafo complementar tem sido considerados por vários pesquisadores. Problemas relacionados com tais desigualdades são conhecidos como *Problemas de Nordhaus-Gaddum* e tais desigualdades também levam este nome. O primeiro resultado que envolve a soma do índice de um grafo com o índice de seu grafo complementar é devido a NOSAL [41] que, em 1970, determinou uma cota inferior e outra superior para tal soma. Posteriormente, em 2007, NIKIFOROV [42] melhorou a cota inferior para grafos irregulares e a cota superior foi melhorada por CSIKVÁRI [43], em 2009. Dois anos depois, TERPAI [44] melhorou esta última cota. Em 2014, NIKIFOROV e YUAN [45] determinaram cotas superiores para a soma do valor absoluto de um autovalor de um grafo com o correspondente valor absoluto do autovalor de seu grafo complementar e, em particular, este artigo fornece a melhor cota superior, conhecida até os dias de hoje, para a soma do segundo maior autovalor do grafo com o segundo maior autovalor do seu grafo complementar.

O objetivo desta tese é investigar o segundo maior autovalor de um grafo, na tentativa de obter algumas novas cotas. A tese se desenvolve da seguinte forma: no Capítulo 2, são introduzidos conceitos e resultados da Teoria dos Grafos, Teoria de Matrizes e da Teoria Espectral de Grafos necessários à compreensão do texto. Os Capítulos 3, 4 e 5 são dedicados a uma revisão bibliográfica sobre o segundo maior autovalor de um grafo. No Capítulo 3, são apresentadas as principais cotas conhecidas para λ_2 , tanto de um grafo qualquer quanto de grafos em classes particulares. No Capítulo 4 revisamos os principais resultados de CVETKOVIĆ [26], relativos à caracterização estrutural de grafos em que $\lambda_2 \leq 1$. Além disso, exibimos uma

coletânea de resultados que descrevem todos os grafos de algumas classes especiais que em que $\lambda_2 \leq 1$. No Capítulo 5, destacamos as classes de grafos tais que $\lambda_2 \leq r$, para $r \in \left\{ \frac{1}{3}, \sqrt{2} - 1, \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right\}$.

No Capítulo 6, estão as nossas primeiras contribuições. Nele sugerimos uma nova cota superior para a soma do segundo maior autovalor de um grafo com o correspondente autovalor de seu grafo complementar. Provamos ser esta nova cota válida para as árvores, grafos k -cíclicos, bipartidos regulares, excepcionais, linha generalizados e para todos os grafos com cintura ao menos 5. Embora não tenhamos conseguido demonstrar que esta cota é satisfeita para qualquer grafo com cinturas 3 e 4, mostramos que tal cota é válida para infinitas classes de grafos com tais cinturas. Ao término deste capítulo, apresentamos uma classe de grafos que é extremal para essa nova cota e caracterizamos explicitamente todos os grafos dessa classe com a propriedade $\lambda_2 \leq 1$.

Como já dissemos anteriormente, a caracterização de um grafo G de ordem n tal que a condição $\lambda_n(\overline{G}) < -2$ implica em $\lambda_2(G) \leq 1$ é um problema que vem sendo investigado desde 1982 quando foi proposto por CVETKOVIĆ [26]. Ao investigarmos grafos com a propriedade $\lambda_n(\overline{G}) < -2$ e $\lambda_2(G) \leq 1$ encontramos os recentes trabalhos de CIOABĂ *et al.* [46], LIMA *et al.* [47] e CIOABĂ *et al.* [48]. O primeiro deles, publicado em 2015, caracteriza todos os grafos onde os autovalores, exceto o maior e o menor, são iguais a -1 ou 1 e, no ano seguinte, os autores do artigo [47] generalizam este problema caracterizando implicitamente todos os grafos conexos e não bipartidos cujos autovalores, exceto o maior e o menor, estão no intervalo $[-1, 1]$. Ainda em 2016, CIOABĂ *et al.* [48] publicam outro resultado, semelhante aquele de [46], onde são caracterizados todos os grafos cujos autovalores, exceto no máximo dois, são iguais a -2 ou 0 . No Capítulo 7, generalizamos este resultado, ao determinarmos explicitamente todos os grafos cujos autovalores, exceto o maior e o menor, estão no intervalo $[-2, 0]$. Finalmente, no Capítulo 8 estão expostas nossas considerações finais e propostas para a continuidade dessa pesquisa.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo são apresentados resultados conhecidos da Teoria dos Grafos, da Teoria de Matrizes e da Teoria Espectral de Grafos necessários à compreensão do texto. A maioria dos resultados se encontram demonstrados nas referências que os acompanham, a exceção de alguns cujas provas foram rerepresentadas de maneira mais didática que aquelas apresentadas nos artigos originais. As definições e notações relativas a Teoria dos Grafos podem ser encontradas em [16], [49], [50], [51], [52] e [53]; aquelas referentes a Teoria de Matrizes em [54], [55] e [56] e, finalmente, as relativas a Teoria Espectral de Grafos estão em [13], [17] e [57].

2.1 Teoria dos Grafos

Um *grafo* é um par ordenado $G = (V(G), E(G))$, ou simplesmente $G = (V, E)$, constituído por um conjunto finito e não vazio V , cujos elementos são denominados *vértices*, e um conjunto E de pares não ordenados de vértices distintos chamados *arestas*. As cardinalidades dos conjuntos V e E são denotadas por $|V|$ e $|E|$, respectivamente.

Dado um grafo G , representamos seu conjunto de vértices por $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e o conjunto de arestas por $E = \{\{v_i, v_j\}; i \neq j \text{ e } v_i, v_j \in V\}$. A *ordem* de G é $|V| = n$ e o *tamanho* de G é $|E| = m$. Duas arestas são *adjacentes* em G se possuem um vértice em comum, caso contrário elas são não adjacentes. Dois vértices v_i e v_j são ditos *adjacentes* ou *vizinhos* se $\{v_i, v_j\} \in E$, caso contrário eles são ditos *não adjacentes*. Escrevemos $v_i \sim v_j$ para indicar que v_i e v_j são adjacentes e $v_i \not\sim v_j$, caso contrário. Se $v_i \sim v_j$, a aresta $e = \{v_i, v_j\}$ é dita ser *incidente* a v_i e a v_j . A *vizinhança* de um vértice $v_i \in V$ é o conjunto $N_G(v_i) = \{v_j \in V; v_i \sim v_j\}$ e sua vizinhança fechada é $N_G[v_i] = N_G(v_i) \cup \{v_i\}$. O *grau* de v_i , denotado por $d(v_i)$ ou d_i , é a cardinalidade de $N_G(v_i)$, ou seja, $d(v_i) = |N_G(v_i)|$. Os graus mínimo e máximo de G são, respectivamente, $\delta(G) = \min\{d_i; v_i \in V\}$ e $\Delta(G) = \max\{d_i; v_i \in V\}$. Se $d_i = 0$, v_i é um *vértice isolado* e se $d_j = 1$, v_j é um *vértice pendente*. Os

vértices adjacentes a vértices pendentos são ditos *quase pendentos* e um vértice é *universal* se tem grau $n - 1$. Dois vértices distintos v_i e v_j são *gêmeos verdadeiros* em G se $N_G[v_i] = N_G[v_j]$ e são *gêmeos falsos* se $N_G(v_i) = N_G(v_j)$ e $v_i \not\sim v_j$. Em ambos os casos, dizemos que v_i e v_j constituem um par de vértices gêmeos em G e o denotamos por $[v_i, v_j]$. Na Figura 2.1 ilustramos um grafo que possui três pares de vértices gêmeos, $[v_1, v_2]$, $[v_4, v_5]$ e $[v_6, v_7]$. Os dois primeiros são pares de vértices gêmeos verdadeiros e o último é um par de vértices gêmeos falsos.

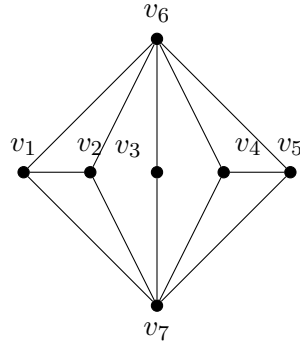


Figura 2.1: Grafo G com pares de vértices gêmeos.

Dado um grafo G , um conjunto $S \subseteq V$ é dito *independente* se quaisquer dois de seus vértices são não adjacentes e uma *clique* em G é um conjunto maximal de vértices de G que são mutuamente adjacentes.

Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $u, w \in V$. Um *caminho* de u a w em G , de comprimento $k \geq 1$, é uma sequência de vértices distintos $[v_0, v_1, \dots, v_k]$ tais que $u = v_0$, $w = v_k$ e $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$, $1 \leq i \leq k$. O grafo G é *conexo* se tem ordem 1 ou se todo par de vértices distintos de G é unido por um caminho. Caso contrário, G é *desconexo*. A *distância* entre os vértices u e v em um grafo conexo G , denotada por $d(u, v)$, é o comprimento do menor caminho entre eles. Se G é conexo e $v \in V$, a *excentricidade* de v em G é $exc(v) = \max\{d(u, v); u \in V\}$. O *diâmetro* de um grafo conexo é $diam(G) = \max\{exc(v); v \in V\}$. Se G é desconexo dizemos que G tem diâmetro infinito. Um grafo $G = (V, E)$ é *vazio* se $E = \emptyset$. Quando quaisquer dois vértices de G são adjacentes, o grafo é *completo* e denotado por K_n . Um grafo é *r-regular* (ou simplesmente regular) se todo vértice tem grau r . Um *ciclo* C_n é um grafo 2-regular conexo de ordem n . O *grafo complementar* de $G = (V, E)$, denotado por $\overline{G} = (V, \overline{E})$, tem V como conjunto de vértices e dois vértices são adjacentes em \overline{G} se e somente se não são adjacentes em G .

Um *subgrafo* de G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se H é um subgrafo de G , então G é um *supergrafo* de H . Um subgrafo H de G é um *subgrafo próprio* se $V(H) \neq V(G)$ ou $E(H) \neq E(G)$ e H é um *subgrafo maximal* se não existe um subgrafo próprio de G que é supergrafo de H . Se $V(H) = V(G)$ dizemos que H é

um *subgrafo abrangente* ou *gerador* de G . Qualquer subgrafo abrangente de G pode ser obtido através da exclusão de arestas de G . Diz-se que H é um *subgrafo induzido* de G se dois vértices de H , adjacentes em G , são necessariamente adjacentes em H . Neste caso, se $V(H) = S \subseteq V(G)$ denotamos $H = G[S]$ e dizemos que S induz um subgrafo em G . Uma *componente* de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G .

A *cintura* de G , $g(G)$, é o comprimento do menor ciclo em G . Caso G não possua ciclos, considera-se $g(G) = \infty$. Um grafo que possui cintura maior que 3 é dito livre de triângulos.

Para $n \geq 6$, o teorema a seguir assegura que grafos livres de triângulos possuem complementares com cintura 3.

Teorema 2.1 (HARARY [49]) *Se G é um grafo de ordem $n \geq 6$, então G ou \overline{G} tem cintura 3.*

Um grafo conexo G é dito *k -cíclico* se $|E| = |V| + k$. Nos casos particulares onde $k \in \{0, 1, 2\}$, o grafo é denominado *unicíclico*, *bicíclico* e *tricíclico*, respectivamente.

O *grafo coquetel* (*cocktail party*), $CP(n)$, é o único grafo regular com $2n$ vértices de grau $2n - 2$; o qual é obtido de K_{2n} pela exclusão de n arestas mutuamente não adjacentes, isto é, arestas que não possuem vértices em comum. Também é conhecido na literatura como grafo octaédrico n -dimensional (*n -dimensional octahedral*). A Figura 2.2 ilustra os grafos K_8 e $CP(4)$.

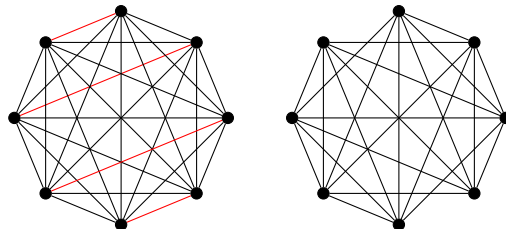


Figura 2.2: Grafos K_8 e $CP(4)$.

Uma partição de um conjunto não vazio S é uma coleção constituída por r subconjuntos não vazios dois a dois disjuntos de S cuja união é S . Os subconjuntos da partição são chamados de *células*. Um grafo é *k -partido* se seu conjunto de vértices possui uma partição com exatamente k células de modo que vértices pertencentes a uma mesma célula não são adjacentes. Um grafo *k -partido completo* é um grafo k -partido em que dois vértices quaisquer são adjacentes se e somente se pertencem a células distintas. Tais grafos também são conhecidos por *grafos multipartidos completos*. Se as k células têm cardinalidade n_1, n_2, \dots, n_k então o grafo é denotado por K_{n_1, n_2, \dots, n_k} e se cada célula tem cardinalidade r então o grafo é dito *k -partido r -balanceado* e o denotamos por $K_{k(r)}$. Se $k = 2$, o grafo é *bipartido* e o grafo K_{n_1, n_2}

é dito *bipartido completo*. Grafos bipartidos admitem uma caracterização simples em termos de ciclos de comprimento ímpar.

Teorema 2.2 (HARARY [49]) *Um grafo é bipartido se e somente se não contém ciclos de comprimento ímpar como subgrafo induzido.*

Uma *floresta* é um grafo (não necessariamente conexo) sem ciclos. Um grafo conexo e sem ciclos é denominado *árvore*. As árvores são exemplos de grafos bipartidos. O *caminho* P_n é uma árvore de ordem n que possui dois vértices pendentes e os demais vértices de grau 2, e a *estrela* S_n é uma árvore que tem exatamente um vértice de grau $n - 1$ e todos os demais vértices pendentes. O vértice quase pendente de uma estrela é denominado *centro* da estrela.

O *grafo linha* $L(G)$ de um grafo G tem as arestas de G como seus vértices e dois vértices de $L(G)$ são adjacentes se as arestas correspondentes em G têm um vértice em comum. A Figura 2.3 exhibe o grafo estrela S_5 e o seu respectivo grafo linha $L(S_5) \simeq K_4$.

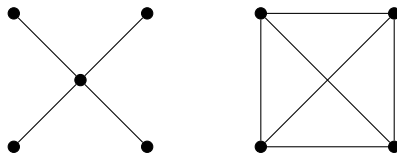


Figura 2.3: Grafos S_5 e $L(S_5)$.

Em 1943, KRAUSZ [58] fornece uma caracterização de grafos linha em termos de uma cobertura de arestas por cliques.

Teorema 2.3 (KRAUSZ [58]) *Um grafo é um grafo linha se e somente se seu conjunto de arestas pode ser particionado em cliques não triviais tais que*

- (i) *duas cliques têm pelo menos dois vértices em comum;*
- (ii) *cada vértice pertence, a no máximo, duas cliques.*

Uma *classe (família)* de grafos é uma coleção de grafos definidos por uma propriedade \mathcal{P} específica. Quando isto acontece diz-se que o grafo de tal classe tem a propriedade \mathcal{P} . Um grafo H é chamado *subgrafo proibido* para uma propriedade \mathcal{P} se dado um grafo G que satisfaz a propriedade \mathcal{P} então G não pode conter um subgrafo induzido isomorfo a H . Um subgrafo H , proibido para uma propriedade \mathcal{P} , é *minimal* se todo subgrafo induzido de H tem a propriedade \mathcal{P} . A Proposição 2.4 proporciona um critério estrutural que caracteriza os grafos linha através de subgrafos induzidos proibidos.

Proposição 2.4 (BEINEKE [59]) *Um grafo G é um grafo linha se e somente se não contém qualquer um dos nove grafos da Figura 2.4 como subgrafo induzido.*

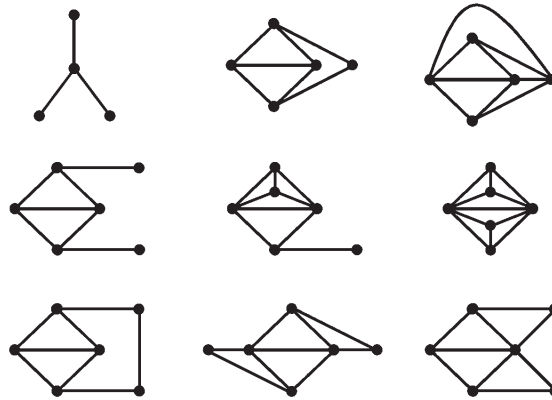


Figura 2.4: Subgrafos proibidos para grafos linha.

Sejam a_1, a_2, \dots, a_n inteiros não negativos e G um grafo cujo conjunto de vértices é $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, o *grafo linha generalizado* $L(G; a_1, a_2, \dots, a_n)$ é obtido da união disjunta do grafo linha $L(G)$ com n cópias de grafos coquetel $CP(a_i)$, incluídas as arestas obtidas pela ligação de cada vértice $\{v_i, v_j\}$ de $L(G)$ a todos os vértices de $CP(a_i)$ e a todos os vértices de $CP(a_j)$. Tal grafo foi definido por HOFFMAN [60].

Casos especiais incluem o grafo linha, quando $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, e o grafo coquetel $CP(m)$ quando $n = 1$ e $a_1 = m$. A Figura 2.5 ilustra o grafo G com conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e o grafo linha generalizado $L(G; 2, 1, 0, 3)$, onde $e_{i,j}$ é um vértice do grafo linha generalizado que corresponde a aresta $\{v_i, v_j\}$ de G .

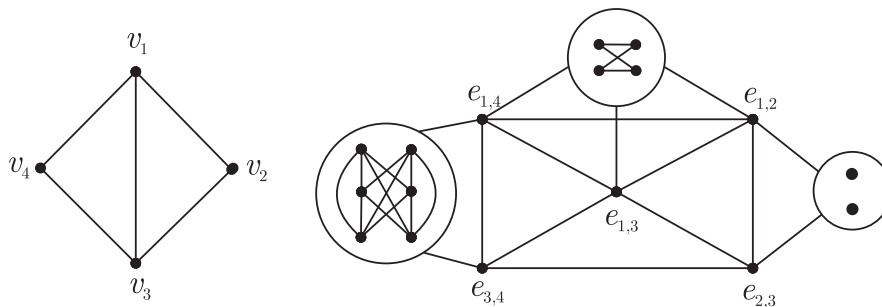


Figura 2.5: Grafo G e seu grafo linha generalizado $L(G; 2, 1, 0, 3)$.

Em 1980, CVETKOVIĆ *et al.* [61] caracterizaram os grafos linha generalizados por uma coleção constituída por 31 subgrafos proibidos. Tal caracterização também foi encontrada, independentemente, por RAO *et al.* [62].

Dois grafos G_1 e G_2 são ditos *isomorfos*, $G_1 \simeq G_2$, se existe uma aplicação bijetora $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ que preserva as relações de adjacências, isto é, se $\{u, v\} \in E(G_1)$ então $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E(G_2)$. Neste caso, a aplicação ϕ é dita um *isomorfismo* de grafos. Um grafo G é *autocomplementar* se $G \simeq \overline{G}$.

Um *invariante* de um grafo G é um número associado a G que tem o mesmo valor para qualquer grafo isomorfo a G . A ordem e o tamanho de um grafo são exemplos de invariantes de grafos.

Sejam G um grafo e S um subconjunto próprio de $V(G)$. O subgrafo $G[V \setminus S]$ é obtido de G pela remoção de S e é denotado por $G - S$. Se $S = \{v\}$, $G - S$ é simplesmente denotado por $G - v$.

Considere dois grafos G_1 e G_2 com conjunto de vértices disjuntos. O grafo $G = G_1 \cup G_2$, onde $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ é chamado de *união disjunta* ou *soma* dos grafos G_1 e G_2 . A união disjunta de $k \geq 2$ cópias de G é denotada por kG .

A *junção* (*join*) ou *produto completo* dos grafos G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \vee G_2$ obtido a partir de $G_1 \cup G_2$ ao ligar-se cada vértice de G_1 a todos os vértices de G_2 , isto é, $G_1 \vee G_2$ é o grafo cujo conjunto de vértices é $V(G_1) \cup V(G_2)$ e cujo conjunto de arestas é $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{\{v, w\}; v \in V(G_1) \text{ e } w \in V(G_2)\}$. A junção entre G_1 e G_2 relaciona-se com o complementar da união de grafos complementares através da seguinte identidade: $G_1 \vee G_2 = \overline{\overline{G_1} \cup \overline{G_2}}$. A junção de $k \geq 2$ cópias de G é denotada por $\bigvee_k G$. A Figura 2.6 ilustra o grafo $\bigvee_3 P_3 = (P_3 \vee P_3) \vee P_3$.

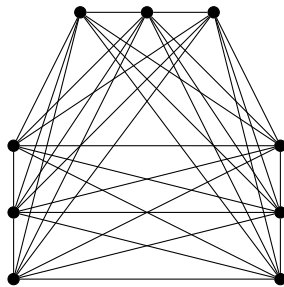


Figura 2.6: Grafo $\bigvee_3 P_3$.

A Proposição 2.5 fornece uma caracterização estrutural para os grafos multipartidos completos em termos de subgrafos proibidos.

Proposição 2.5 (SMITH [63]) *Um grafo sem vértices isolados é multipartido completo se e somente se não contém nenhum dos grafos $2K_2$, P_4 e $K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$ como subgrafo induzido.*

Uma generalização da junção de dois grafos foi introduzida em [64] sob a designação de composição generalizada e, mais recentemente, em [65], com a designação de *H-junção* (*H-join*). Dado um grafo H tal que $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$,

considere uma família com p grafos, $\mathcal{F} = \{G_1, G_2, \dots, G_p\}$, onde cada grafo G_j , $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, tem ordem n_j e está associado a um vértice $v_j \in V(H)$. A H -junção de G_1, G_2, \dots, G_p é o grafo $G = H[G_1, G_2, \dots, G_p]$ tal que

$$V(G) = \bigcup_{j=1}^p V(G_j) \text{ e}$$

$$E(G) = \left(\bigcup_{j=1}^p E(G_j) \right) \cup \left(\bigcup_{\{v_r, v_s\} \in E(H)} \{\{u, v\}; u \in V(G_r) \text{ e } v \in V(G_s)\} \right).$$

Sejam $H = P_3$ e $G_1 = 2K_1$, $G_2 = K_2$ e $G_3 = C_3$. A P_3 -junção de $2K_1$, K_2 e C_3 é o grafo $H[G_1, G_2, G_3]$, exibido na Figura 2.7.

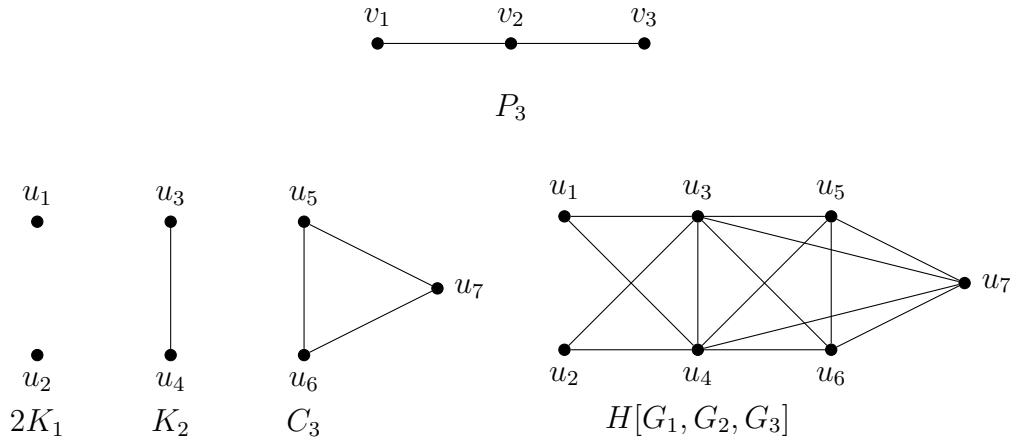


Figura 2.7: Grafo $H[G_1, G_2, G_3]$.

A *coalescência*, $G_1 \cdot G_2$, de dois grafos G_1 e G_2 com respeito aos vértices $u \in V_1$ e $v \in V_2$ é o grafo obtido de $G_1 \cup G_2$ por meio da identificação dos vértices u e v , isto é, os vértices u e v são substituídos por um único vértice w em $G_1 \cdot G_2$ que é adjacente a todas as adjacências de u em G_1 e a todas as adjacências de v em G_2 . A Figura 2.8 ilustra o grafo $K_3 \cdot K_3$.

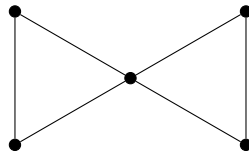


Figura 2.8: Grafo $K_3 \cdot K_3$.

Um grafo G de ordem $n \geq 4$ tem a *propriedade diagonal* se e somente se para toda quádrupla v_1, v_2, v_3 e v_4 de vértices distintos em G tais que $v_1 \sim v_2, v_2 \sim v_3$ e $v_3 \sim v_4$ tem-se necessariamente $v_1 \sim v_3$ ou $v_2 \sim v_4$. Grafos que têm a propriedade

diagonal são chamados \mathcal{D} -grafos. Qualquer \mathcal{D} -grafo tem como subgrafo induzido pelo menos um dos grafos da Figura 2.9. Tal definição deve-se a WOLK [66].

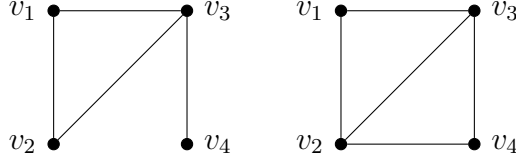


Figura 2.9: Subgrafos induzidos de \mathcal{D} -grafos.

O Lema 2.6, conhecido como *Lema de Wolk*, estabelece que qualquer \mathcal{D} -grafo de ordem n possui um vértice de grau $n - 1$.

Lema 2.6 (WOLK [67]) *Todo \mathcal{D} -grafo conexo de ordem n possui um vértice universal.*

Demonstração. Sejam G um \mathcal{D} -grafo de ordem n e u um vértice de grau máximo cujas adjacências são v_1, v_2, \dots, v_m . Suponha que G possua um outro vértice w , além dos vértices u, v_1, v_2, \dots, v_m . Pela conexidade de G , w é adjacente a pelo menos um dos vértices v_i , $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$, digamos v_1 . Para qualquer $i \in \{2, 3, \dots, m\}$ temos $v_i \sim u$, $u \sim v_1$ e $v_1 \sim w$. Como $w \not\sim u$ segue da propriedade diagonal que $v_i \sim v_1$ para todo $i \in \{2, 3, \dots, m\}$. Logo $d(v_1) \geq d(u) + 1 > d(u)$, o que contradiz a maximalidade de $d(u)$. Portanto, u, v_1, v_2, \dots, v_m são os únicos vértices de G e $d(u) = n - 1$. □

A Proposição 2.7 assegura que grafos sem vértices isolados, cujo grafo complementar é conexo, possuem $2K_2$ ou P_4 como subgrafo induzido.

Proposição 2.7 (WOLK [67]) *Se \overline{G} é um grafo conexo e G não tem vértices isolados, então G contém um subgrafo induzido isomorfo a $2K_2$ ou a P_4 .*

Demonstração. Seja G um grafo sem vértices isolados tal que seu grafo complementar \overline{G} é conexo. Como G não possui vértices isolados segue que $\delta(G) \geq 1$. Logo, $\Delta(\overline{G}) = n - 1 - \delta(G) \leq n - 2$. Como \overline{G} é conexo e não possui vértice universal segue do Lema 2.6 que \overline{G} não é um \mathcal{D} -grafo. Portanto, existem vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 tais que $v_1 \sim v_2$, $v_2 \sim v_3$, $v_3 \sim v_4$, $v_1 \not\sim v_3$ e $v_2 \not\sim v_4$ em \overline{G} . Além disso, tem-se $v_1 \sim v_4$ ou $v_1 \not\sim v_4$ em \overline{G} .

Se $v_1 \sim v_4$ então os vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 induzem C_4 em \overline{G} , caso contrário tais vértices induzem P_4 em \overline{G} . Portanto, G contém um subgrafo induzido isomorfo a $2K_2$ ou a P_4 . □

Um grafo é dito *split* se seu conjunto de vértices pode ser particionado como uma união disjunta de dois conjuntos, de modo que um deles é independente e o outro é uma clique. Segue da definição que o grafo complementar e os subgrafos induzidos de um grafo *split* também são grafos *split*. Um grafo *split completo* com parâmetros n e r , $r \leq n$, denotado por $CS(n, r)$, é um grafo *split* com n vértices, constituído por uma clique com $n - r$ vértices e um conjunto independente com r vértices, de modo que todo vértice do conjunto independente tem grau $n - r$. Logo, $CS(n, r) \simeq K_r \vee (n - r)K_1$.

GRONE e MERRIS [68] definiram árvores de diâmetro 3 como aquelas que têm exatamente dois vértices quase pendentos que são adjacentes entre si e todos os demais vértices são pendentos. Tal como GROSSMAN *et al.* [69] cada uma dessas árvores é chamada *dupla estrela*. Estas podem ser obtidas como resultante da coalescência de cada vértice de P_2 com os centros das respectivas estrelas S_p e S_q . Para $1 \leq p \leq q$, denota-se uma dupla estrela por $S_{p,q}$. Veja a dupla estrela $S_{3,4}$ exposta na Figura 2.10.

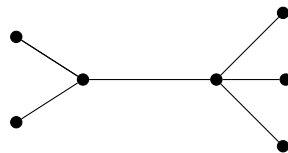


Figura 2.10: Dupla estrela $S_{3,4}$.

Os grafos obtidos pela coalescência dos vértices pendentos do caminho P_r com os respectivos centros das estrelas S_p e S_q definem uma classe de árvores em que cada árvore é conhecida como *dupla vassoura*. Para $r \geq 3$ e $1 \leq p \leq q$, estas possuem $n = p + q + r - 2$ vértices e são denotadas por $S_{p,q,r}$. Veja, na Figura 2.11, a dupla vassoura $S_{3,4,3}$.

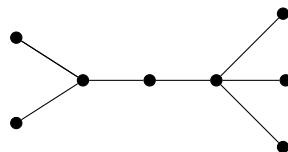


Figura 2.11: Dupla vassoura $S_{3,4,3}$.

2.2 Teoria de Matrizes

Dados dois inteiros positivos $n, m \geq 1$, uma *matriz* $M_{n \times m}$ é uma aplicação de $\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ em \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Neste trabalho consideram-se apenas as matrizes definidas sobre o corpo dos números reais cujos elementos (entradas) são

denotados por m_{ij} para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Fixados i e j , m_{ij} é a entrada na interseção da i -ésima linha com a j -ésima coluna. Esta matriz é de ordem $n \times m$ e é representada por

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1m} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nm} \end{bmatrix},$$

ou alternativamente, por $M = [m_{ij}]$. Uma matriz $M = [m_{ij}]$ é não negativa se $m_{ij} \geq 0$. Se $n = m$, M é chamada matriz *quadrada* de ordem n . O espaço vetorial constituído por todas as matrizes de ordem $n \times m$ é denotado por $\mathbb{M}_{n \times m}$ ou, simplesmente, \mathbb{M}_n quando $n = m$.

Dado $M \in \mathbb{M}_n$, as entradas do tipo m_{ii} são ditas *entradas diagonais* de M e o conjunto de todas as suas entradas diagonais é a *diagonal principal* de M . Dados $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, se para $i \neq j$, $m_{ij} = 0$, M é chamada *matriz diagonal*. O traço de M é a soma de todas as entradas diagonais de M , isto é, $\text{tr}(M) = m_{11} + m_{22} + \cdots + m_{nn}$. A matriz cujas entradas são todas iguais a 1 é denotada por $J_{n \times m}$ ou J_n (caso tenha ordem n) e a *matriz identidade* $I_n \in \mathbb{M}_n$ é uma matriz diagonal tal que todas as entradas diagonais são iguais a 1. Estas são respectivamente denotadas por J ou I , caso não seja necessário explicitar suas respectivas ordens. A matriz $M \in \mathbb{M}_n$ é *não singular* se existe uma matriz $N \in \mathbb{M}_n$ tal que $MN = NM = I$ e, neste caso, N é a *inversa* de M e é denotada por M^{-1} .

Dado $M \in \mathbb{M}_{n \times m}$, a *matriz transposta* de M é a matriz $M^T \in \mathbb{M}_{m \times n}$ cujas entradas são definidas por $\hat{m}_{ij} = m_{ji}$. Uma matriz quadrada de ordem n é *simétrica* se $M = M^T$, é *ortogonal* se $M^T = M^{-1}$ e é uma matriz de *permutação* se em cada linha e em cada coluna há $n - 1$ entradas nulas e uma única entrada igual a 1.

Uma matriz quadrada M é *reduzível* quando existem uma matriz de permutação Q e matrizes quadradas X e Z tais que

$$Q^T M Q = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}.$$

Caso contrário, M é chamada *matriz irreduzível*.

Um *vetor linha* é uma matriz em $\mathbb{M}_{1 \times m}$, enquanto que um *vetor coluna* é uma matriz em $\mathbb{M}_{n \times 1}$. O vetor coluna com todas as entradas iguais a 1 é denotado por j_n ou simplesmente j . Os elementos de \mathbb{R}^n são identificados com os elementos de $\mathbb{M}_{n \times 1}$ (ou algumas vezes com os elementos de $\mathbb{M}_{1 \times m}$) e, neste caso, são denominados *vetores*.

Um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é chamado *autovalor* de $M \in \mathbb{M}_n$ se existe um vetor não

nulo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Mx = \lambda x$. O vetor x é chamado *autovetor* de M associado ao autovalor λ . Quando necessário, escrevemos $\lambda = \lambda(M)$ para destacar que λ é um autovalor da matriz M . O *polinômio característico* de M é o polinômio mônico de grau n definido como o determinante da matriz $xI - M$ e denotado por $p_M(x) = \det(xI - M)$. As n raízes de $p_M(x)$ são os autovalores de M e o multiconjunto constituído por elas é denominado *espectro* de M e denotado por $\text{Spec}(M)$. O *raio espectral* de M é o número real não negativo $\rho(M) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Spec}(M)\}$.

A *multiplicidade algébrica* de $\lambda \in \text{Spec}(M)$, denotada por $m_a(\lambda)$, é o número de vezes que λ ocorre como raiz do polinômio característico de M . O espaço vetorial $E_\lambda(M) = \{x \in \mathbb{R}^n; Mx = \lambda x\}$ é o *autoespaço* de M associado a $\lambda \in \text{Spec}(M)$. A *multiplicidade geométrica* de $\lambda \in \text{Spec}(M)$, denotada por $m_g(\lambda)$, é a dimensão de $E_\lambda(M)$. Um autovalor $\lambda \in \text{Spec}(M)$ é *simple* se $m_a(\lambda) = 1$ e *semisimple* se $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$. Como todo autovalor λ de uma matriz simétrica é um número real semisimple, suas multiplicidades algébrica e geométrica são iguais. Logo estas são simplesmente referidas por *multiplicidade* e denotadas por $m(\lambda)$.

Uma matriz $M \in \mathbb{M}_n$ é *diagonalizável* se existe uma matriz não singular $P \in \mathbb{M}_n$ tal que $M = PDP^{-1}$ para alguma matriz diagonal $D \in \mathbb{M}_n$.

A Proposição 2.8 relaciona o traço e o determinante de uma matriz diagonalizável com o seu espectro.

Proposição 2.8 (HORN e JOHNSON [54]) *Se $M \in \mathbb{M}_n$ é diagonalizável e $\text{Spec}(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ então*

$$\text{tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \text{ e } \det(M) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n,$$

onde $\text{tr}(M)$ e $\det(M)$ denotam o traço e o determinante de M , respectivamente.

Da Proposição 2.9 deriva-se uma técnica para a determinação de alguns autovalores de uma matriz quando esta possui linhas cujas somas de suas respectivas entradas resultam em uma mesma constante.

Proposição 2.9 (HORN e JOHNSON [54]) *Seja M uma matriz quadrada de ordem n da forma*

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,k} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k,1} & M_{k,2} & \cdots & M_{k,k} \end{bmatrix},$$

onde $M_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq k$, é uma submatriz de ordem $n_i \times n_j$ tal que suas linhas têm somas constantes e iguais a $c_{i,j}$. Se $\overline{M} = [c_{i,j}]_{k \times k}$, então os autovalores de \overline{M} são também autovalores de M .

O Teorema 2.10, conhecido como *Teorema de Perron-Frobenius*, afirma que uma matriz M não negativa e irredutível tem o raio espectral $\rho(M)$ como seu maior autovalor.

Teorema 2.10 (MEYER [55]) *Se $M \in \mathbb{M}_n$ é uma matriz irredutível e não negativa, então*

(i) $\rho(M) > 0$;

(ii) $\rho(M)$ é um autovalor simples de M ;

(iii) Existe um vetor positivo, v , tal que $Mv = \rho(M)v$.

O teorema a seguir, conhecido como *Desigualdades de Courant-Weyl*, estabelece a relação entre os autovalores de duas matrizes simétricas com os autovalores da matriz obtida a partir da soma dessas duas matrizes.

Teorema 2.11 (HORN e JOHNSON [54]) *Se M e N são matrizes simétricas de ordem n , então*

$$\begin{aligned} \lambda_i(M) + \lambda_j(N) &\leq \lambda_{i+j-n}(M+N), \quad \text{se } i+j \geq n+1 \\ \lambda_i(M) + \lambda_j(N) &\geq \lambda_{i+j-1}(M+N), \quad \text{se } i+j \leq n+1. \end{aligned}$$

As igualdades são válidas nas respectivas desigualdades se e somente se existe um mesmo autovetor associado a cada um dos autovalores envolvidos.

2.3 Teoria Espectral de Grafos

Seja G um grafo de ordem n . A *matriz de adjacência* de G dada por $A(G) = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n$ tem linhas e colunas correspondendo aos vértices de G , cujas entradas são dadas por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \sim v_j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Desde que a relação de adjacência sobre o conjunto de vértices de G é simétrica, $A(G)$ é uma matriz simétrica e, portanto, todos os seus autovalores são números reais, denotados por λ_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, e dados em ordem não crescente por $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

O polinômio característico de G é $P_G(x) = \det(xI - A(G))$, os autovalores de $A(G)$ são os autovalores de G e denotamos o multiconjunto de seus autovalores por $\text{Spec}(G)$ (usualmente, escrevemos $\text{Spec}(G) = \{\lambda_1^{(s_1)}, \lambda_2^{(s_2)}, \dots, \lambda_t^{(s_t)}\}$, onde (s_j) é a

multiplicidade do autovalor λ_j , para $1 \leq j \leq t$). Para cada $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, a notação $\lambda_i(G)$ é utilizada para substituir λ_i , caso haja necessidade de explicitar o grafo. O maior autovalor λ_1 é chamado *raio espectral* ou *índice* de G .

A proposição a seguir fornece o espectro de algumas classes particulares de grafos bem conhecidas na literatura.

Proposição 2.12 (CVETKOVIĆ *et al.* [13]) *Sejam K_n , P_n e C_n os grafos completo, caminho e o ciclo de ordem n , respectivamente. Então*

$$(i) \text{ Spec}(K_n) = \{n - 1, -1^{(n-1)}\};$$

$$(ii) \text{ Spec}(P_n) = \{2 \cos(\frac{j\pi}{n+1}); 1 \leq j \leq n\};$$

$$(iii) \text{ Spec}(C_n) = \{2 \cos(\frac{2j\pi}{n}); 1 \leq j \leq n\}.$$

O Teorema 2.13 caracteriza os grafos bipartidos em função de seus autovalores.

Teorema 2.13 (CVETKOVIĆ *et al.* [13]) *Um grafo G de ordem n é bipartido se e somente se $\lambda_i(G) + \lambda_{n-i+1}(G) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Se G é conexo então ele é bipartido se e somente se $\lambda_1 = -\lambda_n$.*

O Teorema 2.14 estabelece que o espectro de um grafo regular contém informações completas sobre o espectro de seu grafo complementar.

Teorema 2.14 (CVETKOVIĆ *et al.* [13]) *Se G é um grafo r -regular de ordem n , então $\lambda_1(G) = r$, $\lambda_1(\overline{G}) = n - 1 - r$ e $\lambda_{n-i+2}(\overline{G}) = -1 - \lambda_i(G)$ para todo $i \in \{2, 3, \dots, n\}$.*

Dos Teoremas 2.13 e 2.14 chega-se ao seguinte resultado.

Proposição 2.15 *Se G é um grafo r -regular de ordem n , cujo grafo complementar é bipartido, então $\lambda_1(\overline{G}) = -\lambda_n(\overline{G}) = n - 1 - r$ e, para todo $i \in \{2, \dots, n - 1\}$, $\lambda_i(\overline{G}) = \lambda_{i+1}(G) + 1$.*

Para exemplificar a Proposição 2.15, considere o grafo G ilustrado na Figura 2.12. O grafo G é 3-regular e seu grafo complementar \overline{G} é 2-regular e bipartido e têm $\text{Spec}(G) = \{-2^{(2)}, 0^{(2)}, 1, 3\}$ e $\text{Spec}(\overline{G}) = \{-2, -1^{(2)}, 1^{(2)}, 2\}$. Veja, por exemplo, que para $i = 4$, $\lambda_4(\overline{G}) = \lambda_5(G) + 1 = -2 + 1 = -1$.

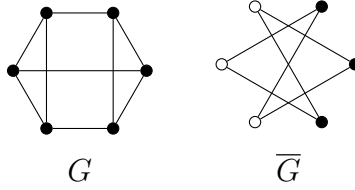


Figura 2.12: Grafos relacionados a Proposição 2.15.

Em [17], encontram-se vários resultados que explicitam o polinômio característico de grafos obtidos por determinadas operações entre grafos. Dentre eles, destacamos os dois resultados a seguir.

Teorema 2.16 (CVETKOVIĆ *et al.* [17]) *O polinômio característico da união disjunta de dois grafos G e H é dado por*

$$P_{G \cup H}(x) = P_G(x)P_H(x).$$

Segue, do Teorema 2.16, que se G_1, G_2, \dots, G_s são as componentes de um grafo G então

$$P_G(x) = P_{G_1}(x)P_{G_2}(x) \dots P_{G_s}(x).$$

Teorema 2.17 (CVETKOVIĆ *et al.* [17]) *Se, para $i \in \{1, 2\}$, G_i é um grafo r_i -regular de ordem n_i , então o polinômio característico de $G \simeq G_1 \vee G_2$ é*

$$P_G(x) = \frac{P_{G_1}(x)P_{G_2}(x)}{(x - r_1)(x - r_2)}((x - r_1)(x - r_2) - n_1n_2).$$

O Teorema 2.18 assegura que o índice de um grafo está limitado entre os seus graus médio e máximo.

Teorema 2.18 (CVETKOVIĆ *et al.* [17]) *Se λ_1 é o índice de um grafo G então $\bar{d} \leq \lambda_1 \leq \Delta$. Além disso, $\lambda_1 = \bar{d}$ se e somente se G é regular. Para um grafo conexo G , $\lambda_1 = \Delta$ se e somente se G é regular.*

Os quatro resultados que se seguem fornecem cotas para o índice em algumas classes especiais de grafos. Em 1970, NOSAL [41] obteve o resultado a seguir.

Proposição 2.19 (NOSAL [41]) *Para todo grafo de tamanho m e livre de triângulos tem-se $\lambda_1 \leq \sqrt{m}$.*

Em 2009, NIKIFOROV [70] encontrou um resultado semelhante à Proposição 2.19 para grafos livres de quadrados.

Proposição 2.20 (NIKIFOROV [70]) *Seja G um grafo de tamanho $m \geq 9$ e livre de quadrados. Se $G \not\cong S_{10}$ então $\lambda_1(G) < \sqrt{m}$.*

A Proposição 2.21 fornece uma cota superior para o índice de grafos livres de triângulos e quadrados. Uma primeira versão, mais fraca, dessa proposição foi encontrada em 1993 por FAVARON *et al.* [71].

Proposição 2.21 (NIKIFOROV [72]) *Para um grafo de ordem n e cintura $g \geq 5$, $\lambda_1 \leq \min\{\Delta, \sqrt{n-1}\}$.*

A proposição a seguir estabelece uma cota para o índice de um grafo conexo em função de seu tamanho e ordem.

Teorema 2.22 (HONG [73]) *Se G é um grafo conexo de ordem n e tamanho m então*

$$\lambda_1(G) \leq \sqrt{2m - n + 1}.$$

A igualdade é satisfeita se e somente se $G \simeq S_n$ ou $G \simeq K_n$.

As duas proposições que seguem determinam cotas superiores para o índice de árvores e grafos unicíclicos.

Teorema 2.23 (COLLATZ e SINOLOWITZ [74]) *Para toda árvore T de ordem n tem-se $\lambda_1(T) \leq \sqrt{n-1}$. A igualdade é atingida se e somente se $T \simeq S_n$.*

Seja S_n^* o grafo unicíclico obtido da estrela S_n pelo acréscimo de uma aresta.

Proposição 2.24 (SIMIĆ [75]) *Se G é um grafo unicíclico de ordem n então $2 \leq \lambda_1(G) \leq \lambda_1(S_n^*)$. Além disso, para todo $n \geq 9$ tem-se $\lambda_1(S_n^*) \leq \sqrt{n}$.*

A Proposição 2.25, decorrente do Teorema 2.11, relaciona os autovalores de um grafo com os autovalores de seu grafo complementar.

Proposição 2.25 (HONG [76]) *Se G é um grafo de ordem $n \geq 2$, então*

$$\lambda_i(G) + \lambda_{n-i+2}(\overline{G}) \leq -1 \leq \lambda_i(G) + \lambda_{n-i+1}(\overline{G})$$

para todo $i \in \{2, \dots, n\}$.

Um *vetor de Faria* de um grafo G de ordem $n \geq 2$ é um autovetor associado a um autovalor de G com exatamente duas coordenadas não nulas, uma delas 1 e a outra -1 , correspondentes a dois vértices v_i e v_j do grafo, veja MERRIS [77].

A Proposição 2.26 fornece uma condição suficiente para que 0 ou -1 sejam autovalores de um grafo em função da existência de pares de vértices gêmeos no grafo e afirma que tais autovalores possuem um vetor de Faria como autovalor a eles associados.

Proposição 2.26 *Sejam G um grafo e $[u, v]$ um par de vértices gêmeos em G .*

- (i) *Se u e v são vértices gêmeos verdadeiros então $-1 \in \text{Spec}(G)$;*
- (ii) *Se u e v são vértices gêmeos falsos então $0 \in \text{Spec}(G)$.*

Além disso, em cada caso, um autovetor associado ao correspondente autovalor é um vetor de Faria.

Observe que o fato de $\{-1, 0\} \subset \text{Spec}(G)$ não significa necessariamente que G tenha um par de vértices gêmeos. Veja, como exemplo, o caminho P_5 , ilustrado na Figura 2.13. Este tem como espectro $\text{Spec}(P_5) = \{-\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}\}$ e P_5 não possui nenhum par de vértices gêmeos.

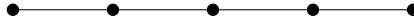


Figura 2.13: Grafo P_5 .

De acordo com a proposição que segue, o número de pares de vértices gêmeos em um grafo G é uma cota inferior para a multiplicidade dos autovalores 0 ou -1 de G . Tal resultado decorre da Proposição 2.26.

Proposição 2.27 *Sejam G um grafo de ordem $n \geq 2$ com $u \in V$ e $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ tais que $[u, v_1], [u, v_2], \dots, [u, v_k]$ são pares de vértices gêmeos.*

- (i) *Se $\{\{u, v_1\}, \{u, v_2\}, \dots, \{u, v_k\}\} \subset E$ então $-1 \in \text{Spec}(G)$ e $m(-1) \geq k$.*
- (ii) *Se $\{\{u, v_1\}, \{u, v_2\}, \dots, \{u, v_k\}\} \cap E = \emptyset$ então $0 \in \text{Spec}(G)$ e $m(0) \geq k$.*

Retornando ao grafo G da Figura 2.1, vemos que G possui dois pares de vértices gêmeos verdadeiros: $[v_1, v_2]$ e $[v_4, v_5]$. Da Proposição 2.27, $-1 \in \text{Spec}(G)$ e cada um destes pares contribui em 1 para a multiplicidade de tal autovalor. Logo, $m(-1) \geq 2$. Dado que há um único par de vértices gêmeos falsos em G tem-se $m(0) \geq 1$. Observe que essas cotas são as melhores possíveis para este grafo visto que seu espectro é $\text{Spec}(G) = \{-2.81082, -1^{(2)}, 0, 0.19689, 1, 3.61393\}$.

A Figura 2.14 exibe o grafo H que tem um único par de vértices gêmeos verdadeiros. Da Proposição 2.27, $m(-1) \geq 1$. Veja que, neste caso, tal cota é inferior à multiplicidade do autovalor -1 como pode ser observado em seu espectro, $\text{Spec}(H) = \{-2, -1^{(2)}, 1 - \sqrt{2}, 1^{(2)}, 1 + \sqrt{2}\}$.

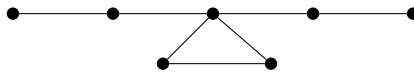


Figura 2.14: Grafo H .

Sejam M e N matrizes simétricas de ordens m e n , respectivamente tal que $m \leq n$. Se $\lambda_i(M) \geq \lambda_i(N) \geq \lambda_{n-m+i}(M)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ diz-se que os autovalores de N se *entrelaçam* com os autovalores de M . O Teorema 2.28 garante que os autovalores dos subgrafos induzidos de um grafo entrelaçam-se com os autovalores deste.

Teorema 2.28 (CVETKOVIĆ *et al.* [17]) *Seja G um grafo com $n \geq 2$ vértices. Se $U \subset V(G)$ possui $k \leq n$ vértices então para cada $i \in \{1, \dots, n - k\}$ tem-se*

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(G - U) \geq \lambda_{i+k}(G).$$

As desigualdades do Teorema 2.28 são denominadas *Desigualdades de Cauchy* e este resultado é conhecido como *Teorema do Entrelaçamento*.

O Lema 2.29 estabelece que $K_{1,2}$ é um subgrafo induzido de qualquer grafo não completo.

Lema 2.29 *Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 3$. Se $G \not\cong K_n$, então $K_{1,2}$ é um subgrafo induzido de G .*

Demonstração. De fato, como $G \not\cong K_n$ existem vértices u e v em G tais que $u \not\sim v$. Da conexidade de G , existe um caminho P de comprimento mínimo, $k \geq 2$, cujos extremos são u e v , digamos $P : u = u_0 u_1 u_2 \dots u_k = v$. A escolha do caminho P implica $u_2 \notin N_G(u)$ (caso contrário, P não teria comprimento mínimo). Portanto, o conjunto $\{u, u_1, u_2\}$ induz o subgrafo $K_{1,2}$ em G . □

A Proposição 2.30 afirma que o menor autovalor de um grafo não vazio é sempre negativo.

Proposição 2.30 (DOOB [78]) *Se G é um grafo de ordem n então:*

- (i) $\lambda_n = 0$ se e somente se G é um grafo vazio;
- (ii) $\lambda_n = -1$ se e somente se G possui todas as suas componentes completas;
- (iii) $\lambda_n \leq -\sqrt{2}$, em qualquer outro caso.

Demonstração. Seja G um grafo de ordem n e suponha que G possua uma componente não vazia e não completa. Do Lema 2.29, $K_{1,2}$ é um subgrafo induzido de G . Logo, do Teorema 2.28, $\lambda_n(G) \leq \lambda_n(K_{1,2}) = -\sqrt{2}$.

Admitamos agora que $\lambda_n(G) = -1$. Do caso anterior, G tem ou todas as componentes vazias ou todas completas. Como todos os autovalores do grafo vazio são nulos (pois sua matriz de adjacência é a matriz nula) segue que G possui todas as componentes completas. A recíproca segue do Teorema 2.12. □

Uma cota inferior para o menor autovalor de um grafo é dada a seguir.

Proposição 2.31 (CONSTANTINE [79]) *Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$.*

- (i) *Se n é par então $\lambda_n \geq -\frac{n}{2}$. A igualdade é satisfeita se e somente se $G \simeq K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.*
- (ii) *Se n é ímpar então $\lambda_n \geq -\frac{\sqrt{n^2-1}}{2}$. A igualdade é satisfeita se e somente se $G \simeq K_{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}}$.*

Como $\frac{\sqrt{n^2-1}}{2} < \frac{n}{2}$, podemos reescrever a Proposição 2.31 de uma forma mais geral, isto é, independente da paridade da cardinalidade do conjunto de vértices do grafo.

Corolário 2.32 (CONSTANTINE [79]) *Para todo grafo G de ordem n tem-se que $\lambda_n(G) \geq -\frac{n}{2}$. A igualdade é satisfeita se e somente se n é par e $G \simeq K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.*

A partir do Corolário 2.32 obtém-se, como segue, uma cota superior para os $n-1$ menores autovalores de um grafo com n vértices, como expõe a Proposição 2.33.

Proposição 2.33 (HONG [76]) *Para todo grafo G de ordem n e para todo $i \in \{2, \dots, n\}$ tem-se*

$$-\frac{i}{2} \leq \lambda_i(G) \leq \frac{n-i}{2}.$$

Demonstração. Dado $i \in \{2, \dots, n\}$, sejam G um grafo de ordem n e V' um subconjunto de vértices de G tal que $|V'| = n - i$.

Como $G - V'$ é um subgrafo induzido de G com i vértices, segue do Teorema 2.28 e do Corolário 2.32 que

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(G - V') \geq -\frac{i}{2}. \quad (2.1)$$

A cota superior segue da Proposição 2.25 e da desigualdade (2.1). De fato,

$$\lambda_i(G) \leq -1 - \lambda_{n-i+2}(\overline{G}) \leq -1 + \frac{n-i+2}{2} = \frac{n-i}{2}.$$

□

O teorema a seguir assegura que o menor autovalor de um grafo linha generalizado nunca é menor que -2 .

Teorema 2.34 (HOFFMAN [80]) *Sejam a_1, a_2, \dots, a_n inteiros não negativos, G um grafo de ordem n e tamanho m . Se $H = L(G; a_1, a_2, \dots, a_n)$ tem ordem k então $\lambda_k(H) \geq -2$. Além disso, se $n < m$, $\lambda_k(H) = -2$.*

Do teorema acima segue que todo grafo linha generalizado possui autovalores maiores ou iguais a -2 . Observamos que não vale a recíproca. O grafo de Petersen P , dado na Figura 2.15, tem o menor autovalor -2 . Os vértices destacados em branco induzem em P a estrela S_4 que, do Teorema 2.4, é um subgrafo proibido para ser um grafo linha.

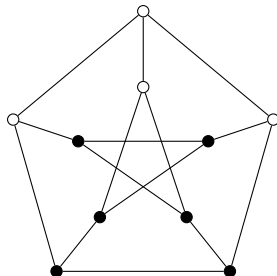


Figura 2.15: Grafo de Petersen.

Um grafo *excepcional* é um grafo conexo de ordem n que não é um grafo linha generalizado e cujo menor autovalor é maior ou igual a -2 . Há outros grafos excepcionais além do grafo de Petersen. Todos os grafos da Figura 2.4, exceto o segundo da primeira linha, são excepcionais.

Em 1976, CAMERON *et al.* [81] mostraram que um grafo excepcional tem no máximo 36 vértices e que cada vértice tem grau, no máximo, 28. Em 1979, DOOB e CVETKOVIĆ [82] determinaram todos os 573 grafos excepcionais de ordem n em que λ_n é estritamente maior que -2 . Dentre eles, 20 tem ordem $n = 6$, 110 tem ordem $n = 7$ e 443 tem ordem $n = 8$. Também destacamos que 187 desses são regulares. Tais grafos estão descritos em CVETKOVIĆ *et al.* [83], onde pode-se encontrar um estudo detalhado sobre grafos cujo menor autovalor é exatamente igual a -2 . Dentre os resultados lá encontrados, destacamos o seguinte.

Teorema 2.35 (CVETKOVIĆ *et al.* [83]) *Se G é um grafo regular conexo com menor autovalor -2 , então G é um grafo linha, um grafo coquetel ou é um dos 187 grafos regulares excepcionais.*

Os grafos conexos de ordem n em que $\lambda_n > -2$ estão caracterizados pelo teorema a seguir.

Teorema 2.36 (DOOB e CVETKOVIĆ [82]) *Seja G um grafo conexo em que o menor autovalor é estritamente maior que -2 . Para tal grafo, uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

- (i) $G \simeq L(T; 1, 0, \dots, 0)$, onde T é uma árvore;
- (ii) $G \simeq H$, onde H é ou uma árvore ou um grafo unicíclico com ciclo ímpar;
- (iii) G é isomorfo a um dos 573 grafos excepcionais, descritos em [83].

Capítulo 3

Cotas para λ_2

Neste capítulo apresentamos uma coletânea de resultados sobre o segundo maior autovalor de um grafo, λ_2 , que inclui cotas conhecidas e que o relacionam a outros invariantes de grafos. De modo análogo ao Capítulo 2, as demonstrações dos resultados aqui apresentados se encontram nas referências que os acompanham, a exceção de alguns que optamos por reescrever as provas de maneira mais didática. Tais resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [17], [18], [20], [63], [71], [76], [84], [85], [86], [87], [88], [89], [90], [91], [92] e [93].

3.1 Cotas gerais para λ_2

Iniciamos esta seção com uma consequência decorrente do Teorema 2.10 (Teorema de Perron e Frobenius) em que, para todo grafo conexo G , o segundo maior autovalor é estritamente menor que o maior autovalor de G , ou seja, $\lambda_2 < \lambda_1$, donde se conclui que somente para grafos desconexos é possível se ter $\lambda_2 = \lambda_1$.

Dados os números naturais ℓ e t , $3 \leq \ell \leq t$, seja $G_{\ell,t}$ o grafo obtido das estrelas S_ℓ e S_t pela coalescência de cada vértice pendente de S_ℓ a um dado vértice pendente da estrela S_t . O grafo resultante possui $t+1$ vértices, dos quais $t-\ell$ são pendentos. Como exemplo, veja o grafo $G_{4,7}$, dado na Figura 3.1, obtido das estrelas S_4 e S_7 .

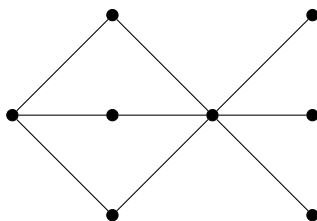


Figura 3.1: Grafo $G_{4,7}$.

Para um dado $\alpha \in \mathbb{R}$, o teorema que segue exibe uma caracterização implícita de conjuntos infinitos de grafos em que $\lambda_2 \leq \alpha$. Tal caracterização é determinada

por meio de uma coleção finita de subgrafos proibidos.

Teorema 3.1 (HOWES [85]) *Para qualquer conjunto infinito \mathcal{G} de grafos, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *Existe um número real α tal que, para todo $G \in \mathcal{G}$, $\lambda_2(G) \leq \alpha$.*
- (ii) *Existe um inteiro positivo r tal que se $G \in \mathcal{G}$ então G não possui subgrafo induzido isomorfo a qualquer um dos seguintes grafos: $(K_1 \cup K_r) \vee K_r$, $(rK_1 \cup S_{r+1}) \vee K_1$, $(rK_1 \cup K_{r-1}) \vee K_1$, $K_r \cup S_{r+1}$, $2S_{r+1}$, $S_{r,r}$, $2K_r$ e $G_{r+1,t}$, onde $t \geq r + 1$.*

O próximo resultado fornece uma cota superior para λ_2 em função do número de arestas do grafo.

Proposição 3.2 (FAVARON *et al.* [71]) *Se G é um grafo com m arestas então $\lambda_2(G) \leq \sqrt{m}$.*

Demonstração. Seja A a matriz de adjacência de G . Segue da Proposição 2.8 que $\lambda_1^2(G) + \lambda_2^2(G) \leq \text{tr}(A^2) = 2m$.

Não é difícil ver que para todo par de números reais x e y , $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$. Daí segue que

$$\lambda_1(G) + \lambda_2(G) \leq \sqrt{2(\lambda_1^2(G) + \lambda_2^2(G))} \leq 2\sqrt{m}. \quad (3.1)$$

Se $\lambda_1(G) \leq \sqrt{m}$ então $\lambda_2(G) \leq \lambda_1(G) \leq \sqrt{m}$. Por outro lado, se $\lambda_1(G) > \sqrt{m}$, da desigualdade (3.1) tem-se

$$\lambda_2(G) \leq 2\sqrt{m} - \lambda_1(G) < \sqrt{m},$$

e a prova se completa. □

Usando a desigualdade (3.1), o Corolário 3.3 exibe outra cota para λ_2 , que só depende do índice e do tamanho do grafo.

Corolário 3.3 (FAVARON *et al.* [71]) *Para todo grafo G com m arestas a desigualdade que segue é verdadeira,*

$$\lambda_2(G) \leq \frac{m}{\lambda_1(G)}.$$

Demonstração. De fato, como $2\sqrt{\lambda_1(G)\lambda_2(G)} \leq \lambda_1(G) + \lambda_2(G)$, o resultado segue da desigualdade (3.1). □

O Teorema 3.4 caracteriza os grafos em que $\lambda_2 = 0$ e estabelece que o segundo maior autovalor de um grafo não completo nunca é negativo.

Teorema 3.4 (SMITH [63] e HONG [76]) *Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$.*

(i) *Se $G \not\cong K_n$, então $\lambda_2(G) \geq 0$. Além disso, G é um grafo multipartido completo se e somente se G não tem vértices isolados e $\lambda_2(G) = 0$;*

(ii) *Tem-se $G \simeq K_n$ se e somente se $\lambda_2(G) = -1$;*

(iii) *Não existem grafos tais que $-1 < \lambda_2(G) < 0$.*

Demonstração. Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$.

(i) Inicialmente, suponhamos que G é conexo e $G \not\cong K_n$. Do Lema 2.29, $K_{1,2}$ é um subgrafo induzido de G e, do Teorema 2.28, chega-se a

$$\lambda_2(G) \geq \lambda_2(K_{1,2}) = 0.$$

Se todas as componentes de G são completas então, do Teorema 2.28,

$$\lambda_2(G) = \lambda_1(G_2) > 0,$$

onde G_2 é a componente de G com a segunda maior ordem.

Por fim, suponhamos que G possua uma componente C que não é um grafo completo. Sendo C um subgrafo induzido conexo de G e $C \not\cong K_p$, para $p < n$, tem-se $\lambda_2(C) \geq 0$. Portanto, o Teorema 2.28 implica em

$$\lambda_2(G) \geq \lambda_2(C) \geq 0,$$

o que conclui a primeira parte do item (i).

Para a segunda parte deste item, suponhamos que G é um grafo multipartido completo de ordem n e $G \not\cong K_n$. Logo, existem inteiros $1 \leq p_1 \leq \dots \leq p_k$, $p_k \neq 1$, tais que $G \simeq K_{p_1, \dots, p_k}$. Dessa forma, $\overline{G} \simeq K_{p_1} \cup \dots \cup K_{p_k}$ e, portanto,

$$\lambda_n(\overline{G}) = -1. \tag{3.2}$$

De (3.2) e do Lema 2.25, obtém-se $\lambda_2(G) \leq -1 - \lambda_n(\overline{G}) = 0$. Como, por hipótese, $G \not\cong K_n$, chega-se a $\lambda_2(G) \geq 0$, o que implica em $\lambda_2(G) = 0$.

Reciprocamente, seja G um grafo sem vértices isolados tal que $\lambda_2(G) = 0$. Suponhamos, por absurdo, que G não é um grafo multipartido completo. Como G não tem vértices isolados e não é multipartido completo, da Proposição 2.5, G possui como subgrafo induzido um dos seguintes grafos: $2K_2$, P_4 ou $K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$. Como tais grafos têm o segundo maior autovalor positivo, do Teorema 2.28, $\lambda_2(G) > 0$, o

que é um absurdo. Portanto, G é um grafo multipartido completo. O que completa a prova do item (i).

(ii) Como $P_{K_n}(x) = (x - n + 1)(x + 1)^{n-1}$ tem-se $\lambda_2(K_n) = -1$. A recíproca segue imediatamente do item (i).

(iii) Tal resultado decorre imediatamente dos itens anteriores. □

Observe que a hipótese de G não possuir vértices isolados é essencial para a prova do item (i) do Teorema 3.4. De fato, para $n \geq 1$, o grafo $K_n \cup K_1$ não é multipartido completo, mas $\lambda_2(K_n \cup K_1) = 0$. O Corolário 3.5, que é uma consequência imediata do Teorema 3.4, caracteriza os grafos com exatamente um autovalor positivo.

Corolário 3.5 (SMITH [63]) *Para que um grafo G tenha exatamente um autovalor positivo é necessário e suficiente que G seja um grafo multipartido completo unido com eventuais vértices isolados.*

A Figura 3.2 exibe o grafo multipartido completo $K_{3,3,3,4}$ que, de acordo com o Corolário 3.5, possui exatamente um autovalor positivo, isto é,

$$\text{Spec}(K_{3,3,3,4}) = \{-3.7082, -3^{(2)}, 0^{(9)}, 9.7082\}.$$

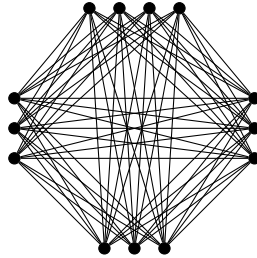


Figura 3.2: Grafo com exatamente um autovalor positivo.

Em 1988, HONG [76] e POWERS [86], independentemente, encontraram cotas superiores para λ_2 , de acordo com a paridade da ordem do grafo, que são exibidas no Teorema 3.6.

Teorema 3.6 (HONG [76] e POWERS [86]) *Se G é um grafo de ordem $n \geq 2$, então*

$$\lambda_2(G) \leq \begin{cases} \frac{n-3}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ \frac{n}{2} - 1, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Além disso, $\lambda_2(G) = -1 + \frac{n}{2}$ se e somente se n é par e $G \simeq 2K_{\frac{n}{2}}$.

Para discutirmos cotas para λ_2 em grafos conexos, necessitamos definir os chamados grafos dupla pipa. Dados os inteiros não negativos k e ℓ , o grafo *dupla pipa*, $DK(k, \ell)$, é o grafo obtido pela coalescência de um dos vértices pendentes do caminho $P_{\ell+2}$ com um vértice do grafo completo K_k e o outro vértice pendente do mesmo caminho com um vértice de outro grafo completo K_k . Tais grafos têm ordem $n = 2k + \ell$. A Figura 3.3 exibe os grafos dupla pipa $DK(8, 0)$ e $DK(8, 1)$ com 16 e 17 vértices, respectivamente.

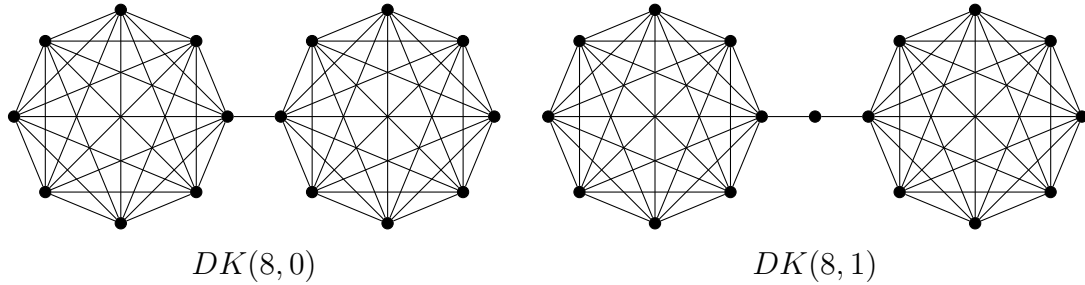


Figura 3.3: Grafos dupla pipa.

POWERS [86] mostrou que existem grafos que atingem a cota superior dada no Teorema 3.6 para o caso em que n é ímpar. No entanto, não conseguiu uma caracterização destes. Tal problema foi resolvido por ZHAI *et al.* [87] em 2012 e é parte do Teorema 3.7, que explicita cotas para o segundo maior autovalor de grafos conexos.

Teorema 3.7 (ZHAI *et al.* [87]) *Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 2$.*

- (i) *Se n é ímpar, $\lambda_2(G) \leq \frac{n-3}{2}$. A igualdade é satisfeita se e somente se $G \simeq DK\left(\frac{n-1}{2}, 1\right)$.*
- (ii) *Se n é par, $\lambda_2(G) \leq \frac{n-6 + \sqrt{n^2 + 4n - 12}}{4}$. A igualdade é satisfeita se e somente se $G \simeq DK\left(\frac{n}{2}, 0\right)$.*

3.2 Cotas para λ_2 em grafos pertencentes a classes especiais

Durante nossas pesquisas, observamos que há poucos resultados na literatura que se referem à determinação de cotas para o segundo maior autovalor de grafos irregulares, quando comparado com a estudos relacionados ao índice do grafo. No entanto, existe uma vasta quantidade de resultados sobre o segundo maior autovalor de um grafo quando este é regular. Nesta seção discutiremos cotas para o segundo

maior autovalor de grafos regulares e grafos bipartidos. Tal seção foi baseada em [17], [18] e [20].

O segundo maior autovalor de um grafo conexo regular desempenha um papel importante na determinação de sua estrutura. Este fato foi observado em 1976, BUSSEMAKER *et al.* [94], no que diz respeito a grafos cúbicos conexos. Neste trabalho, os grafos cúbicos conexos de ordem $n \leq 14$ foram ordenados lexicograficamente por seu espectro. Dado que todos estes grafos têm índice $\lambda_1 = 3$, λ_2 desempenha um papel importante como autovalor. Observou-se então que, os grafos cúbicos para os quais λ_2 é um número pequeno, têm formas mais “arredondadas”, isto é, são grafos com diâmetro pequeno e a cintura possivelmente alta. Já para os grafos cujos valores de λ_2 são grandes, estes possuem uma forma mais “alongada”, ou seja, tais grafos possuem diâmetros grandes e cinturas pequenas. A Tabela 3.2, exemplifica tal situação referente aos grafos, G_1 , G_2 e G_3 , expostos nas Figuras 3.4 e 3.5. Nela, estão explicitados o segundo maior autovalor, o diâmetro D , a cintura g e a ordem n de cada grafo. Note que G_1 é 5-regular, G_2 é 3-regular, e ambos têm formas arredondadas. Já o grafo G_3 , com λ_2 maior, tem a forma mais alongada.

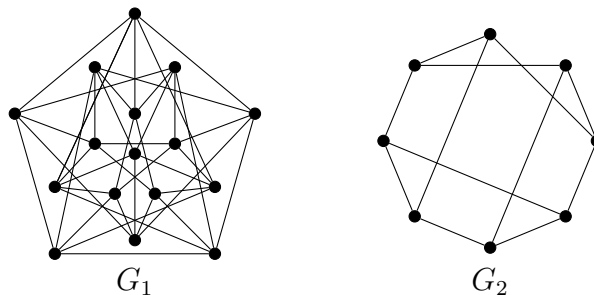


Figura 3.4: Grafos regulares em que $\lambda_2 = 1$.

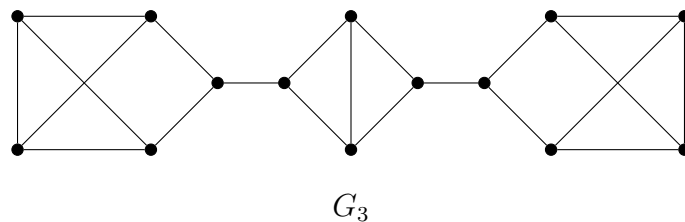


Figura 3.5: Grafo 3-regular em que $\lambda_2 \approx 2.89$.

Grafos	λ_2	D	g	n
G_1	1	2	4	16
G_2	1	2	4	8
G_3	2.89	8	3	14

Tabela 3.1: Grafos regulares.

Uma explicação parcial, dessas observações empíricas, foi dada em 1978 por CVETKOVIĆ [90], pelo Teorema 3.8. Neste resultado, \overline{d}_v denota o grau médio do subgrafo induzido pelos vértices não adjacentes a um dado vértice v .

Teorema 3.8 (CVETKOVIĆ [90]) *Seja G um grafo r -regular de ordem n . Se v é um vértice qualquer de G então*

$$\overline{d}_v \leq r \frac{\lambda_2^2 + \lambda_2(n-r)}{\lambda_2(n-1) + r}.$$

Note que a cota superior, acima, para \overline{d}_v diminui à medida que λ_2 diminui. Além disso, uma redução em \overline{d}_v aumenta o número de arestas entre o subgrafo induzido pelos vértices adjacentes a v e o subgrafo induzido pelos vértices não adjacentes a v . Simultaneamente, tais subgrafos possuem poucas arestas. Este fato explica a forma mais redonda do grafo.

Em 2013, KOLEDIN e STANIĆ [91], mostraram que a ordem de grafos regulares livre de triângulos diminui à medida em que λ_2 aumenta.

Teorema 3.9 (KOLEDIN e STANIĆ [91]) *Seja G um grafo r -regular de ordem n . Se G é livre de triângulos então*

$$n \leq \frac{r^2(\lambda_2 + 2) - r\lambda_2(\lambda_2 + 1) - \lambda_2^2}{r - \lambda_2^2}.$$

O Teorema de Alon-Boppana, dado a seguir, estabelece que para grafos não completos r -regulares de ordem muito grande, λ_2 não pode ser menor que $2\sqrt{r-1}$.

Teorema 3.10 (ALON [92]) *Seja $\{G_n\}_{n \geq 1}$ uma família de grafos r -regulares conexos tais que $|G_n| = n$. Se $r \geq 3$ então*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(G_n) \geq 2\sqrt{r-1}.$$

Em 1991, uma generalização para o Teorema 3.10 foi dado por NILLI [93]. Para tal é preciso definir a *distância entre duas arestas* como o comprimento do menor caminho cujos vértices terminais são aqueles das arestas em questão.

Teorema 3.11 (NILLI [93]) *Seja G um grafo r -regular. Para $k \geq 1$, se em G existem duas aresta que distam, ao menos, $2k + 2$ então*

$$\lambda_2(G) \geq 2\sqrt{r-1} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{k+1}.$$

Considere o grafo 3-regular G_4 exibido na Figura 3.6. As arestas e_1 e e_2 , destacadas na mesma figura, distam 4. Para $k = 1$, ao aplicar o Teorema 3.11, obtém-se $\lambda_2(G_4) \geq \frac{2\sqrt{2}+1}{2} \approx 1.9142$, que de fato é uma cota inferior para $\lambda_2(G_4) \approx 2.7785$ como é possível constatar em

$$\text{Spec}(G_4) = \{-2.4893, -2, -1^{(2)}, -0.2892, 0^{(2)}, 1, 2.7785, 3\}.$$

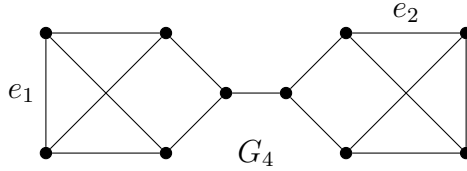


Figura 3.6: Grafo 3-regular em que $\lambda_2 \approx 2.7785$.

Seja G um grafo r -regular de ordem n . Denotemos por $\Lambda(G)$ o segundo maior autovalor de G , em valor absoluto, que é diferente de $\pm r$, isto é,

$$\Lambda(G) = \max_{i \in \{2,3,\dots,n\}} \{|\lambda_i(G)|; \lambda_i(G) \neq \pm r\}.$$

Em vista do Teorema 3.10 e desde que $\lambda_2 \leq \Lambda$, LUBOTZKY *et al.* [95] definiram os chamados *grafos Ramanujan*, que são aqueles r -regulares e conexos em que $\Lambda(G) \leq 2\sqrt{r-1}$.

O grafo G_4 , da Figura 3.6, é um grafo Ramanujan pois

$$\Lambda(G_4) = \lambda_2(G_4) \approx 2.7785 < 2\sqrt{2} \approx 2.8284.$$

O grafo G_5 , ilustrado na Figura 3.7, é 4-regular e tem como espectro

$$\text{Spec}(G) = \{-2^{(4)}, 1^{(4)}, 4\}.$$

Tal grafo também é Ramanujan pois $\Lambda(G_5) = |\lambda_9(G_5)| = 2 < 2\sqrt{3}$.

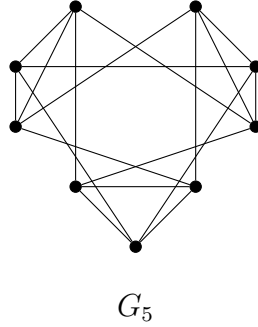


Figura 3.7: Grafo 4-regular em que $\lambda_2 = 1$.

Para um estudo mais detalhado sobre grafos Ramanujan sugerimos [10], [92], [93], [95], [96], [97], [98] e [99].

Os grafos bipartidos completos são aqueles em que $\lambda_2 = 0$ e, este, é o menor valor possível que $\lambda_2(G)$ pode assumir, quando G é um grafo bipartido. O primeiro resultado que estabelece uma cota superior para o segundo maior autovalor de um grafo bipartido foi dado em 1988, por POWERS [86].

Teorema 3.12 (POWERS [86]) *Se G é um grafo bipartido de ordem n então*

$$\lambda_2(G) \leq \begin{cases} k, & \text{se } n = 4k \text{ ou } n = 4k + 1; \\ \sqrt{k(k+1)}, & n = 4k + 2 \text{ ou } n = 4k + 3, \end{cases}$$

onde $k = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$.

As cotas dadas no Teorema 3.12 são sempre atingidas. Por exemplo, para $n = 4k + r$, onde $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, os grafos desconexos $G_k = K_{k, k + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \cup K_{k, k + \lceil \frac{r}{2} \rceil}$ são extremais para λ_2 , dado que $\lambda_2(G_k) = \sqrt{k(k + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor)}$. Veja que $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ é no máximo igual a 1.

Em 2012, ZHAI *et al.* [87] observaram que as cotas explicitadas no Teorema 3.12 não são atingidas no caso dos grafos bipartidos conexos de ordem par. Motivados por este problema tais autores encontraram novas cotas e determinaram todos os grafos bipartidos conexos que são extremais tanto para estas cotas quanto para aquelas do Teorema 3.12.

Seja um inteiro $a \geq 2$. Vamos construir uma classe de grafos, \mathcal{B}_a , em que cada grafo $G \in \mathcal{B}_a$ é obtido como segue: tome duas cópias do grafo $K_{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor, \lceil \frac{a}{2} \rceil}$. O conjunto de vértices de $2K_{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor, \lceil \frac{a}{2} \rceil}$ pode ser particionado em quatro conjuntos independentes, A_1, A_2, B_1 e B_2 , onde A_1 e A_2 são células de uma cópia de $K_{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor, \lceil \frac{a}{2} \rceil}$ e B_1 e B_2 são células da outra cópia. Tome um novo vértice u qualquer e escolha $i, j \in \{1, 2\}$. O grafo $G \in \mathcal{B}_a$ é o resultante de $2K_{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor, \lceil \frac{a}{2} \rceil} \cup \{u\}$ com a ligação do vértice u a pelo

menos um vértice da célula A_i e a pelo menos um vértice da célula B_j . A Figura 3.8 ilustra todos os grafos que constituem a classe \mathcal{B}_4 .

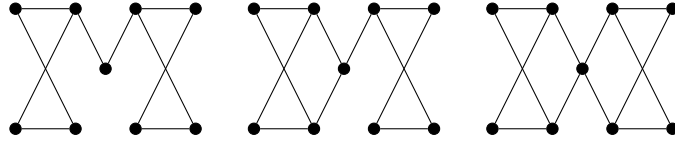


Figura 3.8: Grafos em \mathcal{B}_4 .

Para cada inteiro $k \geq 2$, denotemos por $2K_{k,k}^e$, o grafo conexo obtido pela coalescência de cada vértice de P_2 com um vértice de cada uma das cópias do grafo $K_{k,k}$. De maneira análoga, define-se o grafo $2K_{k,k+1}^e$. A Figura 3.9 exhibe os grafos $2K_{2,2}^e$ e $2K_{2,3}^e$.

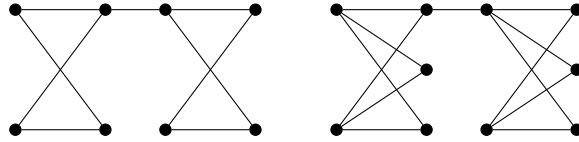


Figura 3.9: Grafos $2K_{2,2}^e$ e $2K_{2,3}^e$.

Teorema 3.13 (ZHAI *et al.* [87]) *Seja G um grafo bipartido conexo de ordem n .*

- (i) *Se $n = 4k$ então $\lambda_2(G) \leq \lambda_2(2K_{k,k}^e)$. A igualdade é satisfeita se e somente se $G \simeq 2K_{k,k}^e$;*
- (ii) *Se $n = 4k + 1$ então $\lambda_2(G) \leq k$. A igualdade é satisfeita se e somente se $G \in \mathcal{B}_{2k}$;*
- (iii) *Se $n = 4k + 2$ então $\lambda_2(G) \leq \lambda_2(2K_{k,k+1}^e)$. A igualdade é satisfeita se e somente se $G \simeq 2K_{k,k+1}^e$;*
- (iv) *Se $n = 4k + 3$ então $\lambda_2(G) \leq \sqrt{k(k+1)}$. A igualdade é satisfeita se e somente se $G \in \mathcal{B}_{2k+1}$.*

Para o caso dos grafos bipartidos regulares, KOLEDIN e STANIĆ [91] melhoraram a cota superior para λ_2 , dada no Teorema 3.13.

Teorema 3.14 (KOLEDIN e STANIĆ [91]) *Seja G um grafo r -regular de ordem n . Se G é bipartido então*

$$\lambda_2(G) \leq \frac{n}{2} - r.$$

Para n ímpar, NEUMAIER [88] determinou uma cota superior para λ_2 , quando o grafo é uma árvore de ordem n .

Teorema 3.15 (NEUMAIER [88]) *Seja n ímpar. Para toda árvore T de ordem n tem-se $\lambda_2(T) \leq \sqrt{\frac{n-3}{2}}$. A igualdade é satisfeita se e somente se T é isomorfo a uma das duplas vassouras $S_{p+1,p+1,3}$, $S_{p+1,p,4}$ e $S_{p,p,5}$ todas de ordem $n = 2p + 3$, sendo $p \geq 1$.*

No enunciado original do Teorema 3.15 não foi fixada a hipótese de que as árvores deveriam ter ordem ímpar. Em 1986, HONG [84] observou que a dupla vassoura $S_{3,3,4}$, dada na Figura 3.10, é um contraexemplo para o Teorema 3.15. De fato, $\lambda_2(S_{3,3,4}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > \sqrt{\frac{5}{2}}$.

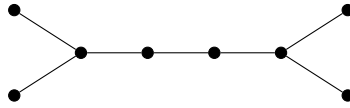


Figura 3.10: Dupla vassoura $S_{3,3,4}$.

O teorema a seguir explicita uma cota superior para o k -ésimo maior autovalor de uma árvore.

Teorema 3.16 (HONG [84]) *Se T é uma árvore com n vértices então para todo $k \in \left\{2, \dots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right\}$,*

$$\lambda_k(T) \leq \sqrt{\left\lceil \frac{n-2}{k} \right\rceil}.$$

Além disso, se $n \equiv 1 \pmod{k}$, essa cota superior é a melhor possível.

Em 1995, SHAO [89] determinou outra cota superior para o segundo maior autovalor de uma árvore de ordem n . Tal cota é ótima quando n é par.

Teorema 3.17 (SHAO [89]) *Dado $p \geq 1$, seja T uma árvore de ordem $n = 2p+2$. Se x_2 é a segunda maior raiz do polinômio $g(x) = x^3 + (p-1)x^2 - 2x - 1$ então $\lambda_2(T) \leq \sqrt{\frac{n}{2} - 1 + x_2}$. A igualdade é satisfeita se e somente se $T \simeq S_{p,p,4}$.*

Capítulo 4

Grafos em que λ_2 não excede 1

Neste capítulo dissertamos sobre o problema proposto por Hoffman e respondido parcialmente por CVETKOVIĆ [26], que consiste em caracterizar grafos com $\lambda_2 \leq 1$. Os resultados deste capítulo encontram-se em [26], [27], [30], [31], [32], [33] [100], [101], [102] e [103].

4.1 Caracterização de grafos em que $\lambda_2 \leq 1$

Os grafos tais que $\lambda_2 \leq 1$ foram investigados em 1982 por CVETKOVIĆ [26]. Em muitos casos, estes são grafos complementares de grafos cujo menor autovalor λ_n é pelo menos -2 , ou seja, $\lambda_n \geq -2$. Por exemplo, do Teorema 2.14, todo grafo regular G em que $\lambda_2(G) \leq 1$ possui seu grafo complementar satisfazendo $\lambda_n(\overline{G}) \geq -2$. O caso geral é dado pelo Teorema 4.1.

Teorema 4.1 (CVETKOVIĆ [26]) *Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Se $\lambda_2(G) \leq 1$, então $\lambda_n(\overline{G})$ satisfaz apenas uma das seguintes condições:*

(i) $\lambda_n(\overline{G}) \geq -2$;

(ii) $\lambda_n(\overline{G}) < -2 \leq \lambda_{n-1}(\overline{G})$.

Demonstração. Da Proposição 2.25 obtém-se,

$$\lambda_2(G) + \lambda_n(\overline{G}) \leq -1 \leq \lambda_2(G) + \lambda_{n-1}(\overline{G}). \quad (4.1)$$

Por hipótese, $\lambda_2(G) \leq 1$. Assim, da desigualdade à direita de (4.1) chega-se a $\lambda_{n-1}(\overline{G}) \geq -2$. Portanto, ou $\lambda_n(\overline{G}) \geq -2$ ou \overline{G} tem exatamente um autovalor menor do que -2 . □

Veja que a condição $\lambda_n(\overline{G}) \geq -2$ combinada com a desigualdade à esquerda de (4.1) acarreta em $\lambda_2(G) \leq 1$. Além disso, em [26], foi observado que não existem

grafos de ordem $n \leq 5$ com $\lambda_2 > 1$. Mas, dentre os 112 grafos conexos de ordem $n = 6$, tem-se que 23 deles satisfazem a $\lambda_2 > 1$. Tais grafos, ilustrados na Figura 4.1, são grafos complementares de grafos com exatamente um autovalor menor do que -2 . Em outras palavras, existem grafos com $\lambda_2 \leq 1$ cujos complementares são grafos com exatamente um autovalor menor do que -2 .

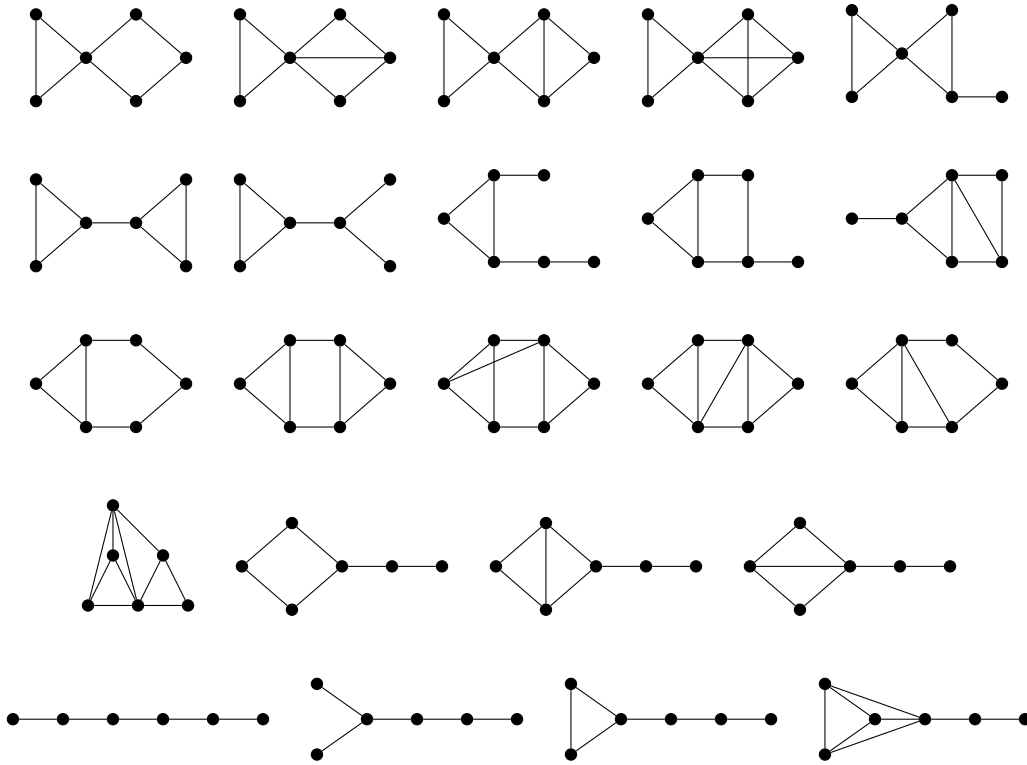


Figura 4.1: Todos os grafos de ordem 6 em que $\lambda_2 > 1$.

Em geral, grafos em que a condição (ii) do Teorema 4.1 é satisfeita, podem ou não ter a propriedade $\lambda_2(G) \leq 1$. A Figura 4.2 exibe grafos que satisfazem tal condição e a Figura 4.3 grafos que não a satisfazem.

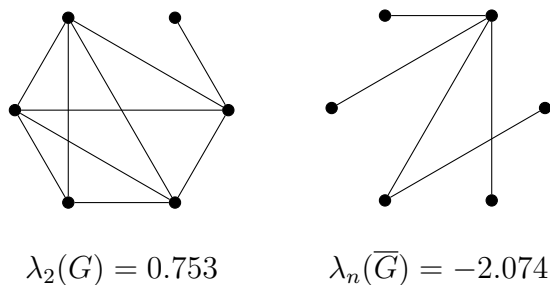


Figura 4.2: Grafos que satisfazem a condição (ii) do Teorema 4.1.

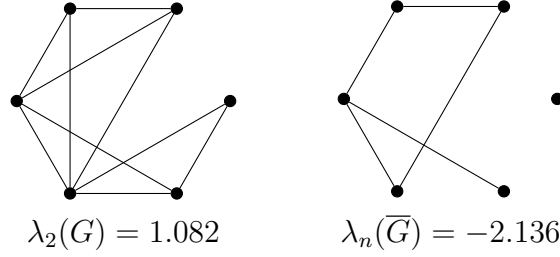


Figura 4.3: Grafos que não atendem a condição (ii) do Teorema 4.1.

Uma recíproca parcial do Teorema 4.1 é dada a seguir.

Teorema 4.2 (CVETKOVIĆ [26]) *Seja G um grafo de ordem n .*

- (i) *Se $\lambda_n(G) > -2$ então $\lambda_2(\overline{G}) < 1$;*
- (ii) *Se $\lambda_n(G) = -2$ então $\lambda_2(\overline{G}) \leq 1$. A desigualdade é estrita se e somente se -2 é um autovalor simples associado a um autovetor cujas coordenadas não somam zero.*

Grafos em que $\lambda_2 \leq 1$ possuem certas propriedades estruturais bem definidas como assegura o próximo teorema.

Teorema 4.3 (CVETKOVIĆ [26]) *Seja G um grafo de ordem n . Se $\lambda_2(G) \leq 1$ então é válida exatamente uma das seguintes afirmações:*

- (i) *G tem cintura $g \leq 6$;*
- (ii) *G é uma floresta e tem diâmetro $D \leq 4$.*

Demonstração. Seja G um grafo de ordem n e cintura g tal que $\lambda_2(G) \leq 1$. A demonstração segue dos dois casos a seguir.

Caso (i). G é um grafo com cintura finita $g \geq 3$.

Neste caso, G possui um subgrafo induzido isomorfo a C_g . Consequentemente, do Teorema 2.28, $\lambda_2(C_g) \leq \lambda_2(G)$. Dado que $g \geq 3$, tem-se $\frac{2}{g} < 1$ e, da Proposição 2.12,

$$\begin{aligned}
 \lambda_2(C_g) \leq 1 &\Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{2\pi}{g}\right) \leq 1 \\
 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{g}\right) \leq \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{2\pi}{g} \geq \frac{\pi}{3} \\
 &\Leftrightarrow g \leq 6.
 \end{aligned}$$

Portanto, G possui cintura no máximo 6.

Caso (ii). G é um grafo acíclico, isto é, $g = \infty$.

Neste caso, G é uma floresta e tem diâmetro $D \geq 2$, isto é, G possui um subgrafo induzido isomorfo ao caminho P_{D+1} . Do Teorema 2.28, $\lambda_2(P_{D+1}) \leq \lambda_2(G)$ e, da Proposição 2.12,

$$\begin{aligned} \lambda_2(P_{D+1}) \leq 1 &\Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{2\pi}{D+2}\right) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{D+2}\right) \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2\pi}{D+2} \geq \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow D \leq 4. \end{aligned}$$

Portanto, G é uma floresta com diâmetro no máximo 4. □

Os grafos da Figura 4.4 mostram que a recíproca do Teorema 4.3 não é verdadeira. Veja que o grafo G é unicíclico e tem cintura $g = 4$ e T é uma árvore com diâmetro $D = 3$. Em ambos os casos, temos que os seus respectivos segundo maior autovalor são iguais, $\lambda_2(G) = \lambda_2(T) = \sqrt{3 - \sqrt{3}} \approx 1.12603$.

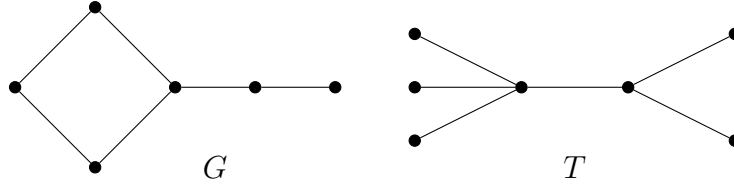


Figura 4.4: Grafos que não atendem a recíproca do Teorema 4.3.

4.2 Grafos em que $\lambda_2 \leq 1$

No Teorema 4.1, CVETKOVIĆ [26] provou que o conjunto dos grafos para os quais $\lambda_2 \leq 1$, pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos de acordo com o valor do menor autovalor do respectivo grafo complementar. Ele mostrou que, embora a condição $\lambda_n(\overline{G}) \geq -2$ seja equivalente a $\lambda_2(G) \leq 1$, a condição $\lambda_n(\overline{G}) < -2$ não é suficiente para que se tenha $\lambda_2(G) \leq 1$. Desde então muitos pesquisadores atacaram o problema de caracterizar os grafos em que $\lambda_2 \leq 1$ em classes especiais. Nesta seção apresentamos uma coletânea de tais resultados.

Iniciamos, esta seção, com a definição de uma classe de árvores que é necessária para o Teorema 4.4.

Dados $t, \ell \in \mathbb{N}$, tome a estrela S_t , ℓ cópias do caminho P_3 e o caminho P_5 . A árvore $T_{t,\ell}$ é aquela obtida da coalescência do vértice central do caminho P_5 com o vértice central da estrela S_t e com um dos vértices pendentes de cada uma das ℓ cópias de P_3 , excluindo-se as cópias de P_3 que formam P_5 . Veja a árvore $T_{3,2}$ na Figura 4.5.

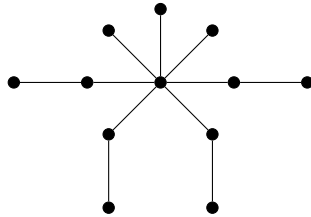


Figura 4.5: Árvore $T_{3,2}$.

Em 1989, HONG [100] determinou todas as árvores em que $\lambda_2 < 1$ e, em 1998, SHU [101] determinou todas as árvores em que $\lambda_2 = 1$. O Teorema 4.4 reúne tais resultados, isto é, explicita todas as árvores em que $\lambda_2 \leq 1$.

Teorema 4.4 (HONG [100] e SHU [101]) *Se T é uma árvore de ordem n então*

- (i) $\lambda_2(T) < 1$ se e somente se T é isomorfo a K_2 , S_n ou a dupla estrela $S_{2,n-2}$;
- (ii) $\lambda_2(T) = 1$ se e somente se T é isomorfo a $S_{3,3}$ ou a $T_{t,\ell}$.

Os grafos bipartidos conexos para os quais $\lambda_2 \leq 1$ foram caracterizados explicitamente em 1991 por PETROVIĆ [27]. Usando a técnica de subgrafos proibidos ele determinou todos os grafos bipartidos conexos maximais que satisfazem a condição $\lambda_2 = 1$. Em vista disso e do Teorema 2.28, os grafos bipartidos conexos tais que $\lambda_2 \leq 1$ são subgrafos induzidos destes.

Teorema 4.5 (PETROVIĆ [27]) *Sejam G um grafo bipartido conexo e H um dos subgrafos induzidos dos grafos dados nas Figuras 4.6 e 4.7. Para que $\lambda_2(G) \leq 1$ é necessário e suficiente que $G \simeq H$.*

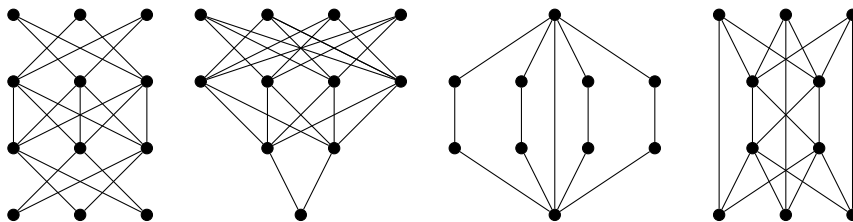


Figura 4.6: Grafos bipartidos em que $\lambda_2 = 1$.

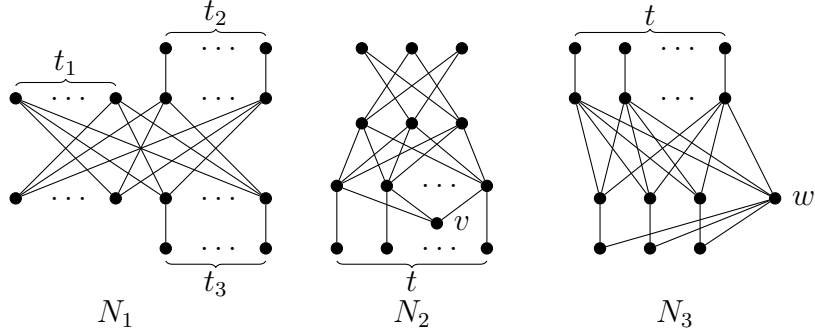


Figura 4.7: Classes infinitas de grafos bipartidos em que $\lambda_2 = 1$.

A Figura 4.7 exhibe esquemas de classes de grafos bipartidos em que $\lambda_2 = 1$. O esquema N_1 define uma classe de grafos assim construída. Dados os inteiros positivos t_1 , t_2 e t_3 , tome o grafo bipartido completo B cujo conjunto de vértices é $U = \{u_1, \dots, u_{t_1}, u_{t_1+1}, \dots, u_{t_1+t_2}\}$ com $t_1 + t_2$ elementos e $V = \{v_1, \dots, v_{t_1}, v_{t_1+1}, \dots, v_{t_1+t_3}\}$, com $t_1 + t_3$ elementos. Tome o subgrafo B' de B excluindo-se as arestas $\{u_i, v_i\}$, $1 \leq i \leq t_1$, e inserindo uma aresta pendente a cada vértice u_k , $t_1 + 1 \leq k \leq t_1 + t_2$, e a cada vértice v_j , $t_1 + 1 \leq j \leq t_1 + t_3$.

Para construir os grafos do esquema N_2 , faça:

- (1) Sejam $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Construa o grafo $K_{3,3}$ com conjunto de vértices $U \cup V$ e tome o subgrafo abrangente H de $K_{3,3}$ cujo conjunto de arestas é $E(H) = \{\{u_i, v_j\}; i \neq j \wedge 1 \leq i, j \leq 3\}$;
- (2) Dado um inteiro $t \geq 1$, sejam $W = \{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ e $V' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$. Tome o grafo bipartido completo $K_{3,t}$ cujo conjunto de vértices é $V' \cup W$;
- (3) Faça a coalescência de H e $K_{3,t}$ identificando os vértices v_i e v'_i , $1 \leq i \leq 3$;
- (4) A cada vértice de W acrescente uma aresta pendente;
- (5) Finalmente, tome um vértice v e ligue-o a cada vértice de W . O grafo resultante tem a forma do esquema N_2 .

Para construir os grafos do esquema N_3 , faça:

- (1) Dado um inteiro $t \geq 1$, sejam $V = \{w, v_1, v_2, \dots, v_{t+3}\}$ e $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{t+3}\}$. Construa a estrela S_{t+4} de centro w e com conjunto de vértices V ;
- (2) Sejam $E_1 = \{\{v_i, u_i\}; 1 \leq i \leq t+3\}$ e $E_2 = \{\{v_i, u_{t+j}\}; 1 \leq i \leq t \wedge 1 \leq j \leq 3\}$. Construa o grafo \mathcal{G} com conjunto de vértices $U \cup V$ e conjunto de arestas $E(\mathcal{G}) = E(S_{t+4}) \cup E_1 \cup E_2$. Tal grafo tem a forma do esquema N_3 .

Dados dois inteiros positivos r e s , considere os conjuntos $S_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$, $S_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{2s}\}$ e $S_3 = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$. Denotemos por $F_{r,s}$ o grafo de ordem $r + 3s$ cujo conjunto de vértices é $V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ e conjunto de arestas é $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, onde

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\{v_i, v_j\}; 1 \leq i < j \leq 2s\}; \\ E_2 &= \{\{w_i, v_j\}; 1 \leq i \leq r \text{ e } 1 \leq j \leq 2s\}; \\ E_3 &= \{\{v_{2k-1}, u_k\}, \{v_{2k}, u_k\}; 1 \leq k \leq s\}. \end{aligned}$$

Para $r = 1$ e $s = 3$ temos $S_1 = \{w_1\}$, $S_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $S_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$. A Figura 4.8 exhibe o grafo $F_{1,3}$.

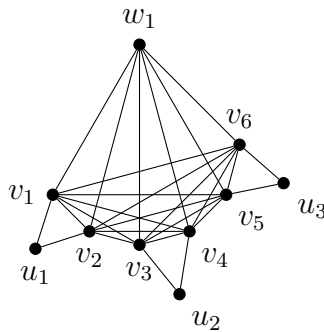


Figura 4.8: Grafo $F_{1,3}$.

Uma caracterização explícita para os grafos linha em que $\lambda_2 \leq 1$ foi dada, em 1998, por PETROVIĆ e MILEKIĆ [102], como segue.

Teorema 4.6 (PETROVIĆ e MILEKIĆ [102]) *Um grafo linha conexo G tem a propriedade $\lambda_2(G) \leq 1$ se e somente se para quaisquer inteiros positivos r e s , G é isomorfo a um subgrafo induzido do grafo $F_{r,s}$ ou a um subgrafo induzido de algum dos grafos ilustrados na Figura 4.9.*

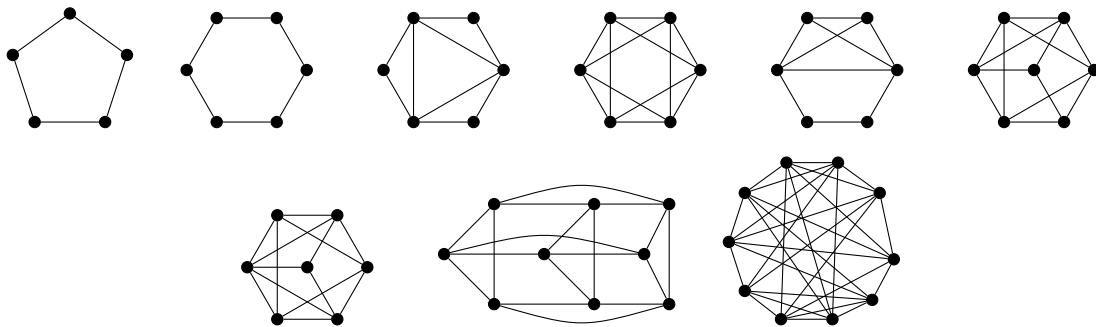


Figura 4.9: Grafos linha em que $\lambda_2 = 1$.

Fixados os naturais r , s e t considere os conjuntos $S_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$, $S_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{3s}\}$, $S_3 = \{u_1, u_2, \dots, u_{3t}\}$, $E_1 = E(CP(r) \vee K_{s+2t})$, $E_2 = \{\{v_i, v_{s+2i-1}\}, \{v_i, v_{s+2i}\}; 1 \leq i \leq s\}$ e $E_3 = \{\{u_{2k-1}, u_{k+2t}\}, \{u_{2k}, u_{k+2t}\}; 1 \leq k \leq t\}$. O grafo $F_{r,s,t}$, de ordem $r + 3s + 3t$, é obtido de $CP(r) \vee K_{s+2t}$ cujo conjunto de vértices é $V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ e o conjunto de arestas é $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

O Teorema 4.7 fornece uma caracterização explícita dos grafos linha generalizados conexos em que $\lambda_2 \leq 1$.

Teorema 4.7 (PETROVIĆ e MILEKIĆ [30]) *Um grafo linha generalizado conexo de ordem n tem $\lambda_2(G) \leq 1$ se e somente se para $r, s, t \in \mathbb{N}$, ou G é isomorfo a um subgrafo induzido de $F_{r,s,t}$ ou é isomorfo a um subgrafo induzido de H , onde H é um dos grafos ilustrados na Figura 4.10.*

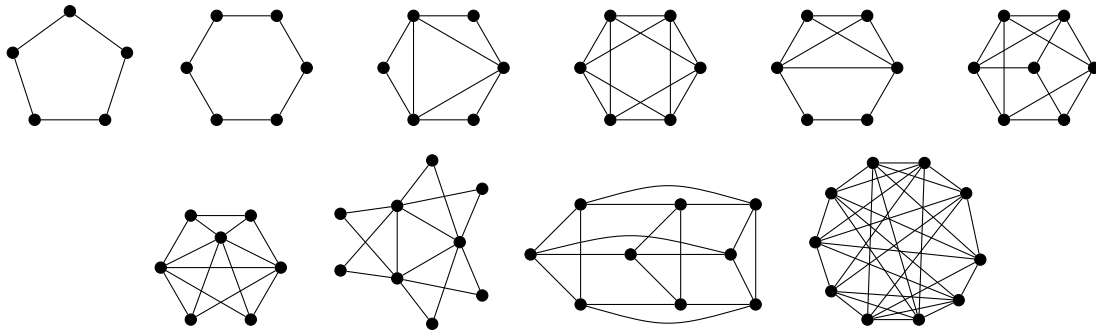


Figura 4.10: Grafos linha generalizados com $\lambda_2 = 1$.

Sejam u e v vértices de um grafo conexo G . Dois caminhos de u a v são *internamente disjuntos* se, exceto u e v , nenhum outro vértice de G pertence a ambos os caminhos.

Um *theta grafo*, Θ_{s_1, s_2, s_3} , é um grafo conexo constituído por três caminhos internamente disjuntos de comprimentos s_1 , s_2 e s_3 entre dois vértices de grau 3. A Figura 4.12 ilustra os theta grafos $\Theta_{2,2,2}$ e $\Theta_{3,3,4}$.

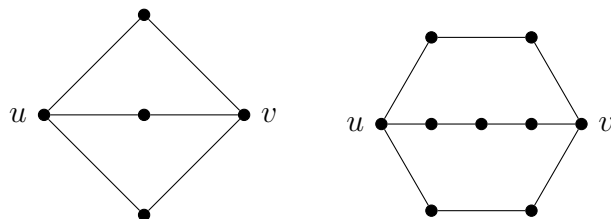


Figura 4.11: Theta grafos $\Theta_{2,2,2}$ e $\Theta_{3,3,4}$.

Um *theta grafo generalizado* G_{s_1, s_2, \dots, s_k} consiste de um par de vértices conectados por k caminhos internamente disjuntos de comprimentos s_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. A Figura 4.12 ilustra o theta grafo generalizado $G_{1,2,3,5}$.

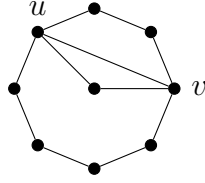


Figura 4.12: Theta grafo generalizado $G_{1,2,3,5}$.

Os theta grafos generalizados com a propriedade $\lambda_2 \leq 1$ foram caracterizados em 2008 por GAO e HUANG [103].

Teorema 4.8 (GAO e HUANG [103]) *Dados os inteiros $r \geq 0$, $s \geq 1$ e $t \geq 2$, seja G um theta grafo generalizado de ordem n . Tem-se $\lambda_2(G) \leq 1$ se e somente se G é isomorfo a um grafo pertencente a uma das classes cujo esquema está ilustrado na Figura 4.13.*

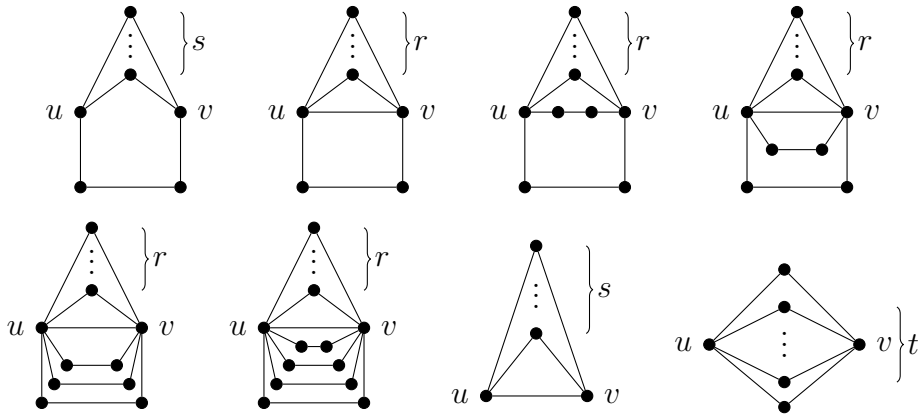


Figura 4.13: Classes de theta grafos generalizados com $\lambda_2 \leq 1$.

Cada desenho, exibido na Figura 4.13, representa um esquema de uma classe particular de theta grafos generalizados e cada um dos inteiros $r \geq 0$, $s \geq 1$ e $t \geq 2$, representam a quantidade de caminhos internamente disjuntos de comprimento 2, entre os vértices u e v .

Sejam $n, r \in \mathbb{N}$ tais que $n \geq 4$ e $1 \leq r \leq n - 3$. Seja S_n^* o grafo unicíclico obtido da estrela S_n pelo acréscimo de uma aresta e tome r cópias de K_2 . O grafo unicíclico $U_1(n, r)$ é aquele obtido da coalescência de um dos vértices pendentes de cada uma das r cópias de K_2 com um vértice pendente de S_n^* . De acordo com XU [31], para todo $n \geq 4$, tais grafos têm o segundo maior autovalor igual a 1. Veja o grafo $U(6, 2)$ exibido na Figura 4.14.

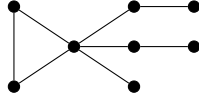


Figura 4.14: Grafo $U(6,2)$.

Os grafos unicíclicos em que $\lambda_2 \leq 1$ foram determinados em 2004, de acordo com o resultado que segue.

Teorema 4.9 (XU [31]) *Dados os inteiros $n \geq 4$ e $1 \leq r \leq n-3$, seja G um grafo unicíclico. Para que $\lambda_2(G) \leq 1$ é necessário e suficiente que $G \simeq C_6$ ou $G \simeq U(n, r)$ ou G é isomorfo a um subgrafo unicíclico induzido de H , sendo H um dos grafos ilustrados na Figura 4.15.*

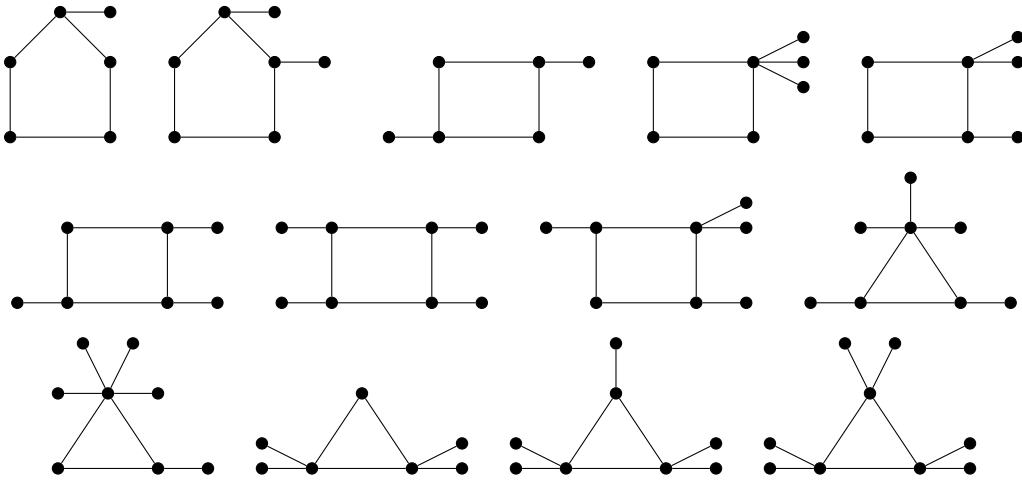


Figura 4.15: Grafos unicíclicos em que $\lambda_2 = 1$.

Dados os inteiros não negativos r e t , considere os grafos rK_2 e tP_3 . O grafo bicíclico $\Psi(r, t)$ é aquele obtido da coalescência do vértice de maior grau do grafo $K_3 \cdot K_3$, ilustrado na Figura 4.16, com um dos vértices pendentes de cada uma das r cópias de K_2 e com um vértice pendente de cada uma das t cópias de P_3 . A Figura 4.16 explicita o grafo $\Psi(3, 1)$. Em 2005, GUO [32] mostrou que tal classe de grafos é a única classe infinita de grafos bicíclicos com segundo maior autovalor $\lambda_2 = 1$. O mesmo autor provou que, além dos grafos acima descritos, existem exatamente 13 grafos com a propriedade $\lambda_2 = 1$. O Teorema 4.10 caracteriza todos os grafos bicíclicos com a propriedade $\lambda_2 \leq 1$.

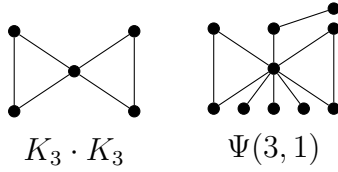


Figura 4.16: Grafos bicíclicos.

Teorema 4.10 (GUO [32]) *Dados os inteiros $r \geq 0$ e $t \geq 0$, seja G um grafo bicíclico. Tem-se $\lambda_2(G) \leq 1$ se e somente se $G \simeq \Psi(r, t)$ ou G é isomorfo a um subgrafo induzido de H , sendo H um dos grafos ilustrados na Figura 4.17.*

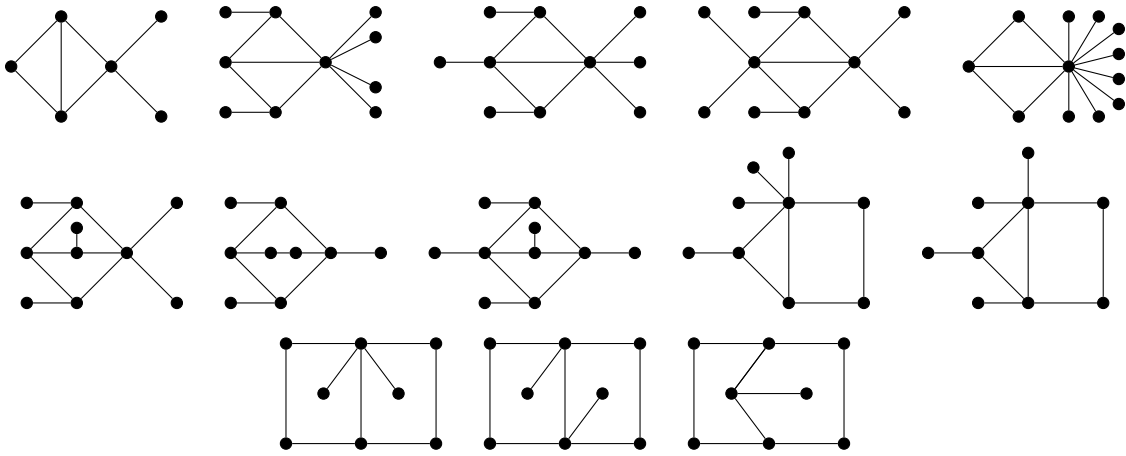


Figura 4.17: Grafos bicíclicos em que $\lambda_2 = 1$.

Dados os inteiros não negativos r e t , considere os grafos rK_2 e tP_3 . O grafo tricíclico $N(r, t)$ é aquele obtido da coalescência do vértice de maior grau do grafo $K_3 \cdot K_3 \cdot K_3$, ilustrado na Figura 4.18, com um dos vértices pendentes de cada uma das r cópias de K_2 e com um vértice pendente de cada uma das t cópias de P_3 . A Figura 4.18 explicita o grafo $N(2, 1)$. Em 2011, LI e YANG [33] mostrou que tal classe de grafos é a única classe infinita de grafos tricíclicos com segundo maior autovalor $\lambda_2 = 1$. O mesmo autor provou que, além dos grafos acima descritos, existem exatamente 30 grafos esporádicos, descritos na Figura 4.19, com a propriedade $\lambda_2 = 1$. O Teorema 4.11 caracteriza todos os grafos tricíclicos em que $\lambda_2 \leq 1$.

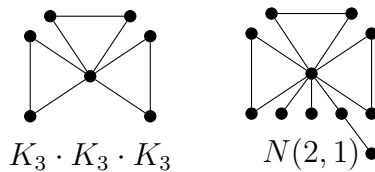


Figura 4.18: Grafos tricíclicos.

Teorema 4.11 (LI e YANG [33]) *Dados os inteiros $r \geq 0$ e $t \geq 0$, seja G um grafo tricíclico. Tem-se $\lambda_2(G) \leq 1$ se e somente se $G \simeq N(r, t)$ ou G é isomorfo a um subgrafo induzido de H , sendo H um dos 31 grafos ilustrados na Figura 4.19.*

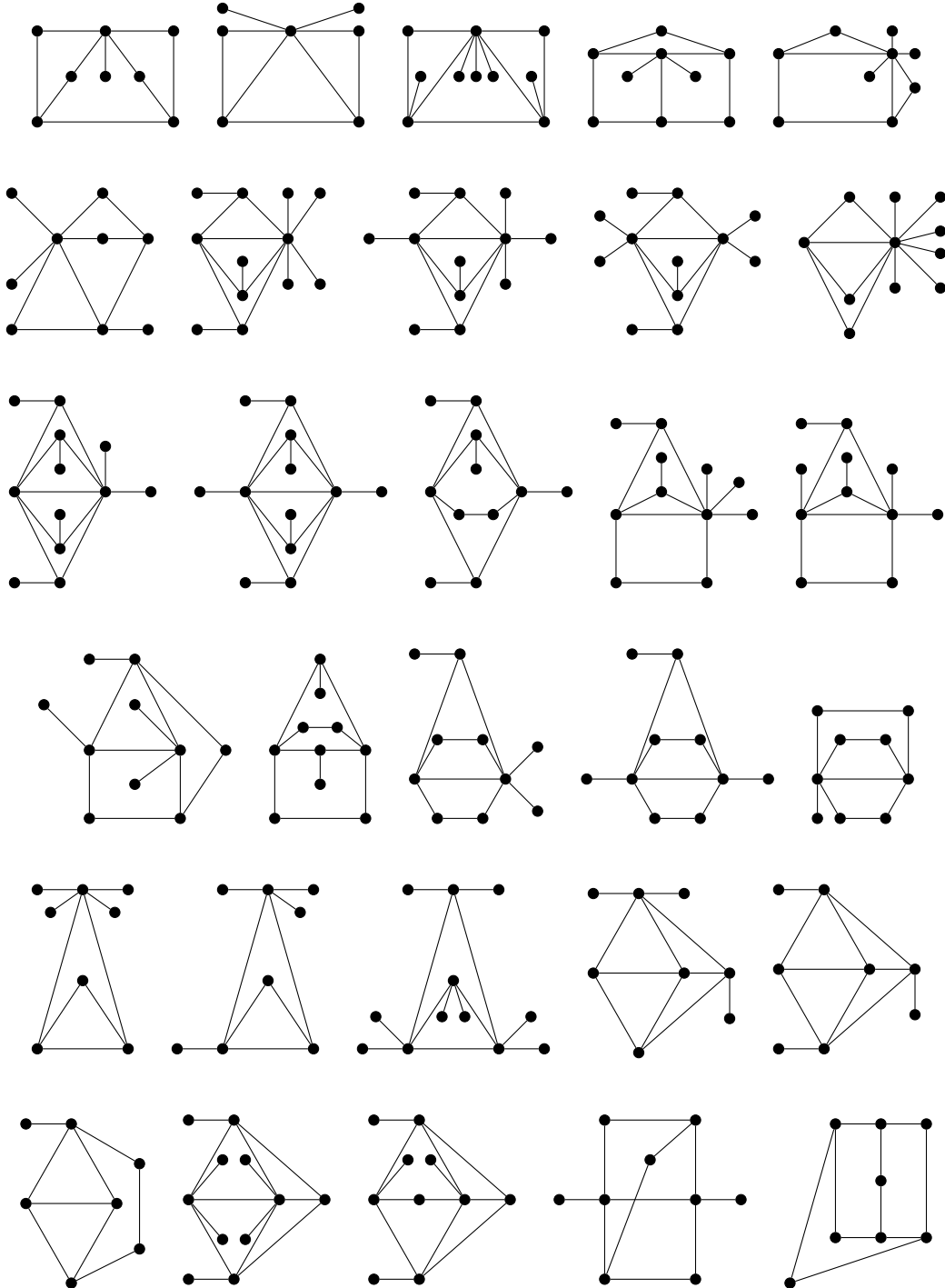


Figura 4.19: Grafos tricíclicos com $\lambda_2 = 1$.

Capítulo 5

Grafos caracterizados por λ_2

Na Seção 3.1, Teorema 3.4, vimos que os grafos completos são caracterizados por $\lambda_2 = -1$ e os grafos k -partidos completos, $2 \leq k \leq n - 1$, são aqueles caracterizados por $\lambda_2 = 0$. Neste capítulo, apresentamos resultados que caracterizam grafos que tem o segundo maior autovalor pertencente a determinados intervalos. Por exemplo, o Teorema 5.3, dado por CAO e HONG [21], determina explicitamente os grafos em que $0 < \lambda_2 < \frac{1}{3}$, o Teorema 5.10, dado por PETROVIĆ [22], caracteriza explicitamente todos os grafos conexos que satisfazem a condição $0 < \lambda_2 < \sqrt{2} - 1$ e o Teorema 5.11, devido a SIMIĆ [25], caracteriza implicitamente todos os grafos para os quais $\lambda_2 \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, usando a técnica de subgrafos proibidos.

5.1 Grafos em que $0 < \lambda_2 < \frac{1}{3}$

Os dois lemas a seguir são necessários para a demonstração do Teorema 5.3, que como dissemos anteriormente, caracteriza todos os grafos em que $\lambda_2 \in (0, \frac{1}{3})$. O primeiro explicita quatro subgrafos proibidos para grafos em que $\lambda_2 < \frac{1}{3}$ e o segundo, ao contrário do primeiro, os grafos em que esta desigualdade é satisfeita.

Lema 5.1 (CAO e HONG [21]) *Seja H_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, um grafo da Figura 5.1. Para tais grafos, tem-se $\lambda_2 > \frac{1}{3}$.*

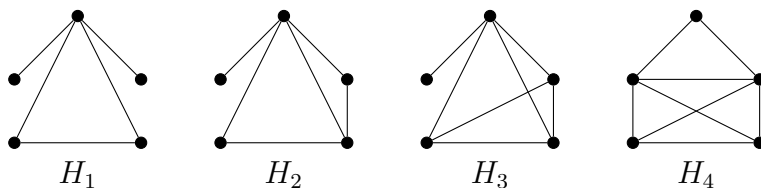


Figura 5.1: Grafos para os quais $\lambda_2 > \frac{1}{3}$.

Lema 5.2 (CAO e HONG [21]) *Sejam $n \geq 4$ e $G \simeq (n-3)K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$. Tem-se que $\lambda_2(G) < \frac{1}{3}$.*

Demonstração. Sejam $n \geq 4$ e $G \simeq (n-3)K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$. Como exemplo, veja, para $n = 7$, o grafo $G \simeq 4K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$, exibido na Figura 5.2, com 4 vértices gêmeos falsos e 2 vértices gêmeos verdadeiros, ambos de grau 5. Daí segue que G tem um conjunto independente com $n-3$ vértices gêmeos falsos, todos de grau 3. Além disso, G também possui dois vértices gêmeos verdadeiros de grau $n-2$. Logo, da Proposição 2.27, G tem 0 e -1 como autovalores cujas respectivas multiplicidades são, no mínimo, iguais a $n-4$ e 1.

Para determinar os três autovalores restantes de G , notemos que a matriz de adjacência de G pode ser escrita da seguinte forma:

$$A(G) = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0}_{n-3} & J_{(n-3) \times 2} & \mathbf{1}_{(n-3) \times 1} \\ \hline J_{2 \times (n-3)} & J_2 - I_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \hline \mathbf{1}_{1 \times (n-3)} & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \end{array} \right],$$

onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo, $\mathbf{1}$ denota o vetor cujas coordenadas são todas iguais a 1 e as respectivas matrizes I e J são a identidade e aquela cujas entradas são todas iguais a 1.

A matriz $A(G)$, como escrita acima, é uma matriz em blocos cuja soma das linhas satisfazem as hipóteses da Proposição 2.9, tendo então

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ n-3 & 1 & 0 \\ n-3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

como matriz cujas entradas são iguais às somas das linhas dos blocos de $A(G)$ e cujo polinômio característico é $f(x) = x^3 - x^2 - 3(n-3)x + (n-3)$. Da Proposição 2.9, segue então que

$$P_G(x) = x^{n-4}(x+1)(x^3 - x^2 - 3(n-3)x + n-3).$$

Como f tem grau ímpar, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Logo, existem $a > 0$ e $b < 0$ tais que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Como $f(0) = n-3 > 0$ e $f(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{27} < 0$, as três raízes de f pertencem aos intervalos $(b, 0)$, $(0, \frac{1}{3})$ e $(\frac{1}{3}, a)$. Portanto, $\lambda_2(G) < \frac{1}{3}$. □

A Figura 5.2 ilustra o grafo $G \simeq 4K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$ cujo espectro é

$$\text{Spec}(G) = \{-3.1755, -1, 0^{(3)}, 0.3273, 3.8482\}.$$

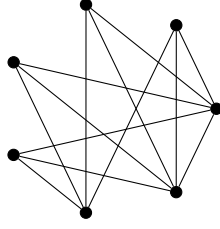


Figura 5.2: Grafo $4K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$.

O resultado que segue estabelece que os grafos que pertencem a classe definida pelo Lema 5.2 são caracterizados pelo seu segundo maior autovalor.

Teorema 5.3 (CAO e HONG [21]) *Seja G um grafo de ordem $n \geq 4$ e sem vértices isolados. Então:*

(i) $0 < \lambda_2(G) < \frac{1}{3}$ se e somente se $G \simeq (n-3)K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$.

(ii) A sequência $\lambda^{(n)} = \lambda_2((n-3)K_1 \vee (K_1 \cup K_2))$ é não decrescente e $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)} = \frac{1}{3}$.

(iii) Não existe uma sequência $\{G_k\}_{k \geq 1}$ de grafos tal que

$$\lambda_2(G_k) > \frac{1}{3} \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(G_k) = \frac{1}{3}.$$

Consequentemente, não existem grafos tais que $\lambda_2(G) = \frac{1}{3}$.

Demonstração. Seja G um grafo de ordem $n \geq 4$ e sem vértices isolados. Conclui-se a prova do item (i) através das cinco afirmações que se seguem.

Afirmção 1. Se $0 < \lambda_2(G) < \frac{1}{3}$ então \overline{G} é desconexo.

Suponhamos que \overline{G} é conexo. Da Proposição 2.7, G possui um subgrafo induzido isomorfo a $2K_2$ ou P_4 e do Teorema 2.28,

$$\lambda_2(G) \geq \min \{ \lambda_2(2K_2), \lambda_2(P_4) \} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > \frac{1}{3},$$

o que contradiz a hipótese.

Para $k \geq 2$, sejam $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \dots, \overline{G}_k$, as componentes de \overline{G} . Logo, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, G_i é um subgrafo induzido de G e para $H \simeq K_k$ segue que

$$G \simeq H[G_1, G_2, \dots, G_k]. \quad (5.1)$$

Afirmção 2. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, G_i contém um vértice isolado.

De fato, suponhamos que para algum $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ G_i não contém vértices isolados. Como \overline{G}_i é conexo, segue da Proposição 2.7, que G_i contém um subgrafo induzido isomorfo a $2K_2$ ou P_4 . Do Teorema 2.28,

$$\lambda_2(G) \geq \lambda_2(G_i) \geq \min \{\lambda_2(2K_2), \lambda_2(P_4)\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > \frac{1}{3},$$

o que contradiz a hipótese (i) sobre $\lambda_2(G)$.

Afirmção 3. Existe $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $G_i \simeq K_1 \cup K_2$.

Com efeito, como $\lambda_2(G) > 0$, pela Proposição 3.4, G não é um grafo multipartido completo. Assim existe $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que \overline{G}_i possui dois vértices não adjacentes. Assim, G_i tem pelo menos uma aresta e, da Afirmção 2 conclui-se que G_i tem um subgrafo induzido isomorfo a $K_1 \cup K_2$.

Suponhamos que G_i tem outros vértices além dos vértices de $K_1 \cup K_2$. Neste caso, G_i contém um subgrafo induzido isomorfo a um dos seguintes grafos: $F_1 = 2K_1 \cup K_2$, $F_2 = K_1 \cup P_3$ ou $F_3 = K_1 \cup K_3$.

Suponhamos que F_j , $1 \leq j \leq 3$, é um subgrafo induzido de G_i . Como $k \geq 2$ existe um vértice u em \overline{G} que não pertence a \overline{G}_i . Logo, o conjunto $V(F_j) \cup \{u\}$ induz em G um subgrafo isomorfo ao grafo H_j , ilustrados na Figura 5.1.

Dos Lemas 2.28 e 5.1 tem-se $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(H_j) > \frac{1}{3}$, para cada $j \in \{1, 2, 3\}$. O que contradiz a hipótese $\lambda_2(G) < \frac{1}{3}$. Consequentemente, existe $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $G_i \simeq K_1 \cup K_2$.

Afirmção 4. \overline{G} contém somente duas componentes, isto é, $k = 2$.

Da Afirmção 3 podemos supor, sem perda de generalidade, que $G_1 \simeq K_1 \cup K_2$.

Suponhamos $k > 2$ e considere os vértices $u \in \overline{G}_2$ e $v \in \overline{G}_3$. Neste caso, $V(G_1) \cup \{u, v\}$ induz em G um subgrafo isomorfo a H_4 , ilustrado na Figura 5.1. Logo, do Lema 5.1 $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(H_4) > \frac{1}{3}$. O que contradiz a hipótese sobre $\lambda_2(G)$ e assim, $k \leq 2$. Pelo item (i) concluímos que $k = 2$.

Afirmção 5. Para $n \geq 4$ tem-se $G_2 \simeq (n-3)K_1$.

Com efeito, suponhamos que G_2 possua uma aresta $e = \{u, v\}$. Em vista disso, $G_1 \cup \{u, v\}$ induz em G um subgrafo isomorfo ao grafo H_4 ilustrado na Figura 5.1. Assim $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(H_4) > \frac{1}{3}$, contradizendo a hipótese. Logo G_2 é um subgrafo vazio de G de ordem $n-3$, visto que $G_1 \simeq K_1 \cup K_2$.

Das Afirmções 2, 3, 4, 5 e da equação (5.1) segue que $G \simeq (n-3)K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$. Logo, do Lema 5.2, $\lambda_2(G) < \frac{1}{3}$, o que conclui a parte (i).

(ii) Inicialmente, observe que a sequência $\lambda^{(n)} = \lambda_2(G)$ é convergente pois $\lambda^{(n)} \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ e é não decrescente pelo Teorema 2.28.

Do Lema 5.2, $\lambda^{(n)}$ é raiz do polinômio $f(x) = x^3 - x^2 - 3(n-3)x + (n-3)$.

Logo,

$$\lambda^{(n)} = \frac{1}{3} + \frac{(\lambda^{(n)} - 1)(\lambda^{(n)})^2}{3(n-3)}.$$

Consequentemente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)} = \frac{1}{3}$.

(iii) Suponha que existe um grafo H tal que $\frac{1}{3} < \lambda_2(H) < 1$. Então, pela demonstração da parte (i) segue que

$$\lambda_2(H) \geq \min\{\lambda_2(K_2), \lambda_2(P_4), \lambda_2(H_1), \lambda_2(H_2), \lambda_2(H_3), \lambda_2(H_4)\} > 0, 334.$$

Portanto, não existe uma sequência $\{G_k\}_{k \geq 1}$ de grafos tal que

$$\lambda_2(G_k) > \frac{1}{3} \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(G_k) = \frac{1}{3}.$$

□

O Corolário 5.4 fornece uma cota inferior para $\lambda_2(G)$, quando G não é um grafo multipartido completo e o Corolário 5.5 determina o menor número real positivo que $\lambda_2(G)$ pode assumir.

Corolário 5.4 (CAO e HONG [21]) *Seja G um grafo com $n \geq 4$ vértices e sem vértices isolados. Se G não é isomorfo a um grafo multipartido completo, então*

$$\lambda_2(G) \geq \lambda_2((n-3)K_1 \vee (K_1 \cup K_2)).$$

Além disso, a igualdade é verdadeira se e somente se $G \simeq (n-3)K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$.

Corolário 5.5 (CAO e HONG [21]) *Não existem grafos de ordem $n \geq 4$ tais que $0 < \lambda_2 < r$, sendo r a segunda maior raiz do polinômio $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$.*

Demonstração. Seja $G \simeq K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$. Do Lema 5.2, $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$ é o polinômio característico de G cuja segunda maior raiz é r . Do Corolário 5.4, não existe grafo de ordem $n \geq 4$ em que $0 < \lambda_2(G) < r$.

□

5.2 Grafos em que $0 < \lambda_2 \leq \sqrt{2} - 1$

O Teorema 5.3 afirma que os grafos $(n-3)K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$ são caracterizados pelo seu segundo maior autovalor. Em busca de outras classes de grafos cuja estrutura possa ser caracterizada por uma cota superior de λ_2 , PETROVIĆ [22] generalizou o Teorema 5.3 explicitando todos os grafos para os quais se tem $\lambda_2 \leq \sqrt{2} - 1$.

Lema 5.6 (PETROVIĆ [22]) *Seja H_i , $i \in \{5, 6, 7, 8\}$, um grafo da Figura 5.3. Para tais grafos tem-se $\lambda_2 > \sqrt{2} - 1$.*

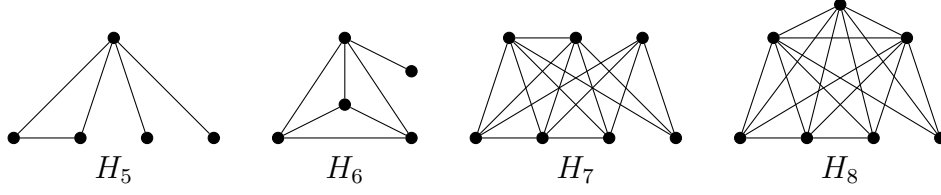


Figura 5.3: Grafos em que $\lambda_2 > \sqrt{2} - 1$.

Lema 5.7 (PETROVIĆ [22]) *Se $H \simeq \bigvee_n (K_1 \cup K_2)$ e $G \simeq (\bigvee_n (K_1 \cup K_2)) \vee (\bigvee_m (pK_1))$ então*

(i) $P_H(x) = (x + 1)^{n-1}(x^2 + 2x - 1)^{n-1}(x^3 - 3(n - 1)x^2 - (2n - 1)x + n - 1)$;

(ii) $P_G(x) = x^{m(p-1)}(x + p)^{m-1}(x + 1)^{n-1}(x^2 + 2x - 1)^{n-1}\phi(x)$, onde

$$\begin{aligned} \phi(x) = & x^4 - (3(n - 1) + p(m - 1))x^3 - (3p(n + m - 1) + 2n - 1)x^2 + \\ & + (p(2n + m - 1) - n + 1)x + p(n + m - 1); \end{aligned}$$

(iii) *Para $n = 1$, tem-se $\lambda_2(G) < \sqrt{2} - 1$ e, para $n \geq 2$, tem-se $\lambda_2(G) = \sqrt{2} - 1$.*

Os Lemas 5.8 e 5.9 determinam os grafos resultantes de junções de grafos completos tais que $\lambda_2 \leq \sqrt{2} - 1$. Tais lemas nos levam ao Teorema 5.10 que caracteriza todos os grafos tais que $0 < \lambda_2(G) \leq \sqrt{2} - 1$. Suas demonstrações encontram-se no Apêndice A.

Lema 5.8 (PETROVIĆ [22]) *Sejam r, s e q inteiros positivos tais que $r \leq s$ e seja $G \simeq qK_1 \vee (K_1 \cup K_{r,s})$. Tem-se $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2} - 1$ se e somente se uma das seguintes condições é verdadeira:*

(i) $r > 1, s \geq r$ e $q = 1$;

(ii) $r = 1, s \geq 1$ e $q \geq 2$;

(iii) $r = 2, s \geq 2$ e $q = 2$;

(iv) $r = 2, 2 \leq s \leq 3$ e $q \geq 3$;

(v) $r = 2, s = 4$ e $3 \leq q \leq 7$;

(vi) $r = 2, s = 5$ e $3 \leq q \leq 4$;

(vii) $r = 2, 6 \leq s \leq 8$ e $q = 3$;

(viii) $r = 3, s = 3$ e $2 \leq q \leq 4$;

(ix) $r = 3, 4 \leq s \leq 7$ e $q = 2$;

(x) $r = 4, s = 4$ e $q = 2$.

Lema 5.9 (PETROVIĆ [22]) *Sejam r, s, p e q inteiros positivos tais que $r \leq s, p \leq q$ e seja $G \simeq K_{p,q} \vee (K_1 \cup K_{r,s})$. Tem-se $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2} - 1$ se e somente se uma das seguintes condições é verdadeira:*

(i) $r = 1, s = 1$ e $1 \leq p \leq q$;

(ii) $r = 1, s = 2, 1 \leq p \leq 2$ e $p \leq q$;

(iii) $r = 1, s = 2, p = 3$ e $3 \leq q \leq 7$;

(iv) $r = 1, s = 2, p = 4$ e $q = 4$;

(v) $r = 1, s = 3, p = 1$ e $q = 1$.

O Teorema 5.10 caracteriza explicitamente os grafos em que $0 < \lambda_2(G) \leq \sqrt{2} - 1$.

Teorema 5.10 (PETROVIĆ [22]) *Seja G um grafo sem vértices isolados. Para que se tenha $0 < \lambda_2(G) \leq \sqrt{2} - 1$ é necessário e suficiente que valha uma das seguintes condições:*

(i) $G \simeq (\bigvee_n (K_1 \cup K_2)) \vee K_{s_1, \dots, s_m}$;

(ii) $G \simeq qK_1 \vee (K_1 \cup K_{r,s})$ e p, q, r e s satisfazem uma das condições do Lema 5.8;

(iii) $G \simeq K_{p,q} \vee (K_1 \cup K_{r,s})$ e p, q, r e s satisfazem uma das condições do Lema 5.9.

Demonstração. Seja G um grafo de ordem n e sem vértices isolados tal que $0 < \lambda_2(G) \leq \sqrt{2} - 1$.

Afirmção 1. G é um grafo conexo.

De fato, se G não é conexo então $2K_2$ é um subgrafo induzido de G e, do Teorema 2.28, $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(2K_2) = 1$, contradizendo a hipótese sobre $\lambda_2(G)$.

Afirmção 2. \overline{G} é um grafo desconexo.

Da Afirmção 1, G é um grafo conexo. Se \overline{G} é conexo então do Lema 2.7 G possui $2K_2$ ou P_4 como subgrafo induzido. Logo, do Teorema 2.28 $\lambda_2(G) \geq \min\{\lambda_2(2K_2), \lambda_2(P_4)\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > \sqrt{2} - 1$, contradizendo o fato de $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2} - 1$.

Da Afirmção 2, \overline{G} possui $t \geq 2$ componentes, digamos $\overline{G} \simeq \overline{G}_1 \cup \overline{G}_2 \cup \dots \cup \overline{G}_t$. Logo, da Afirmção 1 e para $H \simeq K_t$ segue que

$$G \simeq H[G_1, G_2, \dots, G_t]. \quad (5.2)$$

Afirmação 3. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ o subgrafo induzido G_i de G possui um vértice isolado.

Suponha que G_i é conexo. Sendo \overline{G}_i conexo, do Lema 2.7 tem-se que $2K_2$ ou P_4 é um subgrafo induzido de G_i . Isto contradiz a hipótese sobre $\lambda_2(G)$ em vista do Teorema 2.28.

Afirmação 4. Existe $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ tal que o grafo G_i é não vazio.

De fato, suponha que para todo $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, G_i é um grafo vazio. Neste caso, de (5.2), G é um grafo multipartido completo e do Teorema 3.4, $\lambda_2(G) = 0$. O que novamente contradiz a hipótese sobre $\lambda_2(G)$.

Afirmação 5. Cada grafo G_i não vazio, possui exatamente um vértice isolado.

Suponha que exista $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ tal que G_i é não vazio e possui dois vértices isolados. De (5.2) e da Afirmação 3, tem-se que o grafo $H_1 \simeq K_1 \vee (2K_1 \cup K_2)$, exibido na Figura 5.3, é um subgrafo induzido de G . Assim, do Lema 5.6 e do Teorema 2.28 tem-se $\lambda_2(G) > \sqrt{2} - 1$, o que contradiz a hipótese sobre $\lambda_2(G)$.

Denotemos por v_i o vértice isolado de cada um dos grafos não vazios G_i .

Afirmação 6. Todo grafo G_i , não vazio, é livre de triângulos.

Suponha que exista $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ tal que K_3 é um subgrafo induzido de G_i . Logo, de (5.2) e da Afirmação 3, G possui o grafo $H_2 \simeq K_1 \vee (K_1 \cup K_3)$, dado na Figura 5.3, como subgrafo induzido. O que contradiz a hipótese sobre $\lambda_2(G)$, em vista do Lema 5.6 e do Teorema 2.28.

Afirmação 7. Para todo grafo G_i , não vazio, tem-se que $G_i - v_i$ é bipartido completo.

Da Afirmação 6, G_i não contém $K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$ como subgrafo induzido e como $\min\{\lambda_2(2K_2), \lambda_2(P_4)\} > \sqrt{2} - 1$, também não contém $2K_2$ e P_4 como subgrafos induzidos. Logo, da Proposição 2.5, $G_i - v_i$ é um grafo multipartido completo.

Como todo ciclo C_k , $k \geq 5$, satisfaz $\lambda_2(C_k) > 0.61$ tem-se, para todo $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, que G_i não possui um ciclo de comprimento ímpar como subgrafo induzido. Logo do Teorema 2.2, $G_i - v_i$ é um grafo bipartido e, portanto, é bipartido completo.

Para concluir a demonstração do teorema considere os dois caso a seguir:

Caso 1. Pelo menos dois grafos G_i e G_j , $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}$, são não vazios.

Sem perda de generalidade, suponha $i = 1$, $j = 2$ e que um deles, digamos G_1 , possua duas arestas. Da hipótese e da Afirmação 3, G_2 possui $K_1 \cup K_2$ como subgrafo induzido. Logo, $H_3 \simeq (K_1 \cup K_2) \vee (K_1 \cup P_3)$, ilustrado na Figura 5.3, é um subgrafo induzido de G . Do Teorema 2.28 e do Lema 5.6

$$\lambda_2(G) \geq \lambda_2(H_3) > \sqrt{2} - 1,$$

o que contradiz a hipótese $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2} - 1$.

Logo, se existem $r \geq 2$ grafos não vazios então estes devem ser isomorfos a $K_1 \cup K_2$. Assim, de (5.2), tem-se

$$G \simeq (\bigvee_r (K_1 \cup K_2)) \vee K_{s_1, s_2, \dots, s_m}.$$

Se $p = \max\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ então G é um subgrafo induzido do grafo $H \simeq (\bigvee_r (K_1 \cup K_2)) \vee (\bigvee_m (pK_1))$. Do Teorema 2.28 e do Lema 5.7 tem-se

$$\lambda_2(G) \leq \lambda_2(H) = \sqrt{2} - 1.$$

Caso 2. Exatamente um dos grafos G_i contém uma aresta.

Sem perda de generalidade, suponha que G_1 possua tal propriedade.

Se $G_1 \simeq K_1 \cup K_2$ então $G \simeq (K_1 \cup K_2) \vee K_{s_1, s_2, \dots, s_m}$. Assim, como no Caso 1, para $p = \max\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, do Teorema 2.28 e do Lema 5.7, obtém-se

$$\lambda_2(G) \leq \lambda_2((K_1 \cup K_2) \vee (\bigvee_m (pK_1))) < \sqrt{2} - 1.$$

Sejam r e s naturais tais que $r \leq s$ e $2 \leq s$. Se $G_1 \simeq K_1 \cup K_{r,s}$ então $t \leq 3$. De fato, se $t \geq 4$ então o grafo $H_4 \simeq K_3 \vee (K_1 \cup P_3)$, exibido na Figura 5.3, é um subgrafo induzido de G . Do Teorema 2.28 e do Lema 5.6, $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(H_4) > \sqrt{2} - 1$, contradizendo a hipótese sobre $\lambda_2(G)$. Portanto, ou $G \simeq (K_1 \cup K_{r,s}) \vee qK_1$ ou $G \simeq (K_1 \cup K_{r,s}) \vee K_{p,q}$. Em cada caso, o teorema segue dos Lemas 5.8 e 5.9. \square

5.3 Grafos em que $0 < \lambda_2 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

CAO e HONG [21] propuseram o problema de caracterizar os grafos tais que $\frac{1}{3} < \lambda_2 \leq \sigma$, para $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Tal problema foi investigado nos artigos [23], [24] e [25], onde os autores denominam por σ -grafo qualquer grafo que possua tal propriedade. Ao contrário das duas classes de grafos estudadas anteriormente neste capítulo, os σ -grafos não foram completamente determinados. O Teorema 5.11 exhibe uma coleção finita de subgrafos proibidos, obtida em SIMIĆ [25], que fornece uma caracterização implícita para tais grafos. Antes de enunciarmos tal resultado, necessitamos definir uma classe de grafos que denotaremos por \mathcal{Q} . Tal definição será dada recursivamente.

- (i) $K_1 \in \mathcal{Q}$;
- (ii) se $G \in \mathcal{Q}$ então $G \cup pK_1 \in \mathcal{Q}$, para todo $p \in \mathbb{N}$;
- (iii) se $G_1, G_2 \in \mathcal{Q}$ então $G_1 \vee G_2 \in \mathcal{Q}$;
- (iv) qualquer grafo de \mathcal{Q} pode ser obtido aplicando-se um número finito de vezes as operações mencionadas em (ii) e (iii) e somente estas.

Teorema 5.11 (SIMIĆ [25]) *Se H é um subgrafo proibido minimal de um σ -grafo então ocorre exatamente uma das seguintes afirmações.*

- (a) H pertence à classe \mathcal{Q} ;
- (b) H é isomorfo ou a $2K_2$ ou a um dos grafos da Figura 5.4.

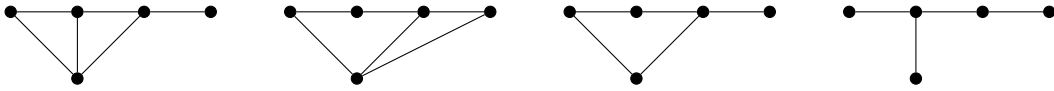


Figura 5.4: Subgrafos proibidos para σ -grafos.

Foi provado em SIMIĆ [24] que o conjunto dos subgrafos proibidos minimais para os quais $\lambda_2 < \sigma$ é um conjunto finito. Exceto para $2K_2$ e P_4 , todos pertencem à classe \mathcal{Q} . A lista completa destes subgrafos proibidos minimais está descrita em CVETKOVIĆ e SIMIĆ [104]: a lista é extensa e contém grafos de ordem muito maior dos que aqueles encontrados nas caracterizações já apresentadas aqui.

A seguir, destacamos o principal resultado de CVETKOVIĆ e SIMIĆ [23].

Teorema 5.12 (CVETKOVIĆ e SIMIĆ [23]) *Um σ -grafo possui no máximo uma componente não vazia, G , para a qual uma das seguintes afirmações é verdadeira.*

- (a) G é um grafo multipartido completo;
- (b) G é um subgrafo induzido de C_5 ;
- (c) G tem cintura 3.

Capítulo 6

Relações do tipo Nordhaus-Gaddum

Uma *coloração* de um grafo G é uma atribuição de cores a seus vértices, de modo que vértices adjacentes têm cores diferentes. O menor número de cores em uma coloração de G é o seu *número cromático*, $\chi(G)$. Em 1956, NORDHAUS e GADDUM [40] estudaram o número cromático de um grafo G junto com o de seu complementar \overline{G} e determinaram cotas inferiores e superiores para a soma e para o produto deles em termos da ordem do grafo, conforme o resultado que segue.

Teorema 6.1 (NORDHAUS e GADDUM [40]) *Se G é um grafo de ordem n então*

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1 \quad e \quad n \leq \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leq \frac{(n + 1)^2}{4}.$$

Desde então, quaisquer cotas para a soma ou para o produto de um invariante e desse mesmo invariante referente ao seu grafo complementar são conhecidas como *relações ou desigualdades do tipo Nordhaus-Gaddum* que chamamos de NG-relações ou NG-desigualdades. Cotas semelhantes foram obtidas para um grande número de invariantes de grafos como podem ser vistas em AOUCHICHE e HANSEN [105].

Este capítulo será dividido em duas partes. Na primeira, apresentamos uma revisão das NG-relações espectrais e, na segunda parte, os nossos resultados encontrados com respeito à λ_2 , envolvendo tais relações.

6.1 NG-relações espectrais

Iniciamos esta seção com o resultado de NOSAL [41] e AMIN e HAKIMI [106] que, independentemente, determinaram NG-relações para o índice de um grafo.

Teorema 6.2 (AMIN e HAKIMI [106]) *Se G é um grafo de ordem n então*

$$n - 1 \leq \lambda_1(G) + \lambda_1(\overline{G}) < \sqrt{2}(n - 1).$$

A cota inferior é atingida se e somente se G é um grafo regular.

Para grafos irregulares, a cota inferior do Teorema 6.2 foi melhorada por NIKIFOROV [42], como mostra o teorema a seguir.

Teorema 6.3 (NIKIFOROV [42]) *Se G é um grafo com n vértices e m arestas então*

$$n - 1 + \frac{\sqrt{2}s^2(G)}{n^3} \leq \lambda_1(G) + \lambda_1(\overline{G}),$$

$$\text{onde } s(G) = \sum_{i=1}^n \left| d_i - \frac{2m}{n} \right|.$$

Para todo grafo G de ordem n , em 2007, NIKIFOROV [42] mostrou que a cota superior do Teorema 6.2 não é ótima ao verificar que $\lambda_1(G) + \lambda_1(\overline{G}) < (\sqrt{2} - 10^{-7})n$. Desde então, tal problema foi estudado por CSIKVÁRI [43] e TERPAI [44] cujo resultado, descrito no Teorema 6.4, apresenta a melhor cota superior conhecida para a soma $\lambda_1(G) + \lambda_1(\overline{G})$.

Teorema 6.4 (TERPAI [44]) *Se G é um grafo de ordem n , então*

$$\lambda_1(G) + \lambda_1(\overline{G}) \leq \frac{4}{3}n - 1.$$

Apesar do Teorema 6.4 melhorar a cota superior do Teorema 6.2 ainda não são conhecidos grafos extremais que a atendam. Assim, a cota acima poderá ser melhorada, como sugere a Conjectura 6.5 devido a AOUCHICHE *et al.* [107] e, de acordo com AOUCHICHE e HANSEN [105], o caso geral ainda permanece sem solução.

Conjectura 6.5 (AOUCHICHE *et al.* [107]) *Se G é um grafo de ordem n então*

$$\lambda_1(G) + \lambda_1(\overline{G}) \leq \frac{4}{3}n - \frac{5}{3} - \begin{cases} \tau_1(n), & \text{se } n \equiv 1 \pmod{3}; \\ 0, & \text{se } n \equiv 2 \pmod{3}; \\ \tau_2(n), & \text{se } n \equiv 0 \pmod{3}, \end{cases}$$

onde $\tau_1(n) = \frac{3n - 2 - \sqrt{9n^2 - 12n + 12}}{6}$ e $\tau_2(n) = \frac{3n - 1 - \sqrt{9n^2 - 6n + 9}}{6}$. Para $n \equiv 2 \pmod{3}$, tal cota é atingida se e somente se G ou \overline{G} é isomorfo ao grafo split completo cujo conjunto independente é formado por $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vértices ou $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ vértices.

Em 2007, NIKIFOROV [42] além de estudar as NG-relações para o índice de um grafo, propôs o estudo das NG-relações para todos os demais autovalores. No referido artigo, ele também determina cotas superiores para as NG-relações do segundo maior e do menor autovalores de um grafo. O caso do segundo maior autovalor aparece como segue.

Teorema 6.6 (NIKIFOROV [42]) *Se G é um grafo de ordem n então*

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) < \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Demonstração. Seja G um grafo de ordem n . Da Proposição 2.8,

$$\lambda_1^2(G) + \lambda_2^2(G) + \lambda_n^2(G) + \lambda_1^2(\overline{G}) + \lambda_2^2(\overline{G}) + \lambda_n^2(\overline{G}) \leq n(n-1). \quad (6.1)$$

Da Proposição 2.25,

$$\lambda_2(G) + \lambda_n(\overline{G}) \leq -1.$$

Como $\lambda_2(G) \geq 0$ e $\lambda_n(\overline{G}) \leq -1$,

$$\begin{aligned} \lambda_2^2(G) &\leq \lambda_n^2(\overline{G}) + 2\lambda_n(\overline{G}) + 1 \\ &\leq \lambda_n^2(\overline{G}) - 1 \\ &< \lambda_n^2(\overline{G}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Do Teorema 6.2 e das desigualdades (6.1) e (6.2), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)^2}{2} + 2\lambda_2^2(G) + 2\lambda_2^2(\overline{G}) &\leq \lambda_1^2(G) + \lambda_2^2(G) + \lambda_n^2(G) + \lambda_1^2(\overline{G}) + \lambda_2^2(\overline{G}) + \lambda_n^2(\overline{G}) \\ &\leq n(n-1). \end{aligned}$$

Logo,

$$2\lambda_2^2(G) + 2\lambda_2^2(\overline{G}) \leq \frac{n^2 - 1}{2},$$

e assim,

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq \sqrt{2\lambda_2^2(G) + 2\lambda_2^2(\overline{G})} < \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

□

Em 2014, NIKIFOROV e YUAN [45] determinaram uma cota superior para as NG-relações de qualquer autovalor diferente do índice de G , como exhibe o seguinte resultado.

Teorema 6.7 (NIKIFOROV e YUAN [45]) *Seja G um grafo de ordem n . Se $2 \leq s \leq n$ e $n \geq 15(s-1)$ então*

$$|\lambda_s(G)| + |\lambda_s(\overline{G})| \leq -1 + \frac{n}{\sqrt{2(s-1)}}.$$

A demonstração do Teorema 6.7 segue a mesma linha apresentada na prova do Teorema 6.6, exceto com o acréscimo do termo -1 , onde é utilizada a chamada

“técnica do *blown-up*”, a qual descreveremos a seguir. Antes disso, note que para o caso $s = 2$ e para todo grafo G de ordem $n \geq 15$, o Teorema 6.7 fornece uma cota melhor que aquela dada pelo Teorema 6.6,

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \frac{n}{\sqrt{2}}. \quad (6.3)$$

Sejam G um grafo de ordem n e seja t um inteiro tal que $t \geq 1$. O grafo *blown-up* de G , denotado por $G^{(t)}$, é a G -junção de n cópias do grafo tK_1 . Em 2006, NIKIFOROV [108] descreve os espectros de $G^{(t)}$ e de $\overline{G^{(t)}}$, em função dos autovalores de G e \overline{G} .

Proposição 6.8 (NIKIFOROV [108]) *Seja G um grafo de ordem n . Para todo inteiro $t \geq 1$,*

$$\begin{aligned} \text{Spec}(G^{(t)}) &= \{0^{[n(t-1)]}, t\lambda_1(G), t\lambda_2(G), \dots, t\lambda_n(G)\}; \\ \text{Spec}(\overline{G^{(t)}}) &= \{-1^{[n(t-1)]}, t\lambda_1(\overline{G}) + t - 1, t\lambda_2(\overline{G}) + t - 1, \dots, t\lambda_n(\overline{G}) + t - 1\}. \end{aligned}$$

Usando as ideias apresentadas por NIKIFOROV e YUAN [45], é possível verificar que a desigualdade (6.3) é estrita e vale para todo grafo de ordem n . De fato, suponha que exista um grafo G de ordem n tal que

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \geq -1 + \frac{n}{\sqrt{2}}. \quad (6.4)$$

Dado um inteiro $t \geq 2$, seja $H = G^{(t)}$. Como $\lambda_2(H) \geq 0$, tem-se da Proposição 6.8,

$$\lambda_2(H) + \lambda_2(\overline{H}) = t(\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G})) + t - 1.$$

Em outras palavras, o Teorema 6.6 implica em $t(\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G})) + t - 1 < \frac{nt}{\sqrt{2}}$, ou seja,

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) < \frac{n}{\sqrt{2}} - \frac{t-1}{t}.$$

Agora, fazendo t tender ao infinito chegamos a uma contradição com a desigualdade (6.4). E portanto, para todo grafo de ordem n , tem-se

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) < -1 + \frac{n}{\sqrt{2}}. \quad (6.5)$$

A Desigualdade (6.5) melhora a cota dada pelo Teorema 6.6, no entanto, esta ainda não é ótima como veremos na próxima seção.

6.2 NG-relações para λ_2

Esta seção é dedicada a apresentação de resultados que obtivemos referentes as NG-relações para λ_2 . Inicicaremos estudando as classes de grafos para as quais a soma $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G})$ é não positiva. Posteriormente, apresentaremos um refinamento da cota estabelecida pelo Teorema 6.6 e, por fim, introduziremos o estudo de uma nova cota superior para as NG-relações para λ_2 que é ótima, no sentido da existência de grafos que a atinja.

A Proposição 6.9 estabelece que os grafos completos e split completos são as únicas classes de grafos, sem vértices isolados, em que $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \in [-1, 0]$.

Proposição 6.9 *Se G é um grafo de ordem $n \geq 3$ com ao menos uma aresta então vale uma das seguintes afirmações:*

- (i) *Se $G \not\cong K_n$ então $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \geq 0$. Além disso, se G não possui vértices isolados, $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) = 0$ se e somente se G é um grafo split completo;*
- (ii) *$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) = -1$ se e somente se $G \simeq K_n$;*
- (iii) *Não existem grafos tais que $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \in (-1, 0)$.*

Demonstração. Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$ com ao menos uma aresta.

(i) Suponhamos que $G \not\cong K_n$. Do Teorema 3.4, $\lambda_2(G) \geq 0$. Além disso, como $G \not\cong nK_1$ tem-se $\overline{G} \not\cong K_n$. Portanto,

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \geq 0. \quad (6.6)$$

Para um inteiro $p \geq 2$, suponhamos que $G \simeq CS(n, p)$. Como $CS(n, p)$ é isomorfo a $K_{1, \dots, 1, p}$, do Teorema 3.4, $\lambda_2(G) = 0$. Desde que

$$P_{\overline{G}}(x) = x^{n-p}(x+1)^{p-1}(x-p+1),$$

segue-se que $\lambda_2(\overline{G}) = 0$. Assim, $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que G é um grafo sem vértices isolados e que $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) = 0$. Desde que $G \not\cong K_n$ e possui ao menos uma aresta, segue de (6.6) que $\lambda_2(G) = \lambda_2(\overline{G}) = 0$. Como G não tem vértices isolados, do Teorema 3.4, existem inteiros p_1, p_2, \dots, p_k tais que $1 \leq p_1 \leq \dots \leq p_k$ e $p_k > 1$ de modo que $G \simeq K_{p_1, \dots, p_k}$. Consequentemente, $\overline{G} \simeq K_{p_1} \cup \dots \cup K_{p_k}$, e $\lambda_2(\overline{G}) = p_{k-1} - 1$. Contudo, $\lambda_2(\overline{G}) = 0$ e assim, $p_{k-1} = 1$. Logo, $p_1 = p_2 = \dots = p_{k-1} = 1$ e, portanto, $G \simeq CS(n, p_k)$. O que conclui a afirmação (i).

(ii) Se G é um grafo tal que $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) = -1$ então, da afirmação (i), $G \simeq K_n$. A recíproca é imediata visto que $\lambda_2(K_n) = -1$ e $\lambda_2(\overline{K}_n) = 0$. Logo a afirmação (ii) está provada.

(iii) Decorre imediatamente dos itens (i) e (ii). □

Seja $r \approx 0.3111$ a segunda menor raiz do polinômio $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$. A Proposição 6.10 mostra que não existe grafo G tal que $0 < \lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) < r$.

Proposição 6.10 *Sejam G um grafo de ordem $n \geq 4$ e sem vértices isolados. Se para $p \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, $G \not\cong K_n$ e $G \not\cong CS(n, p)$ então $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \geq r$. A igualdade vale se e somente se $G \simeq K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$.*

Demonstração. Seja G um grafo de ordem $n \geq 4$ e sem vértices isolados. Do Lema 5.2 e do Teorema 5.3, $H \simeq K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$ é o único grafo sem vértices isolados para o qual $\lambda_2(H) = r$. Como $\overline{H} \simeq K_1 \cup K_{1,2}$ tem-se $\lambda_2(\overline{H}) = 0$. Logo, $\lambda_2(H) + \lambda_2(\overline{H}) = r$. Dos Corolários 5.4 e 5.5 chega-se a

$$r \leq \lambda_2(G) \leq \lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}).$$

□

Daqui em diante, voltaremos nossa atenção à determinação de uma cota superior para a soma $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G})$. O Teorema 6.11 apresenta um refinamento para a cota estabelecida em (6.5).

Teorema 6.11 *Se G é um grafo de ordem n então*

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}}.$$

Demonstração. Seja G um grafo de ordem n . Da Proposição 2.8, obtém-se $\sum_{i=1}^n (\lambda_i^2(G) + \lambda_i^2(\overline{G})) = n(n-1)$, ou seja,

$$\lambda_1^2(G) + \lambda_1^2(\overline{G}) + \sum_{i=2}^n (\lambda_i^2(G) + \lambda_{n-i+2}^2(\overline{G})) = n^2 - n.$$

A cota inferior do Teorema 6.2 implica em

$$\lambda_1^2(G) + \lambda_1^2(\overline{G}) \geq \frac{(\lambda_1(G) + \lambda_1(\overline{G}))^2}{2} \geq \frac{(n-1)^2}{2}.$$

Assim,

$$\sum_{i=2}^n (\lambda_i^2(G) + \lambda_{n-i+2}^2(\overline{G})) \leq \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}. \quad (6.7)$$

Além disso, para cada $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, da Proposição 2.25 tem-se

$$\lambda_i(G) + \lambda_{n-i+2}(\overline{G}) \leq -1. \quad (6.8)$$

Consequentemente,

$$\sum_{i=3}^{n-1} (\lambda_i^2(G) + \lambda_{n-i+2}^2(\overline{G})) \geq \sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{2} |\lambda_i(G) + \lambda_{n-i+2}(\overline{G})|^2 \geq \sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{n-3}{2},$$

e, da desigualdade (6.7), obtemos

$$\lambda_2^2(G) + \lambda_n^2(\overline{G}) + \lambda_2^2(\overline{G}) + \lambda_n^2(G) \leq \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1. \quad (6.9)$$

Por outro lado, da desigualdade (6.8), $-\lambda_n(\overline{G}) \geq \lambda_2(G) + 1$. Como $\lambda_2(G) \geq 0$, segue que

$$\lambda_n^2(\overline{G}) \geq (\lambda_2(G) + 1)^2. \quad (6.10)$$

Analogamente, chega-se a

$$\lambda_n^2(G) \geq (\lambda_2(\overline{G}) + 1)^2. \quad (6.11)$$

Combinando as desigualdades (6.9), (6.10) e (6.11) tem-se

$$\lambda_2^2(G) + (\lambda_2(G) + 1)^2 + \lambda_2^2(\overline{G}) + (\lambda_2(\overline{G}) + 1)^2 \leq \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1.$$

Logo,

$$2(\lambda_2^2(G) + \lambda_2^2(\overline{G})) + 2(\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G})) \leq \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 1.$$

Essa última desigualdade implica em

$$(\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}))^2 + 2(\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G})) - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1 \leq 0. \quad (6.12)$$

O intervalo fechado $\left[-1 - \sqrt{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}}, -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}}\right]$ corresponde ao conjunto solução da inequação quadrática (6.12). Portanto,

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}}.$$

□

Com o auxílio do AGX (*software* descrito em [109]) verificamos que a cota superior dada no Teorema 6.11 não é ótima. Em vista disso, propusemos uma pequena

melhoria para essa cota, isto é, para um grafo G de ordem n ,

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}, \quad (6.13)$$

a qual nos reportamos como cota NG_2 .

6.3 Grafos que verificam a cota NG_2

Nesta seção provamos que há várias classes de grafos tais que seus respectivos grafos satisfazem a cota NG_2 . Dentre tais classes estão todos os grafos com cintura ao menos 5, as árvores, os grafos unicyclicos e os grafos multipartidos completos. Da Proposição 6.9, segue que a cota NG_2 , dada em (6.13), é verdadeira para os grafos completos de ordem $n \geq 2$ e para os grafos split completos de ordem $n \geq 3$. A Proposição 6.12 generaliza este resultado mostrando que qualquer grafo multipartido completo também satisfaz tal resultado.

Proposição 6.12 *Seja G um grafo k -partido completo de ordem $n \geq 3$. Se $2 \leq k \leq n - 1$ então*

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) < -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

Demonstração. Primeiramente, note que para todo $n \geq 3$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{4} &= \frac{n^2}{2} - n + 1 - \frac{1}{4}(n-2)^2 \\ &< \frac{n^2}{2} - n + 1. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Para $2 \leq k \leq n - 1$, seja G um grafo k -partido completo de ordem $n \geq 3$. Do Teorema 3.4, $\lambda_2(G) = 0$. Logo, para $n \geq 3$, do Teorema 3.6 e da desigualdade (6.14), obtém-se

$$\begin{aligned} \lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) &\leq -1 + \frac{n}{2} \\ &< -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}. \end{aligned}$$

□

O Teorema 6.13 mostra que a cota NG_2 se verifica para a classe das árvores e, tal cota é atingida para a árvore P_4 .

Teorema 6.13 *Se T é uma árvore de ordem $n \geq 2$ então*

$$\lambda_2(T) + \lambda_2(\bar{T}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

A igualdade é verdadeira se e somente se $T \simeq P_4$.

Demonstração. Seja T uma árvore de ordem n . Usando as tabelas de árvores explicitamente expostas em [110], verifica-se o teorema para os casos em que $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Suponhamos que $n \geq 7$. Da Proposição 2.25 e do Teorema 2.23, segue que

$$\begin{aligned} \lambda_2(\bar{T}) &\leq -1 - \lambda_n(T) = -1 + \lambda_1(T) \\ &\leq -1 + \sqrt{n-1}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Do Teorema 3.16 e da desigualdade (6.15), chega-se a

$$\begin{aligned} \lambda_2(T) + \lambda_2(\bar{T}) &\leq -1 + \sqrt{\frac{n}{2} - 1} + \sqrt{n-1} \\ &\leq -1 + \sqrt{2\left(\frac{n}{2} - 1 + n - 1\right)} = -1 + \sqrt{3n-4}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Para $n \geq 7$,

$$\begin{aligned} 3n-4 &= \left(\frac{n^2}{2} - n + 1\right) - \left(\frac{n^2}{2} - 4n + 5\right) \\ &= \left(\frac{n^2}{2} - n + 1\right) - \frac{1}{2}(n-4+\sqrt{6})(n-4-\sqrt{6}) \\ &< \frac{n^2}{2} - n + 1, \end{aligned} \tag{6.17}$$

Portanto, o resultado decorre das desigualdades (6.16) e (6.17).

Se $T \simeq P_4$ tem-se $\lambda_2(P_4) = \lambda_2(\bar{P}_4) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Assim,

$$\lambda_2(P_4) + \lambda_2(\bar{P}_4) = -1 + \sqrt{5} = -1 + \sqrt{\frac{4^2}{2} - 4 + 1}.$$

Reciprocamente, seja T uma árvore de ordem n tal que

$$\lambda_2(T) + \lambda_2(\bar{T}) = -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

Da equação (6.17) tem-se $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e, de acordo com [110], existem 13 árvores

não isomorfas para tais valores de n . Dentre estas, a única que verifica a hipótese é a árvore P_4 . □

A Proposição 6.14 fornece um critério, em função do índice do grafo, para que os grafos de uma determinada classe satisfaçam a cota NG_2 .

Proposição 6.14 *Seja G um grafo de ordem n . Se $\lambda_1(G) \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}$ então*

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

Demonstração. Seja G um grafo de ordem n tal que $\lambda_1(G) \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}$. Do Teorema 2.11,

$$\begin{aligned} \lambda_2(\overline{G}) &\leq -1 - \lambda_n(G) \\ &\leq -1 + \lambda_1(G) \\ &\leq -1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) &\leq -1 + 2\lambda_1(G) \\ &\leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}. \end{aligned}$$

□

A Proposição 6.15 assegura que os grafos unicyclicos também verificam a cota NG_2 .

Proposição 6.15 *Se G é um grafo unicyclico de ordem n então*

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

Demonstração. Usando as tabelas de grafos unicyclicos de ordens de 3 a 9, descritas em [110], verifica-se que o resultado é válido para $3 \leq n \leq 9$.

Seja G um grafo unicyclico de ordem $n \geq 10$. Note que, para $n \geq 10$,

$$\begin{aligned}
4n &= \left(\frac{n^2}{2} - n + 1 \right) - \left(\frac{n^2}{2} - 5n + 1 \right) \\
&= \frac{n^2}{2} - n + 1 - \frac{1}{2}(n - 5 + \sqrt{23})(n - 5 - \sqrt{23}) \\
&< \frac{n^2}{2} - n + 1
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Da Proposição 2.24 e da desigualdade (6.18), chega-se a

$$\begin{aligned}
\lambda_1(G) &\leq \sqrt{n} \\
&< \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}
\end{aligned}$$

Da Proposição 6.14, obtemos a desigualdade desejada. \square

A Proposição 6.15 produz uma infinidade de exemplos de grafos, com cintura ao menos 3, que verificam a cota NG_2 . O Teorema 6.16 generaliza esse resultado para o caso dos grafos com cintura ao menos 5.

Teorema 6.16 *Seja G um grafo de ordem $n \geq 5$. Se G tem cintura $g \geq 5$ então*

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

Demonstração. Seja G um grafo com $n \geq 5$ vértices e cintura $g \geq 5$. A demonstração será feita em duas partes.

Parte 1: Suponha que o grafo G possua ordem e cintura no intervalo $[5, 8]$.

Existem 26 grafos não isomorfos tais que $n, g \in \{5, 6, 7, 8\}$. Tais grafos estão ilustrados na Figura 6.1 e são todos unicíclicos. Assim, da Proposição 6.15, o teorema se verifica.

Parte 2: Suponha que o grafo G possua ordem $n \geq 9$ e cintura $g \geq 5$.

Para $n \geq 9$, tem-se

$$\begin{aligned}
4(n-1) &= \left(\frac{n^2}{2} - n + 1 \right) - \left(\frac{n^2}{2} - 5n + 5 \right) \\
&= \frac{n^2}{2} - n + 1 - \frac{1}{2}(n - 5 + \sqrt{15})(n - 5 - \sqrt{15}) \\
&< \frac{n^2}{2} - n + 1.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Da Proposição 2.21 e da desigualdade (6.19) segue que

$$\begin{aligned}\lambda_1(G) &\leq \sqrt{n-1} \\ &< \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n^2}{2}-n+1}.\end{aligned}$$

Da Proposição 6.14,

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) < -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2}-n+1}.$$

Portanto, o teorema é verdadeiro para todo grafo de ordem $n \geq 9$ e cintura $g \geq 5$. □

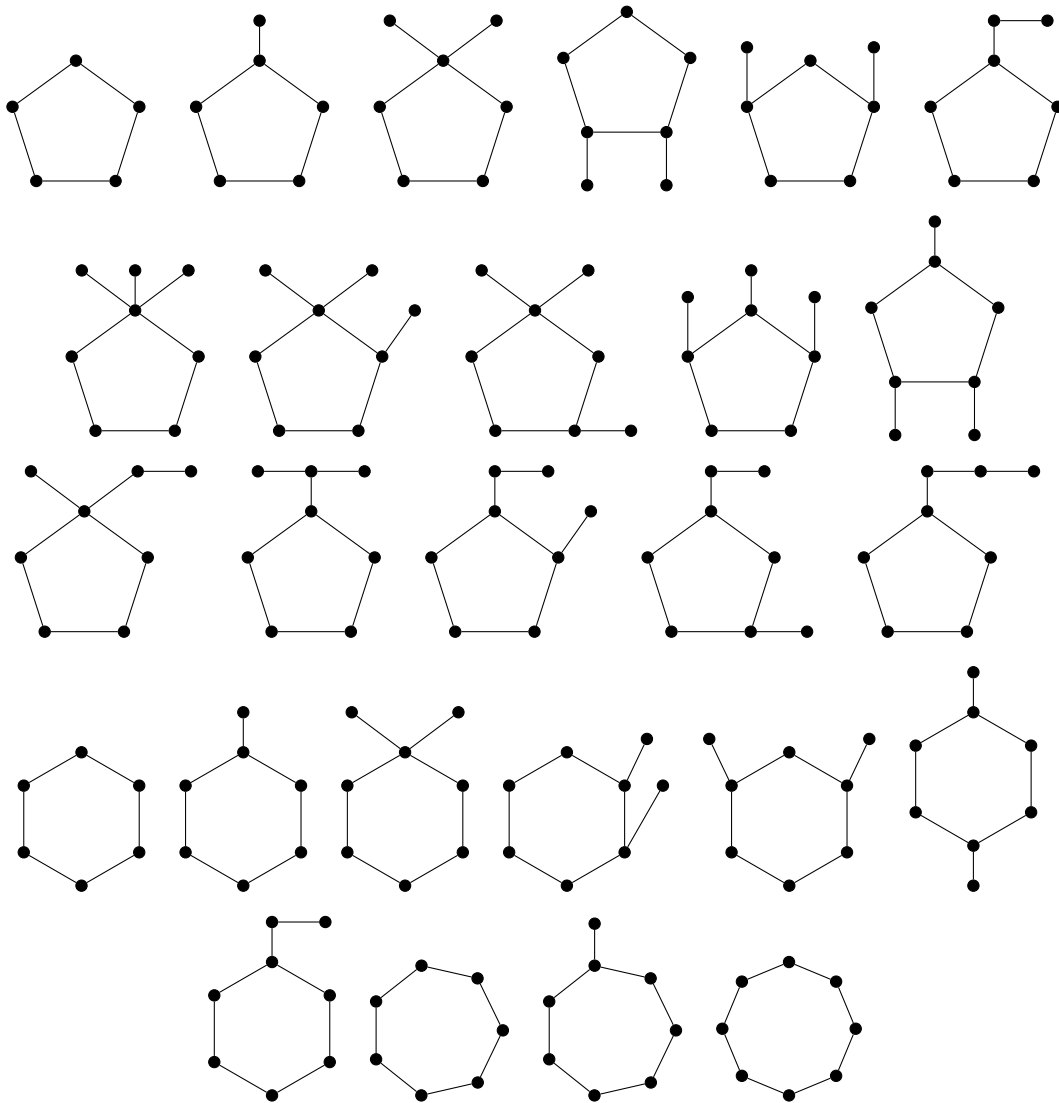


Figura 6.1: Grafos com ordem e cintura no intervalo $[5, 8]$.

A Proposição a seguir fornece outros exemplos de grafos com cintura 3 ou 4 que verificam a conta NG_2 .

Proposição 6.17 *Dado um inteiro $k \geq 1$, seja G um grafo k -cíclico de ordem n . Se $n \geq 5 + \sqrt{16k + 31}$ então*

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

Demonstração. Seja G um grafo k -cíclico de ordem n e tamanho m . Como $m = n + k$, do Teorema 2.22 obtém-se

$$\lambda_1(G) \leq \sqrt{n + 2k + 1}. \quad (6.20)$$

Além disso, para todo $n \geq 5 + \sqrt{16k + 31}$

$$\begin{aligned} 4(n + 2k + 1) &= \frac{n^2}{2} - n + 1 + \left(-\frac{n^2}{2} + 5n + 8k + 3\right) \\ &\leq \frac{n^2}{2} - n + 1. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Das desigualdades (6.20) e (6.21), para todo $n \geq 5 + \sqrt{16k + 31}$

$$\lambda_1(G) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

Logo, da Proposição 6.14 obtém-se a desigualdade desejada. □

A Proposição 6.18 mostra que os grafos bipartidos r -regulares conexos também satisfazem a cota NG_2 . Além disso, tal resultado exhibe outros grafos de cintura 4 que verificam tal cota.

Proposição 6.18 *Se G é um grafo conexo bipartido r -regular de ordem n então*

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) < -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

Demonstração. Seja G um grafo conexo bipartido r -regular de ordem n . Do Teorema 3.14,

$$\lambda_2(G) \leq \frac{n}{2} - r. \quad (6.22)$$

Sendo G um grafo bipartido r -regular, dos Teoremas 2.13 e 2.14 obtém-se

$$\lambda_2(\overline{G}) = -1 - \lambda_n(G) = r - 1. \quad (6.23)$$

Das desigualdades (6.22) e (6.23),

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \frac{n}{2}. \quad (6.24)$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{4} &= \frac{n^2}{2} - n + 1 - \frac{1}{4}(n-2)^2 \\ &\leq \frac{n^2}{2} - n + 1. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Conseqüentemente, das desigualdades (6.24) e (6.25), obtém-se o resultado. \square

Como discutido no Capítulo 3, grafos em que $\lambda_2 \leq 1$ foram investigados em vários artigos. O Teorema 6.19 assegura que todos os grafos com tal propriedade satisfazem a cota NG_2 e, portanto, fornece outros exemplos de grafos com cintura 3 ou 4 que satisfazem tal cota.

Teorema 6.19 *Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Se $\min \{ \lambda_2(G), \lambda_2(\overline{G}) \} \leq 1$ então*

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

Demonstração. Usando as tabelas de grafos de ordens de 2 a 7, dadas na referência [110], verifica-se que o resultado é verdadeiro para $2 \leq n \leq 7$.

Suponhamos que G é um grafo de ordem $n \geq 8$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 &= \frac{n^2}{2} - n + 1 - \frac{n}{4}(n-8) \\ &\leq \frac{n^2}{2} - n + 1. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\lambda_2(G) \leq 1$. Do Teorema 3.6 e da desigualdade (6.26), chega-se a

$$\begin{aligned} \lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) &\leq -1 + \left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &\leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}, \end{aligned}$$

e, a demonstração está completa. \square

Como aplicação do Teorema 6.19, o resultados que segue mostra que os grafos pertinentes às classes dos grafos linha generalizados e dos grafos excepcionais também satisfazem a cota NG_2 .

Proposição 6.20 *Se G é um grafo de ordem n tal que $\lambda_n(G) \geq -2$, então*

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

Demonstração. Seja G um grafo de ordem n tal que $\lambda_n(G) \geq -2$. Do Teorema 4.2, $\lambda_2(\overline{G}) \leq 1$. O resultado então segue do Teorema 6.19. □

Recentemente, LIMA *et al.* [47] determinaram de modo explícito todos os grafos conexos não bipartidos cujos autovalores, exceto o menor e o maior, estão no intervalo $[-1, 1]$. Em particular, esse artigo fornece exemplos de grafos com cinturas 3 ou 4 em que $\lambda_n < -2$ e que, de acordo com o Teorema 6.19, também satisfazem a cota NG_2 .

6.4 Grafos extremais para a cota NG_2

Nesta seção estudamos uma classe de grafos com cintura 3, definida em NIKIFOROV [72], cujos grafos satisfazem a cota NG_2 . Contudo, a definição que aqui apresentamos, para essa mesma classe de grafos, parece mais natural quando utilizada a operação H -junção. Os primeiros resultados desta seção correspondem ao estudo do espectro dessa família, além da determinação de cotas inferior e superior para o segundo maior autovalor dos grafos desta classe. A partir daí, respondemos o problema proposto por CVETKOVIĆ [26] e caracterizamos explicitamente todos os grafos dessa classe em que o segundo maior autovalor não excede 1.

Seja $H \simeq P_4$ e sejam dados os números naturais p e q . Definimos os seguintes grafos

$$H_{p,q,q,p} \simeq P_4[K_p, \overline{K}_q, \overline{K}_q, K_p]$$

e

$$H_{p,q,q,p+1} \simeq P_4[K_p, \overline{K}_q, \overline{K}_q, K_{p+1}],$$

cujas ordens são $n = 2(p + q)$ e $n = 2(p + q) + 1$. Consideremos a seguinte classe de grafos

$$\mathcal{H}(P_4) = \{H_{p,q,q,p}, H_{p,q,q,p+1} : p, q \in \mathbb{N}\}.$$

A Figura 6.2 ilustra $H_{2,5,5,2}$ e $H_{2,4,4,3}$, grafos em $\mathcal{H}(P_4)$.

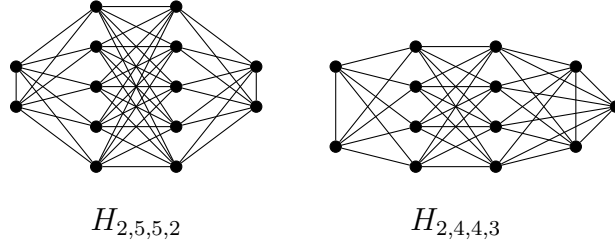


Figura 6.2: Grafos em $\mathcal{H}(P_4)$.

Note que, para n é par, a operação complementar de grafos é fechada na classe $\mathcal{H}(P_4)$. No entanto, isto não é verdade quando n é ímpar. Com efeito,

$$\overline{H_{p,q,q,p}} \simeq \overline{P_4[K_p, \overline{K_q}, \overline{K_q}, K_p]} \simeq P_4[K_q, \overline{K_p}, \overline{K_p}, K_q] \simeq H_{q,p,p,q} \in \mathcal{H}(P_4) \quad (6.27)$$

e

$$\overline{H_{p,q,q,p+1}} \simeq \overline{P_4[K_p, \overline{K_q}, \overline{K_q}, K_{p+1}]} \simeq P_4[K_q, \overline{K_p}, \overline{K_{p+1}}, K_q] \notin \mathcal{H}(P_4).$$

Em vista disso, denotemos por \mathcal{H}' o subconjunto de $\mathcal{H}(P_4)$ constituído pelos grafos de ordem par. A Figura 6.3 exhibe um par de grafos complementares em \mathcal{H}' .

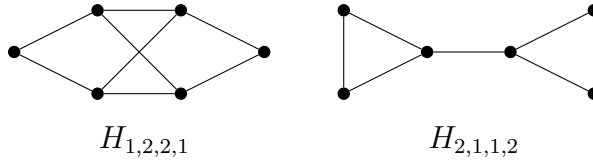


Figura 6.3: Par de grafos complementares em \mathcal{H}' .

Note ainda que, os grafos de ordem ímpar em $\mathcal{H}(P_4)$ são subgrafos induzidos de grafos em \mathcal{H}' . De fato, dados os naturais p e q , o conjunto obtido pela remoção de um vértice de grau $p + q - 1$ do grafo $H_{p,q,q,p}$, induz o subgrafo $H_{p-1,q,q,p}$.

Logo, do Teorema 2.28, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tem-se

$$\lambda_{i+1}(H_{p,q,q,p}) \leq \lambda_i(H_{p-1,q,q,p}) \leq \lambda_i(H_{p,q,q,p}).$$

Isso significa que, para determinar cotas para o segundo maior autovalor da classe $\mathcal{H}(P_4)$, basta determinar cotas para grafos da classe \mathcal{H}' . A Proposição 6.21 explicita o polinômio característico de tais grafos.

Proposição 6.21 *Dados os números naturais p e q tais que $G \simeq H_{p,q,q,p}$ então $P_G(x) = x^{2(q-1)}(x+1)^{2(p-1)}f(x)$, onde*

$$f(x) = (x^2 - (p+q+1)x - q)(x^2 - (p-q-1)x - 2pq + q).$$

Demonstração. Fixados $p, q \in \mathbb{N}$, seja $G \simeq H_{p,q,q,p}$. Assim, seu conjunto de vértices pode ser particionado em duas células,

$$V_1 = \{v \in V; d(v) = p + q - 1\} \text{ e } V_2 = \{v \in V; d(v) = p + q\},$$

onde $|V_1| = 2p$ e $|V_2| = 2q$.

Da definição do grafo G , cada uma de suas células, V_1 e V_2 , podem ser particionadas em duas células disjuntas. Em cada partição da primeira, há p vértices gêmeos verdadeiros e, em cada partição da segunda, há q vértices gêmeos falsos. Das Proposições 2.26 e 2.27, temos $\lambda = -1$ e $\lambda = 0$ como autovalores de G com multiplicidades, no mínimo, $2(p - 1)$ e $2(q - 1)$, respectivamente.

Note que a matriz de adjacência de G pode ser escrita como,

$$A(G) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_p - I_p & J_{p \times q} & \mathbf{0}_{p \times q} & \mathbf{0}_p \\ \hline J_{q \times p} & \mathbf{0}_q & J_q & \mathbf{0}_{q \times p} \\ \hline \mathbf{0}_{q \times p} & J_q & \mathbf{0}_q & J_{q \times p} \\ \hline \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_{p \times q} & J_{p \times q} & J_p - I_p \end{array} \right].$$

Daí e da Proposição 2.9, chega-se a

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} p-1 & q & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & p-1 \end{bmatrix},$$

cujo polinômio característico é

$$f(x) = [x^2 - (p + q - 1)x - q] [x^2 - (p - q - 1)x - 2pq + q].$$

O polinômio característico de G segue da Proposição 2.9. □

Como consequência imediata da Proposição 6.21, obtemos o Corolário 6.22, que nos dá o espectro dos grafos em \mathcal{H}' .

Corolário 6.22 *Dados os números naturais p e q , sejam $r = p - q - 1$, $s^2 = q(q + 2p + 2) + (p - 1)^2$ e $t^2 = q(q + 6p - 2) + (p - 1)^2$. Se $G \simeq H_{p,q,q,p}$ então*

$$\text{Spec}(H_{p,q,q,p}) = \left\{ \frac{r-t}{2}, -1^{(2p-2)}, \frac{r+2q-s}{2}, 0^{(2q-2)}, \frac{r+t}{2}, \frac{r+2q+s}{2} \right\}.$$

Demonstração. O espectro de G segue da Proposição 6.21, incluídos aí os autovalores diferentes de -1 e 0 que são as raízes do polinômio $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, onde

$$f_1(x) = x^2 - (p + q - 1)x - q \text{ e } f_2(x) = x^2 - (p - q - 1)x - 2pq + q.$$

Para quaisquer $p, q \in \mathbb{N}$ tem-se $f_1(-1) = p$, $f_1(0) = -q$ e $f_1(p + q) = p$. Logo, as raízes do polinômio $f_1(x)$, x_1 e x_2 , satisfazem

$$x_1 = \frac{r + 2q - s}{2} \in (-1, 0) \text{ e } x_2 = \frac{r + 2q + s}{2} \in (0, p + q).$$

Analogamente, tem-se $f_2(-p - q) = p(2p - 1)$, $f_2(-1) = -p(2q - 1)$, $f_2(0) = -q(2p - 1)$ e $f_2(p + q) = 2q(q + 1) + p$, donde as raízes do polinômio $f_2(x)$, x_3 e x_4 , satisfazem

$$x_3 = \frac{r - t}{2} \in (-p - q, -1) \text{ e } x_4 = \frac{r + t}{2} \in (0, p + q).$$

Como $s - t = -\frac{4q(p - 1)}{s + t}$ e $s + t > 2(p - 1)$ tem-se

$$x_2 - x_4 = q + \frac{s - t}{2} = q \left(1 - \frac{2(p - 1)}{s + t} \right) > 0,$$

e o resultado segue. □

Para o grafo $H_{2,2,2,2}$, ilustrado na Figura 6.4, temos $p = q = 2$, $r = -1$, $s = \sqrt{17}$ e $t = 5$. Do Corolário 6.22,

$$\text{Spec}(H_{2,2,2,2}) = \left\{ -3, -1^{(2)}, \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, 0^{(2)}, 2, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right\}.$$

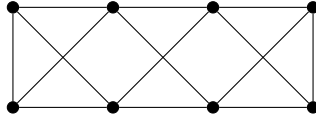


Figura 6.4: Grafo $H_{2,2,2,2}$.

O próximo resultado relaciona o segundo maior autovalor de cada grafo em \mathcal{H}' com o correspondente autovalor de seu grafo complementar.

Proposição 6.23 *Dados os naturais p e q tais que $G \simeq H_{p,q,q,p}$ tem-se*

$$\lambda_2(\overline{H_{p,q,q,p}}) = \lambda_2(H_{p,q,q,p}) + q - p.$$

Demonstração. De fato, seguindo as notações do Corolário 6.22, tem-se $\lambda_2(H_{p,q,q,p}) = \frac{r + t}{2}$. De (6.27), obtém-se

$$\lambda_2(\overline{H_{p,q,q,p}}) = \lambda_2(H_{q,p,p,q}) = \frac{r_1 + t_1}{2},$$

onde $r_1 = q - p - 1$ e $t_1^2 = p(p + 6q - 2) + (q - 1)^2$. Como $r_1 = r + 2(q - p)$ e $t_1 = t$, o resultado segue-se. □

Note que, para n par, o grafo complementar de $H_{1, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}-1, 1}$ é o grafo $H_{\frac{n}{2}-1, 1, 1, \frac{n}{2}-1} \simeq DK(\frac{n}{2}, 0)$. Logo, obtém-se uma cota superior para o segundo maior autovalor de um grafo conexo em função de $\lambda_2(H_{1, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}-1, 1})$, como exposto no Corolário 6.24.

Corolário 6.24 *Para n par e para todo grafo conexo G de ordem n tem-se*

$$\lambda_2(G) \leq \frac{n}{2} - 2 + \lambda_2(H_{1, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}-1, 1}).$$

Demonstração. Se G é um grafo conexo de ordem n , para n par, tem-se do Teorema 3.7 que $\lambda_2(G) \leq \lambda_2(DK(\frac{n}{2}, 0))$. O resultado segue da Proposição 6.23. □

Fixados um natural p e um número real $\epsilon > 0$, a Proposição 6.25 mostra que existe uma infinidade de grafos em \mathcal{H}' tal que $\lambda_2 \in (2p - 1 - \epsilon, 2p - 1)$.

Proposição 6.25 *Para cada número natural p fixado, a sequência $(z_t)_{t \in \mathbb{N}}$, dada por $z_t = \lambda_2(H_{p, p+t-1, p+t-1, p})$, é crescente e converge para $2p - 1$. Além disso, para $t \geq 1$, $z_t < 2p - 1$.*

Demonstração. Seja f a função definida para todo $x \geq -4p + 2 + 2\sqrt{p(2p - 1)}$ e dada por

$$f(x) = \frac{-x + \sqrt{(x + 4p - 2)^2 - 4p(2p - 1)}}{2}.$$

Sua função derivada é

$$f'(x) = \frac{x + 4p - 2 - \sqrt{(x + 4p - 2)^2 - 4p(2p - 1)}}{2\sqrt{(x + 4p - 2)^2 - 4p(2p - 1)}}.$$

Como $(x + 4p - 2)^2 - 4p(2p - 1) < (x + 4p - 2)^2$ tem-se $f'(x) > 0$ para todo $x > -4p + 2 + 2\sqrt{p(2p - 1)}$. Consequentemente, f é uma função crescente.

Do Corolário 6.22, para todo $t \geq 1$, tem-se

$$z_t = f(t) < f(t + 1) = z_{t+1}.$$

Portanto z_t é uma sequência crescente. Além disso,

$$\begin{aligned}\lambda_2(H_{p,p+t-1,p+t-1,p}) &= \frac{-t + \sqrt{t^2 + 8pt - 4t + 8p^2 - 12p + 4}}{2} \\ &= \frac{4p - 2 + \frac{4p^2}{t} - \frac{6p}{t} + \frac{2}{t}}{1 + \sqrt{1 + \frac{8p}{t} - \frac{4}{t} + \frac{8p^2}{t^2} - \frac{12p}{t^2} + \frac{4}{t^2}}}.\end{aligned}$$

Daí, obtém-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_2(H_{p,p+t-1,p+t-1,p}) = 2p - 1.$$

Finalmente, suponha que exista $t \geq 1$ satisfazendo $z_t = 2p - 1$. Daí,

$$(t + 4p - 2)^2 - 4p(2p - 1) = (t + 4p - 2)^2 \Leftrightarrow 4p(2p - 1) = 0.$$

Logo $p = 0$ ou $p = \frac{1}{2}$, contradizendo a condição $p \geq 1$. Portanto, para $t \geq 1$, $z_t < 2p - 1$. □

Para cada $p \geq 1$ fixado, o Corolário 6.26 explicita cotas inferior e superior para os grafos em \mathcal{H}' .

Corolário 6.26 *Fixado $p \geq 1$ tem-se que, para todo $q \geq p$,*

$$\frac{-1 + \sqrt{4p(2p - 1) + 1}}{2} \leq \lambda_2(H_{p,q,q,p}) < 2p - 1.$$

Demonstração. A cota inferior segue do Corolário 6.22 fazendo $p = q$ e a cota superior segue da Proposição 6.25 ao escolher $q = p + t - 1$. □

O Corolário 6.27 caracteriza os grafos em \mathcal{H}' para os quais se tem $\lambda_2 < 1$. Além disso, ele assegura que $H_{p,q,q,p}$ não é um σ -grafo, salvo quando $p = q = 1$, caso em que $H_{1,1,1,1} \simeq P_4$.

Corolário 6.27 *Dado que $\sigma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, para cada natural $q \geq 1$ tem-se:*

- (i) $\sigma \leq \lambda_2(H_{1,q,q,1}) < 1$;
- (ii) $\lambda_2(H_{p,q,q,p}) \geq 2$ se e somente se $p \geq 2$.

Demonstração. Para $p = 1$, as cotas inferior e superior seguem do Corolário 6.26.

Suponhamos $\lambda_2(H_{p,q,q,p}) \geq 2$. Do Corolário 6.26, tem-se $2 < 2p - 1$, donde $p \geq 2$. A recíproca segue também imediatamente do Corolário 6.26. □

Para $G \simeq H_{p,q,q,p}$, o Teorema 6.28 fornece o valor de $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G})$ e os valores de p e q para que tal soma seja máxima.

Teorema 6.28 *Sejam p e q inteiros tais que $G \simeq H_{p,q,q,p}$, então*

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) = -1 + \sqrt{(q + 6p - 2)q + (p - 1)^2}.$$

Além disso, tal soma é máxima quando $p = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ e $q = \lceil \frac{n}{4} \rceil$.

Demonstração. A igualdade segue do Corolário 6.22 e da Proposição 6.23.

Sendo $n = 2(p + q)$ temos

$$\begin{aligned} \lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) &= -1 + \sqrt{(q + 6p - 2)q + (p - 1)^2} \\ &= -1 + \sqrt{\left(\frac{n}{2} - p + 6p - 2\right)\left(\frac{n}{2} - p\right) + (p - 1)^2} \\ &= -1 + \frac{\sqrt{-16p^2 + 8np + (n - 2)^2}}{2}. \end{aligned}$$

Seja $\alpha = \sqrt{2}\sqrt{(n - 1)^2 + 1} > 0$ e considere a função $h : \left[\frac{n - \alpha}{4}, \frac{n + \alpha}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = -1 + \frac{\sqrt{-16x^2 + 8nx + (n - 2)^2}}{2}$.

Como h é contínua em $\left[\frac{n - \alpha}{4}, \frac{n + \alpha}{4}\right]$ e diferenciável em $\left(\frac{n - \alpha}{4}, \frac{n + \alpha}{4}\right)$ segue que h admite um máximo e um mínimo. A função derivada de h é dada por $h'(x) = \frac{2(n - 4x)}{\sqrt{-16x^2 + 8nx + (n - 2)^2}}$. Assim, $x_1 = \frac{n - \alpha}{4}$, $x_2 = \frac{n + \alpha}{4}$ e $x_3 = \frac{n}{4}$ são os pontos críticos de h .

Como $h\left(\frac{n - \alpha}{4}\right) = h\left(\frac{n + \alpha}{4}\right) = -1$ e $h\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{\alpha}{2} - 1 > 0$, segue que h admite valor máximo em $x = \frac{n}{4}$. Além disso, como p é um número inteiro positivo, então $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G})$ atinge o valor máximo quando $p = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$. Conseqüentemente, $q = \lceil \frac{n}{4} \rceil$. □

O Corolário 6.29 mostra que os grafos em \mathcal{H}' satisfazem a cota NG_2 e que essa mesma classe contém uma subclasse de grafos que é extremal para essa cota.

Corolário 6.29 *Dados $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $n = 2(p + q)$ tem-se*

$$\lambda_2(H_{p,q,q,p}) + \lambda_2(\overline{H_{p,q,q,p}}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

Além disso, se $n \equiv 0 \pmod{4}$ então $G \simeq H_{\frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4}}$ é extremal para a cota NG_2 .

Demonstração. Sejam $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $n = 2(p + q)$. Se $n \equiv 0 \pmod{4}$ e

$G \simeq H_{\frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4}}$, da Proposição 6.23, $\lambda_2(\overline{G}) = \lambda_2(G)$. Do Corolário 6.22, tem-se

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) = 2\lambda_2(G) = -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1},$$

e da Proposição 6.28,

$$\lambda_2(H_{p,q,q,p}) + \lambda_2(\overline{H_{p,q,q,p}}) \leq \lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

□

Do Teorema 2.1, se G é um grafo de ordem $n \geq 6$ então G ou \overline{G} tem cintura 3. Em vista disso, os grafos complementares daqueles grafos discutidos nos Teoremas 6.13 e 6.16 constituem classes infinitas de grafos com cintura 3 para os quais a cota NG_2 se verifica. Esse fato e os resultados desse capítulo nos motivam a proposição da seguinte conjectura.

Conjectura 6.30 *Se G é um grafo de ordem n então*

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}.$$

Além disso, vale a igualdade se e somente se $G \simeq H_{\frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4}}$ e $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Capítulo 7

Grafos com todos os autovalores, exceto os extremais em $[-2, 0]$

Existem vários artigos na literatura que investigam grafos em que parte do espectro está contido em um certo intervalo real. Nos Capítulos 3 e 5 apresentamos classes de grafos em que, para todo grafo da classe, seu segundo maior autovalor pertence ao intervalo $[-1, 1]$. Em 1982, TORGASEV [111] determinou todos os grafos conexos em que o segundo menor autovalor pertence ao intervalo $(-1, 0]$. Em 1991, PETROVIĆ [27] generalizou este resultado caracterizando todos os grafos que possuem exatamente um autovalor menor que -1 . Em 2015, CIOABĂ *et al.* [46] caracterizaram os grafos cujos espectros contém exatamente dois autovalores diferentes de ± 1 . Em 2016, LIMA *et al.* [47] determinaram todos os grafos não bipartidos de ordem n com exatamente dois autovalores não pertencentes ao intervalo $[-1, 1]$ e, em 2016, CIOABĂ *et al.* [48] determinaram todos os grafos que têm no máximo dois autovalores diferentes de -2 ou 0 . Neste capítulo, apresentamos nossas contribuições nessa linha, determinando todos os grafos de ordem n com exatamente dois autovalores não pertencentes ao intervalo $[-2, 0]$.

7.1 Resultados da literatura

Nesta seção revisamos os principais resultados encontrados em [46], [47] e [48]. Embora não tenhamos apresentado suas demonstrações, descrevemos e ilustramos tais grafos com explicações dos referidos resultados.

Denominamos *autovalores extremais* de G o maior e o menor de seus autovalores, ou seja, λ_1 e λ_n . Os demais autovalores são ditos *não extremais*.

Um grafo é denominado *esporádico* se ele não pertence a uma classe infinita de grafos com uma determinada propriedade.

Como dito anteriormente, CIOABĂ *et al.* [46] determinaram de modo ex-

plícito todos os grafos de ordem n cujos autovalores, exceto os extremais, são iguais a ± 1 . Para descrever tais grafos, necessitamos da definição da seguinte classe de grafos regulares: dado um inteiro $r \geq 1$, sejam os conjuntos disjuntos $V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ e $V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$. Denotemos por L_r o grafo bipartido $(r-1)$ -regular em que $V(L_r) = V_1 \cup V_2$ e $E(L_r) = \{\{u_i, v_j\}; i \neq j \wedge 1 \leq i, j \leq r\}$. A Figura 7.1 exibe os grafos L_3 e L_4 .

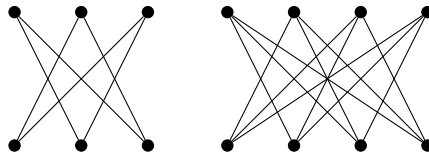


Figura 7.1: Grafos L_3 e L_4 .

Dados os inteiros positivos r e ℓ , consideremos a seguinte classe de grafos

$$\mathcal{L} = \{L_r, K_\ell \vee (r-1)K_2, (\ell+1)K_2 \vee (r-1)K_2; \ell \geq 1 \wedge r \geq 3\}.$$

Seja G_i , $1 \leq i \leq 7$, um grafo da Figura 7.2.

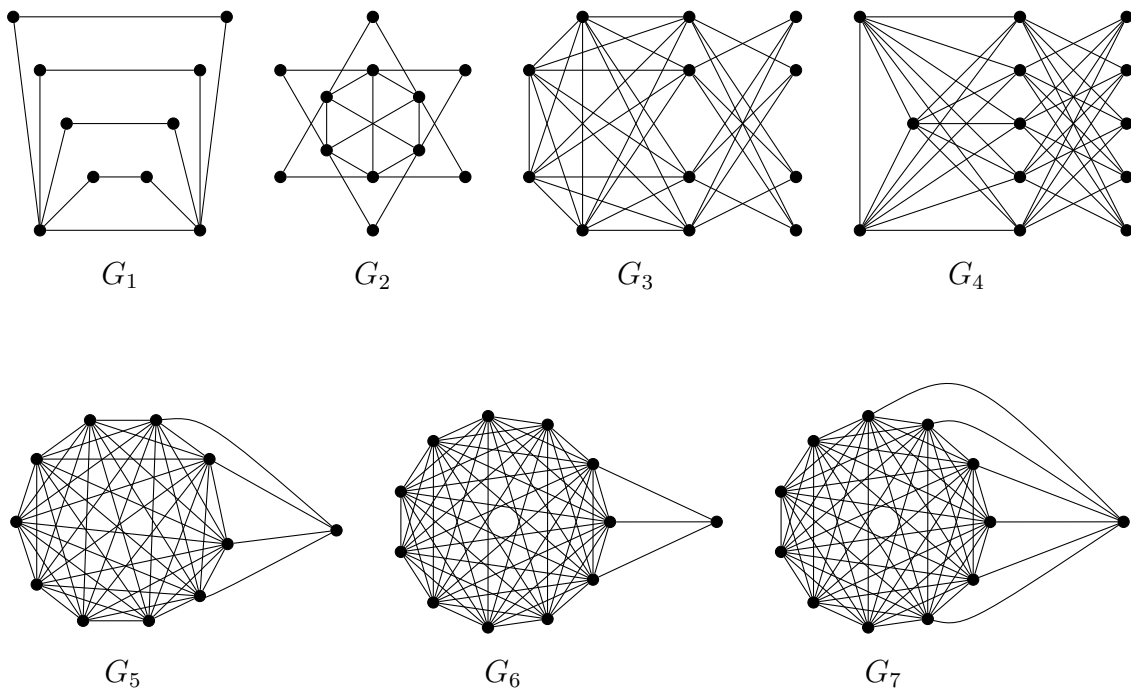


Figura 7.2: Grafos com dois autovalores diferentes de ± 1 .

Em 2015, CIOABĂ *et al.* [46] caracterizaram todos os grafos cujos autovalores, exceto os extremais, são todos iguais a 1 ou -1 . O Teorema 7.1 descreve tal caracterização.

Teorema 7.1 (CIOABĂ *et al.* [46]) *Se G é um grafo conexo cujos autovalores, exceto os extremais, são todos iguais a 1 ou -1 então $G \in \mathcal{L}$ ou G é isomorfo a um dos grafos esporádicos G_i , $1 \leq i \leq 7$, ilustrados na Figura 7.2. Além disso, os espectros de tais grafos foram determinados como exibidos a seguir,*

- (i) $\text{Spec}(L_r) = \{1 - r, -1^{(r-1)}, 1^{(r-1)}, r - 1\}$;
- (ii) $\text{Spec}(K_\ell \vee (r - 1)K_2) = \left\{ \frac{1}{2}(\ell - \sqrt{x_1}), -1^{(\ell+r-2)}, 1^{(r-2)}, \frac{1}{2}(\ell + \sqrt{x_1}) \right\}$, onde $x_1 = \ell^2 + 8\ell r - 12\ell + 4$;
- (iii) $\text{Spec}((\ell + 1)K_2 \vee (r - 1)K_2) = \{1 - 2\sqrt{x_2}, -1^{(\ell+r)}, 1^{(\ell+r-2)}, 1 + 2\sqrt{x_2}\}$, onde $x_2 = (\ell + 1)(r - 1)$;
- (iv) $\text{Spec}(G_1) = \{-3, -1^{(4)}, 1^{(4)}, 3\}$;
- (v) $\text{Spec}(G_2) = \{-4, -1^{(5)}, 1^{(5)}, 4\}$;
- (vi) $\text{Spec}(G_3) = \{1 - 2\sqrt{7}, -1^{(6)}, 1^{(4)}, 1 + 2\sqrt{7}\}$;
- (vii) $\text{Spec}(G_4) = \left\{ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{129}), -1^{(5)}, 1^{(5)}, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{129}) \right\}$;
- (viii) $\text{Spec}(G_5) = \left\{ \frac{1}{2}(7 - \sqrt{129}), -1^{(8)}, 1, \frac{1}{2}(7 + \sqrt{129}) \right\}$;
- (ix) $\text{Spec}(G_6) = \{4 - \sqrt{37}, -1^{(9)}, 1, 4 + \sqrt{37}\}$;
- (x) $\text{Spec}(G_7) = \{4 - 2\sqrt{10}, -1^{(9)}, 1, 4 + 2\sqrt{10}\}$.

Em 2016, LIMA *et al.* [47] generalizaram o Teorema 7.1 ao determinar implicitamente todos os grafos não bipartidos conexos de ordem n cujos autovalores, exceto os extremais, pertencem ao intervalo $[-1, 1]$. Neste artigo os autores definiram seis classes infinitas de grafos que contêm todos os grafos com a propriedade desejada.

Neste mesmo ano, CIOABĂ *et al.* [48] determinaram de modo explícito todos os grafos que têm todos os autovalores, exceto no máximo dois deles, iguais a -2 e 0 . Para enunciarmos tal resultado precisamos definir classes de grafos como seguem.

Dado um inteiro $p \geq 1$, sejam os conjuntos disjuntos $V_1 = \{v_i; 1 \leq i \leq p\}$ e $V_2 = \{u_j; 1 \leq j \leq p\}$. Denotemos por Γ_p o grafo p -regular de ordem $2p$ tal que $V(\Gamma_p) = V_1 \cup V_2$ e $E(\Gamma_p) = \{\{v_i, v_j\}, \{u_i, u_j\}, \{v_i, u_i\}; i \neq j \wedge 1 \leq i, j \leq p\}$. Para $p \geq 1$, é fácil notar que Γ_p é conexo com $\Gamma_1 \simeq K_2$ e $\Gamma_2 \simeq C_4$. A Figura 7.3 ilustra os grafos Γ_3 e Γ_4 . Note ainda, que Γ_p tem duas cliques de ordem p , induzidas por V_1 e V_2 , respectivamente.

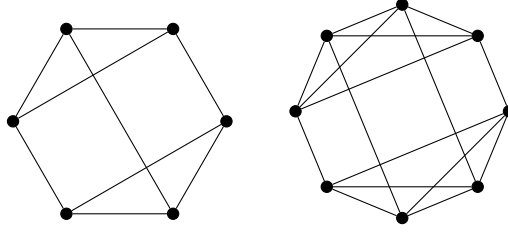


Figura 7.3: Grafos Γ_3 e Γ_4 .

Dado um natural $t \geq 2$ e uma seqüência não decrescente $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$, para cada natural $\ell_i \geq 1$, $1 \leq i \leq t$, o grafo multipartido completo com ℓ_i células de cardinalidade n_i será denotado por

$$K_{n_1^{(\ell_1)}, n_2^{(\ell_2)}, \dots, n_t^{(\ell_t)}} \simeq K_{\underbrace{n_1, \dots, n_1}_{\ell_1}, \underbrace{n_2, \dots, n_2}_{\ell_2}, \dots, \underbrace{n_t, \dots, n_t}_{\ell_t}}. \quad (7.1)$$

Veja que o grafo $K_{n_1^{(\ell_1)}, n_2^{(\ell_2)}, \dots, n_t^{(\ell_t)}}$ tem um número de células igual a $\sum_{i=1}^t \ell_i$ e a ordem de tal grafo é então $n = \sum_{i=1}^t \ell_i n_i$.

O grafo bipartido completo em que cada célula tem cardinalidade distinta será denotado por K_{n_1, n_2} . Caso as células tenham a mesma cardinalidade, tal grafo será denotado por $K_{n_1^{(2)}}$. Poderemos omitir um superíndice ℓ_i , $1 \leq i \leq t$, toda vez que $\ell_i = 1$. Por exemplo, $K_{1^{(\ell_1)}} \simeq K_{\ell_1}$ e $K_{2^{(1)}, 3^{(5)}, 4^{(1)}} \simeq K_{2, 3^{(5)}, 4}$.

Sejam q e s inteiros tais que $1 \leq q \leq s$ e $s \geq 2$. O grafo $\Omega_{q,s}$ de ordem $n = 2(q + s) + 1$ é obtido da junção do grafo $K_{2^{(q)}} \cup K_{2^{(s)}}$ com o grafo K_1 , isto é, $\Omega_{q,s} \simeq (K_{2^{(q)}} \cup K_{2^{(s)}}) \vee K_1$. A Figura 7.4 exhibe os grafos $\Omega_{1,2}$, $\Omega_{2,2}$ e $\Omega_{3,4}$.

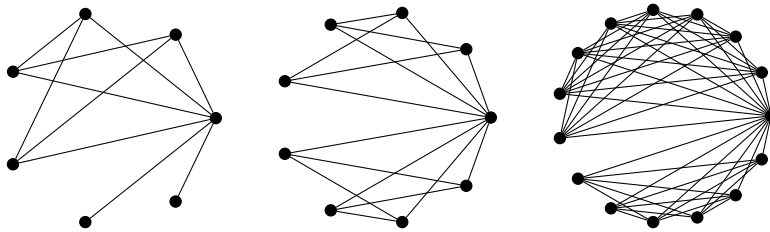


Figura 7.4: Grafos $\Omega_{1,2}$, $\Omega_{2,2}$ e $\Omega_{3,4}$.

Considere o grafo 4-regular R dado na Figura 7.5 e seja H o subgrafo de R induzido pelos vértices destacados (em branco) na figura. Dado um inteiro $c \geq 1$, seja Υ_c , o grafo obtido de R pela junção dos vértices de H com o grafo dado $K_{2^{(c)}}$. Além do grafo R , a Figura 7.5 exhibe também os grafos Υ_1 e Υ_2 .

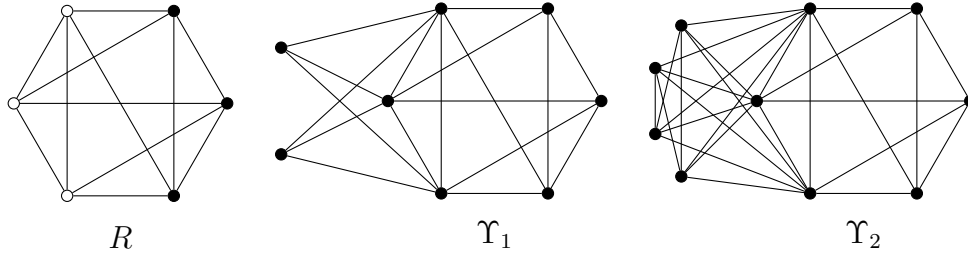


Figura 7.5: Grafos R , Υ_1 e Υ_2 .

Dados os inteiros positivos a e b , seja

$$\mathcal{F} = \{K_{a,b}, K_{2(a+2),b}, \Gamma_{a+2}, \Omega_{a,b+1}, \Upsilon_b; 1 \leq a \leq b\}.$$

Além disso, seja G_i , $8 \leq i \leq 13$ um grafo exibido na Figura 7.6.

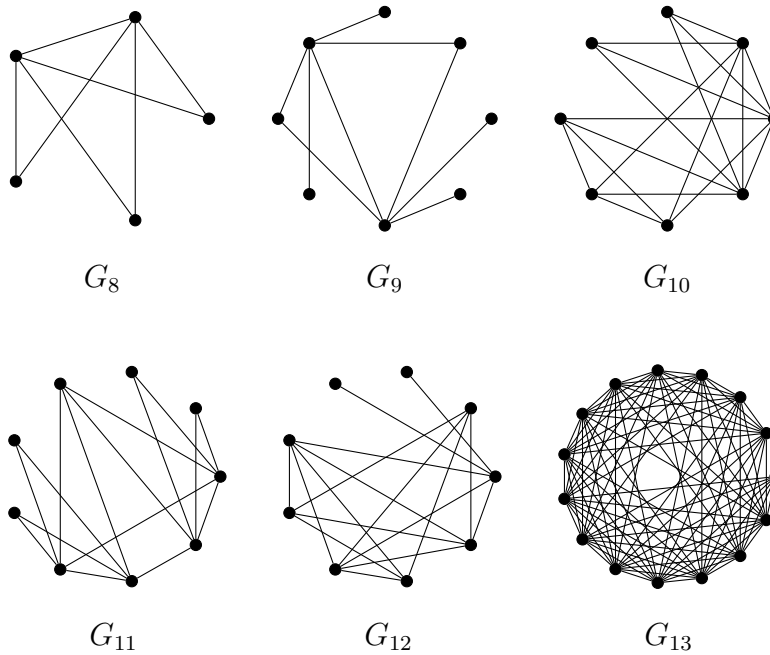


Figura 7.6: Grafos esporádicos com dois autovalores diferentes de -2 e 0 .

Observe que o grafo G_{13} , dado na Figura 7.6 e rotulado na Figura 7.7, é assim construído: dados os conjuntos $S_1 = \{u_i; 1 \leq i \leq 7\}$, $S_2 = \{v_j; 1 \leq j \leq 7\}$ e $S_3 = \{w\}$ tem-se $V(G_{13}) = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ e

$$E(G_{13}) = \{\{u_i, u_j\}, \{v_i, v_j\}, \{u_i, v_j\}, \{v_j, w\}; i \neq j \wedge 1 \leq i, j \leq 7\}.$$

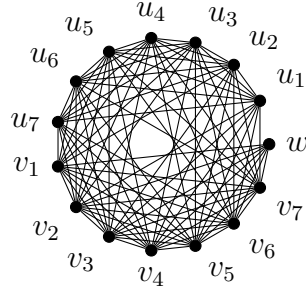


Figura 7.7: Grafo G_{13} .

Em 2016, CIOABĂ *et al.* [48] determinaram todos os grafos conexos de ordem n em que no máximo dois autovalores diferem de -2 e 0 .

Teorema 7.2 (CIOABĂ *et al.* [48]) *Se G é um grafo conexo com no máximo dois autovalores distintos de -2 e 0 então $G \in \mathcal{F}$ ou G é isomorfo a um dos grafos esporádicos G_i , $8 \leq i \leq 13$, ilustrados na Figura 7.6. Além disso, os espectros de tais grafos foram determinados como exibidos a seguir,*

- (i) $\text{Spec}(K_{a,b}) = \{0^{(a+b-2)}, \pm\sqrt{ab}\};$
- (ii) $\text{Spec}(K_{2^{(a+2)},b}) = \{-2^{(a)}, 0^{(a+b)}, a \pm \sqrt{(a+2)^2 + 2(a+1)(b-2)}\};$
- (iii) $\text{Spec}(\Gamma_{a+2}) = \{-2^{(a+1)}, 0^{(a+1)}, a, a+2\};$
- (iv) $\text{Spec}(\Omega_{a,b+1}) = \{-2^{(a+b)}, 0^{(a+b+1)}, a+b \pm \sqrt{(a-b-1)^2 + 1}\};$
- (v) $\text{Spec}(\Upsilon_a) = \{-2^{(a+3)}, 0^{(a+3)}, a+3 \pm \sqrt{a^2 + 3}\};$
- (vi) $\text{Spec}(G_8) = \{-2, -1, 0^{(2)}, 3\};$
- (vii) $\text{Spec}(G_9) = \{-2^{(2)}, 0^{(4)}, 1, 3\};$
- (viii) $\text{Spec}(G_{10}) = \{-2^{(3)}, 0^{(3)}, 3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}\};$
- (ix) $\text{Spec}(G_{11}) = \{-2^{(3)}, 0^{(4)}, 2, 4\};$
- (x) $\text{Spec}(G_{12}) = \{-2^{(3)}, 0^{(4)}, 3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\};$
- (xi) $\text{Spec}(G_{13}) = \{-2^{(7)}, 0^{(6)}, 7 - 2\sqrt{7}, 7 + 2\sqrt{7}\}.$

7.2 Grafos com todos os autovalores, exceto os extremos, em $[-2, 0]$

Para determinar explicitamente todos os grafos cujos autovalores, exceto os extremos, pertencem ao intervalo $[-2, 0]$, vamos fazer uso da técnica de subgrafos proibidos.

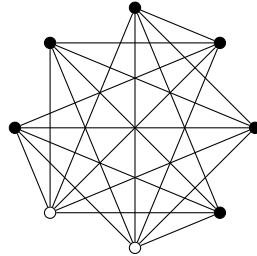
Denotemos por \mathcal{C} a classe dos grafos em que somente os autovalores extremais não pertencem ao intervalo $[-2, 0]$. Sabe-se que dado um grafo, ao adicionarmos a ele apenas vértices isolados, o espectro do grafo não se altera, exceto pela multiplicidade do autovalor nulo. Portanto, a qualquer grafo em \mathcal{C} se a ele for adicionado vértices isolados, este permanecerá em \mathcal{C} . Assim, seja \mathcal{C}' o conjunto dos grafos em \mathcal{C} sem vértices isolados. Logo, para determinarmos explicitamente o conjunto \mathcal{C} é suficiente determinar todos os grafos em \mathcal{C}' . Desde que $\lambda_n(K_n) = -1$ e este é extremal temos que $K_n \notin \mathcal{C}'$. Do Teorema 3.4, todo grafo não completo G tem $\lambda_2(G) \geq 0$. Além disso, $\lambda_2(G) = 0$ se e somente se G é um grafo multipartido completo. Assim, todo grafo em \mathcal{C}' necessariamente é multipartido completo. A recíproca não é verdadeira, veja que o grafo 3-partido completo $K_{2,3(2)}$, exibido na Figura 7.8, tem espectro

$$\text{Spec}(K_{2,3(2)}) = \left\{ -3, \frac{3 - \sqrt{57}}{2}, 0^{(5)}, \frac{3 + \sqrt{57}}{2} \right\}.$$

Mais claramente, como o autovalor não extremal $\lambda_7(K_{2,3(2)})$ não pertence ao intervalo $[-2, 0]$, pois

$$\lambda_7(K_{2,3(2)}) = \frac{3 - \sqrt{57}}{2} \approx -2.275 < -2$$

tem-se $K_{2,3(2)} \notin \mathcal{C}'$ e, portanto, $K_{2,3(2)}$ é um subgrafo proibido para os grafos em \mathcal{C}' .



$K_{2,3(2)}$

Figura 7.8: Subgrafo proibido para os grafos em \mathcal{C}' .

Assim, se um grafo G possui $K_{2,3(2)}$ como subgrafo induzido, o Teorema 2.28 nos assegura que $\lambda_{n-1}(G) \leq \lambda_7(K_{2,3(2)}) < -2$, logo $G \notin \mathcal{C}'$. Isto significa que se um grafo pertencente a \mathcal{C}' tem três células e, ao menos, uma delas tem tamanho 2 então tal grafo contém no máximo uma célula de tamanho $n_t \geq 3$. Em vista disso, estabelecemos a Proposição 7.3, que fornece condições necessárias para que um grafo pertença ao conjunto \mathcal{C}' .

Proposição 7.3 *Seja $G \simeq K_{n_1^{(\ell_1)}, n_2^{(\ell_2)}, \dots, n_t^{(\ell_t)}}$. Se $G \in \mathcal{C}'$ então G pertence a uma das seguintes subclasses de grafos:*

- (i) K_{n_1, n_2} ;
- (ii) $K_{1^{(\ell_1)}, n_2}$, onde $\ell_1 \geq 2$ e $n_2 \geq 2$;
- (iii) $K_{1^{(\ell_1)}, n_2, n_3}$, onde $n_2 \geq 2$;
- (iv) $K_{1^{(\ell_1)}, 2^{(\ell_2)}, n_3}$, onde $\ell_2 \geq 2$ e $n_3 \geq 3$;
- (v) $K_{2^{(\ell_1)}, n_2}$, onde $\ell_1 \geq 2$ e $n_2 \geq 3$.

7.3 Caracterização da classe \mathcal{C}'

As condições fornecidas pela Proposição 7.3 não são suficientes para garantir que um grafo multipartido completo pertença a \mathcal{C}' . Por exemplo, os grafos $K_{1,4}$ e $K_{1,1,2}$ satisfazem respectivamente as condições (i) e (ii), mas eles não pertencem a \mathcal{C}' . No caso de $K_{1,4}$, o menor autovalor pertence ao intervalo $[-2, 0]$, pois $\lambda_5(K_{1,4}) = -2$ e, no segundo caso, o autovalor extremal $\lambda_4(K_{1,1,2}) \approx -1.5615$ também pertence ao mesmo intervalo.

Nesta seção apresentamos a análise de cada uma das classes de grafos dadas pela Proposição 7.3 a fim de explicitar todos os grafos pertencentes ao conjunto \mathcal{C}' . A Proposição 7.4 descreve todos os grafos bipartidos completos em \mathcal{C}' . Veja que somente um número finito deles não está em \mathcal{C}' .

Proposição 7.4 *Os únicos grafos bipartidos completos que não pertencem a \mathcal{C}' são $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{1,3}$, $K_{1,4}$ e $K_{2,2}$.*

Demonstração. Sabemos que

$$\text{Spec}(K_{n_1, n_2}) = \{-\sqrt{n_1 n_2}, 0^{(n-2)}, \sqrt{n_1 n_2}\},$$

onde $n = n_1 + n_2$. Logo, $\lambda_n(K_{n_1, n_2}) = -\sqrt{n_1 n_2} < -2$ se e somente se os inteiros n_1 e n_2 satisfazem uma das condições a seguir.

- (i) $n_1 = 1$ e $n_2 \geq 5$;
- (ii) $n_1 = 2$ e $n_2 \geq 3$;
- (iii) $3 \leq n_1 \leq n_2$.

Daí obtém-se o resultado. □

A Proposição 7.5 identifica duas classes infinitas de grafos em \mathcal{C}' com exatamente uma célula de ordem, ao menos, 3 e as outras de ordem 1.

Proposição 7.5 *Sejam os inteiros ℓ_1 e n_2 com $\ell_1 \geq 2$ e $n_2 \geq 2$. Os grafos multipartidos completos da forma $K_{1^{(\ell_1)}, n_2}$ pertencem a \mathcal{C}' se e somente se vale uma das condições a seguir.*

(i) $\ell_1 = 2$ e $n_2 \geq 4$;

(ii) $\ell_1 \geq 3$ e $n_2 \geq 3$.

Demonstração. Sejam os inteiros ℓ_1 e n_2 com $\ell_1 \geq 2$ e $n_2 \geq 2$ e suponhamos que $G \simeq K_{1^{(\ell_1)}, n_2}$. Se V_{ℓ_1} denota o subconjunto dos vértices de G pertencentes às células unitárias tem-se $G[V_{\ell_1}] \simeq K_{\ell_1}$ e, neste caso, $G \simeq K_{\ell_1} \vee n_2 K_1$. Do Teorema 2.17, obtém-se

$$P_G(x) = x^{n_2-1}(x+1)^{\ell_1-1}(x^2 - (\ell_1 - 1)x - \ell_1 n_2),$$

logo $\lambda_{n-1} = -1$ e $\lambda_n(G) = \frac{r-1 - \sqrt{(\ell_1-1)^2 + 4\ell_1 n_2}}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} \lambda_n(G) < -2 &\Leftrightarrow (\ell_1 + 3)^2 < (\ell_1 - 1)^2 + 4\ell_1 n_2 \\ &\Leftrightarrow 4\ell_1 n_2 - 8\ell_1 - 8 > 0 \\ &\Leftrightarrow \ell_1(n_2 - 2) > 2. \end{aligned} \tag{7.2}$$

A desigualdade (7.2) é verdadeira se e somente se valem as condições (i) ou (ii). □

Os grafos multipartidos completos com exatamente duas células de ordem maior ou igual a 2 que pertencem a \mathcal{C}' são determinados na Proposição 7.6. Desta proposição resulta que há mais quatro classes infinitas de grafos em \mathcal{C}' , além de nove grafos esporádicos.

Proposição 7.6 *Sejam ℓ_1 , n_2 e n_3 inteiros tais que $\ell_1 \geq 1$ e $2 \leq n_2 \leq n_3$. O grafo multipartido completo da forma $K_{1^{(\ell_1)}, n_2, n_3}$ pertence a \mathcal{C}' se e somente este é isomorfo a um dos grafos esporádicos $K_{1^{(2)}, 5, 5}$, $K_{1^{(2)}, 5, 6}$, $K_{1^{(2)}, 5, 7}$, $K_{1^{(2)}, 5, 8}$, $K_{1^{(2)}, 6, 6}$, $K_{1^{(3)}, 4, 4}$, $K_{1^{(4)}, 3, 3}$, $K_{1^{(4)}, 3, 4}$ e $K_{1^{(5)}, 3, 3}$, exibidos na Figura 7.9, ou pertence a uma das subclasses que seguem.*

(i) K_{1, n_2, n_3} , onde $n_2 \geq 2$ e $n_3 \geq 3$;

(ii) $K_{1^{(\ell_1)}, 2, n_3}$, onde $\ell_1 \geq 2$ e $n_3 \geq 3$;

(iii) $K_{1^{(2)}, n_2, n_3}$, onde $n_2 \in \{3, 4\}$ e $n_3 \geq n_2$;

(iv) $K_{1^{(3)}, 3, n_3}$, onde $n_3 \geq 3$;

Demonstração. Sejam ℓ_1 , n_2 e n_3 inteiros tais que $\ell_1 \geq 1$ e $2 \leq n_2 \leq n_3$ e suponhamos $G \simeq K_{1^{(\ell_1)}, n_2, n_3}$. Logo, G possui $\ell_1 - 1$ pares de vértices gêmeos verdadeiros e $n_2 + n_3 - 2$ pares de vértices gêmeos falsos associados a conjuntos de Vetores de Faria linearmente independentes. Assim, das Proposições 2.26 e 2.27 $\lambda = -1$ e $\lambda = 0$ são autovalores de G com multiplicidades, no mínimo, $n_2 + n_3 - 2$ e $\ell_1 - 1$, respectivamente. A matriz de adjacência de G pode ser escrita como:

$$A(G) = \left[\begin{array}{c|c|c} J_{\ell_1} - I_{\ell_1} & J_{\ell_1 \times n_2} & J_{\ell_1 \times n_3} \\ \hline J_{n_2 \times \ell_1} & \mathbf{0}_{n_2} & J_{n_2 \times n_3} \\ \hline J_{n_3 \times \ell_1} & J_{n_3 \times n_2} & \mathbf{0}_{n_3} \end{array} \right].$$

Da Proposição 2.9, obtém-se a matriz

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \ell_1 - 1 & n_2 & n_3 \\ \ell_1 & 0 & n_3 \\ \ell_1 & n_2 & 0 \end{bmatrix},$$

cujo polinômio característico é

$$h(x) = x^3 - (\ell_1 - 1)x^2 - (n_2n_3 + \ell_1n_2 + \ell_1n_3)x - (\ell_1 + 1)n_2n_3.$$

Assim, o polinômio característico de G é

$$P_G(x) = x^{\ell_1 - 1}(x + 1)^{n_2 + n_3 - 2}(x^3 - (\ell_1 - 1)x^2 - (n_2n_3 + \ell_1n_2 + \ell_1n_3)x - (\ell_1 + 1)n_2n_3).$$

Sendo G um grafo multipartido completo, do Corolário 3.5 e da fatoração de $P_G(x)$, o polinômio $h(x)$ possui exatamente uma raiz positiva, que é o índice de G . Além disso,

$$\begin{aligned} h(-n_3) &= -n_3(n_3 - 1)(n_3 - n_2); \\ h(-2) &= -\ell_1(n_2 - 2)(n_3 - 2) + n_2n_3 - 4; \\ h(-1) &= -\ell_1(n_2 - 1)(n_3 - 1). \end{aligned}$$

Note que para quaisquer valores de $\ell_1 \geq 1$ e $2 \leq n_2 \leq n_3$, $h(-n_3) \leq 0$ e $h(-1) < 0$. Dessa forma, para que se tenha $\lambda_n(G) < -2 \leq \lambda_{n-1}(G)$ é necessário e suficiente que $h(-2) \geq 0$, o que equivale a encontrar as soluções inteiras da inequação

$$F(\ell_1, n_2, n_3) = -\ell_1(n_2 - 2)(n_3 - 2) + n_2n_3 - 4 \geq 0. \quad (7.3)$$

Tais soluções encontram-se descritas nos sete casos que se seguem.

Caso 1. Suponha $\ell_1 = 1$ e $n_2 = 2 + k$, com $k \geq 0$. De (7.3) obtém-se

$$F(1, 2 + k, n_3) = 2(k + n_3 - 2).$$

Como $k \geq 0$ tem-se $F(1, 2+k, n_3) > 0$ para todo $n_3 \geq 3$ e, conseqüentemente, nessas condições tem-se $K_{1, n_2, n_3} \in \mathcal{C}'$.

Para $n_3 = 2$, tem-se $F(1, 2, 2) = 0$ e $h(x) = (x+2)(x^2 - 2x - 4)$ tem raízes $x_1 = -2$ e $x_2 = 1 - \sqrt{5} \approx -1.24$. Logo, $K_{1, 2, 2} \notin \mathcal{C}'$.

Caso 2. Suponha $\ell_1 \geq 2$ e $n_2 = 2$. Neste caso,

$$F(\ell_1, 2, n_3) = 2n_3 - 4.$$

- Para $n_3 \geq 3$, $F(\ell_1, 2, n_3) = 2n_3 - 4 > 0$ e $K_{1(\ell_1), 2, n_3} \in \mathcal{C}'$.
- Para $n_3 = 2$,

$$F(\ell_1, 2, 2) = 0 \text{ e } h(x) = (x+2)g(x),$$

onde $g(x) = x^2 - (\ell_1 + 1)x - 2(\ell_1 + 1)$. Como $g(-2) = 4$ e $g(-1) = -\ell_1$, o polinômio $h(x)$ tem duas raízes negativas, ambas no intervalo $[-2, -1)$. Portanto, a inequação (7.3) não admite solução para $n_2 = n_3 = 2$ e, conseqüentemente, $K_{1(\ell_1), 2, 2} \notin \mathcal{C}'$.

Caso 3. Suponha $\ell_1 = 2$ e $3 \leq n_2 \leq n_3$. Assim, de (7.3),

$$F(2, n_2, n_3) = -(n_2 - 4)n_3 + 4n_2 - 12.$$

- Para $n_2 = 3$, $F(2, 3, n_3) = n_3 > 0$ para todo $n_3 \geq 3$;
- Para $n_2 = 4$, $F(2, 4, n_3) = 4$, para todo $n_3 \geq 4$;
- Para $n_2 = 5$, $F(2, 5, n_3) = -n_3 + 8 \geq 0$ para $n_3 \in \{5, 6, 7, 8\}$;
- Para $n_2 = 6$, $F(2, 6, n_3) = -2n_3 + 12 \geq 0$ para $n_3 = 6$;
- Para $n_2 = 7 + k$, com $k \geq 0$, $F(2, 7 + k, n_3) = -(k + 3)n_3 + 4k + 16$.

Assim,

$$F(2, 7 + k, n_3) \geq 0 \Leftrightarrow n_3 \leq \frac{4(k + 4)}{k + 3}.$$

Como $k \geq 0$ e $n_3 \geq 7 + k$,

$$7 + k \leq \frac{4(k + 4)}{k + 3} \Leftrightarrow k^2 + 6k + 5 \leq 0. \quad (7.4)$$

Desde que $k \geq 0$, a inequação à direita de (7.4) não admite solução. Portanto, não há soluções para a inequação (7.3) quando $\ell_1 = 2$ e $n_2 \geq 7$ e, conseqüentemente, nessas condições $K_{1(2), n_2, n_3} \notin \mathcal{C}'$.

Caso 4. Suponha $\ell_1 = 3$ e $3 \leq n_2 \leq n_3$. Assim, da equação (7.3),

$$F(3, n_2, n_3) = -2(n_2 - 3)n_3 + 6n_2 - 16.$$

- Para $n_2 = 3$, $F(3, 3, n_3) = 2$ para todo $n_3 \geq 3$;
- Para $n_2 = 4$, $F(3, 4, n_3) = -2n_3 + 8 \geq 0$ para $n_3 = 4$;
- Para $n_2 = 5 + k$, com $k \geq 0$, $F(3, 5 + k, n_3) = -2(k + 2)n_3 + 2(3k + 7)$.

Logo,

$$F(3, 5 + k, n_3) \geq 0 \Leftrightarrow n_3 \leq \frac{3k + 7}{k + 2}.$$

Como $k \geq 0$ e $n_3 \geq 5 + k$,

$$5 + k \leq \frac{3k + 7}{k + 2} \Leftrightarrow k^2 + 4k + 3 \leq 0. \quad (7.5)$$

Desde que $k \geq 0$, a inequação à direita de (7.5) não admite solução. Portanto, não há soluções para a inequação (7.3) quando $\ell_1 = 3$ e $n_2 \geq 5$ e, conseqüentemente, nessas condições $K_{1(3), n_2, n_3} \notin \mathcal{C}'$.

Caso 5. Suponha $\ell_1 = 4$ e $3 \leq n_2 \leq n_3$. Logo,

$$F(4, n_2, n_3) = -(3n_2 - 8)n_3 + 8n_2 - 20.$$

- Para $n_2 = 3$, $F(4, 3, n_3) = -n_3 + 4 \geq 0$ para $n_3 \in \{3, 4\}$;
- Para $n_2 = 4 + k$, com $k \geq 0$, $F(4, 4 + k, n_3) = -(3k + 4)n_3 + 4(2k + 3)$.

Logo,

$$F(4, 4 + k, n_3) \geq 0 \Leftrightarrow n_3 \leq \frac{8k + 12}{3k + 4}.$$

Como $k \geq 0$ e $n_3 \geq 4 + k$,

$$4 + k \leq \frac{8k + 12}{3k + 4} \Leftrightarrow 3k^2 + 8k + 4 \leq 0. \quad (7.6)$$

Desde que $k \geq 0$, a inequação à direita de (7.6) não admite solução. Portanto, não há soluções para a inequação (7.3) quando $\ell_1 = 4$ e $n_2 \geq 4$ e, conseqüentemente, nessas condições $K_{1(4), n_2, n_3} \notin \mathcal{C}'$.

Caso 6. Suponha $\ell_1 = 5$ e $3 \leq n_2 \leq n_3$. Logo,

$$F(5, n_2, n_3) = -2(2n_2 - 5)n_3 + 10n_2 - 24.$$

- Para $n_2 = 3$, $F(5, 3, n_3) = -2n_3 + 6 \geq 0$ para $n_3 = 3$;
- Para $n_2 = 4 + k$, com $k \geq 0$, $F(5, 4 + k, n_3) = -2(2k + 3)n_3 + 2(5k + 8)$.

Logo,

$$F(5, 4 + k, n_3) \geq 0 \Leftrightarrow n_3 \leq \frac{5k + 8}{2k + 3}.$$

Como $k \geq 0$ e $n_3 \geq 4 + k$,

$$4 + k \leq \frac{5k + 8}{2k + 3} \Leftrightarrow k^2 + 3k + 2 \leq 0. \quad (7.7)$$

Desde que $k \geq 0$, a inequação à direita de (7.7) não admite solução. Portanto, não há soluções para a inequação (7.3) quando $\ell_1 = 5$ e $n_2 \geq 4$ e, conseqüentemente, nessas condições $K_{1^{(5)}, n_2, n_3} \notin \mathcal{C}'$.

Caso 7. Dado $h \geq 0$, suponha $\ell_1 = 6 + h$ e $3 \leq n_2 \leq n_3$. Para $n_2 = 3 + k$, $k \geq 0$ e da equação (7.3),

$$F(6 + h, 3 + k, n_3) = -(hk + 5k + h + 3)n_3 + 2k(h + 6) + 2h + 8.$$

Assim,

$$F(6 + h, 3 + k, n_3) \geq 0 \Leftrightarrow n_3 \leq \frac{2(h + 6)k + 2h + 8}{hk + 5k + h + 3}.$$

Como $k \geq 0$ e $n_3 \geq 3 + k$,

$$3 + k \leq \frac{2(h + 6)k + 2h + 8}{hk + 5k + h + 3} \Leftrightarrow \frac{(h + 5)k^2 + (2h + 6)k + h + 1}{(h + 5)k + h + 3} \leq 0. \quad (7.8)$$

Desde que $h \geq 0$ e $k \geq 0$, a inequação à direita de (7.8) não admite solução. Portanto, não há soluções para a inequação (7.3) quando $\ell_1 \geq 6$ e $n_2 \geq 3$ e, conseqüentemente, nessas condições $K_{1^{(\ell_1)}, n_2, n_3} \notin \mathcal{C}'$. □

A Figura 7.9 exhibe os grafos esporádicos que satisfazem as condições da Proposição 7.6, cujos espectros são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} \text{Spec}(K_{1^{(2)}, 5, 5}) &= \{-5, -1.89, -1, 0^{(8)}, 7.89\}; \\ \text{Spec}(K_{1^{(2)}, 5, 6}) &= \{-5.49, -1.94, -1, 0^{(9)}, 8.43\}; \\ \text{Spec}(K_{1^{(2)}, 5, 7}) &= \{-5.95, -1.98, -1, 0^{(10)}, 8.92\}; \\ \text{Spec}(K_{1^{(2)}, 5, 8}) &= \{-6.39, -2, -1, 0^{(11)}, 9.39\}; \\ \text{Spec}(K_{1^{(2)}, 6, 6}) &= \{-6, -2, -1, 0^{(10)}, 9\}; \\ \text{Spec}(K_{1^{(3)}, 4, 4}) &= \{-4, -2, -1^{(2)}, 0^{(6)}, 8\}; \\ \text{Spec}(K_{1^{(4)}, 3, 3}) &= \{-3, -1.89, -1^{(3)}, 0^{(4)}, 7.89\}; \\ \text{Spec}(K_{1^{(4)}, 3, 4}) &= \{-3.52, -2, -1^{(3)}, 0^{(5)}, 8.52\}; \\ \text{Spec}(K_{1^{(5)}, 3, 3}) &= \{-3, -2, -1^{(4)}, 0^{(4)}, 9\}. \end{aligned}$$

Os grafos pertencentes a \mathcal{C}' com ao menos uma célula de cardinalidade 1 e ao menos duas de cardinalidade 2 são explicitados pela Proposição 7.7.

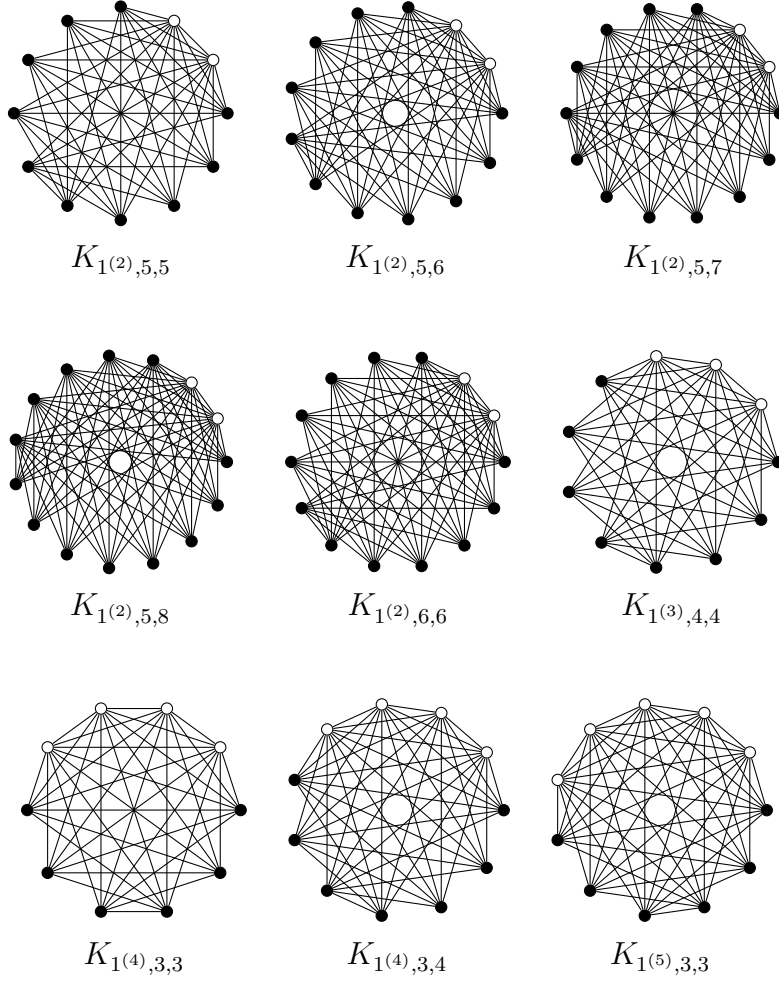


Figura 7.9: Grafos esporádicos que satisfazem a Proposição 7.6.

Proposição 7.7 *Sejam ℓ_1 , ℓ_2 e n_3 inteiros tais que $1 \leq \ell_1$ e $2 \leq \ell_2 \leq n_3$. Para que se tenha $K_{1^{(\ell_1)}, 2^{(\ell_2)}, n_3} \in \mathcal{C}'$ é necessário e suficiente que $n_3 \geq 3$.*

Demonstração. Sejam ℓ_1 , ℓ_2 e n_3 inteiros tais que $1 \leq \ell_1$ e $2 \leq \ell_2 \leq n_3$ e suponhamos $G \simeq K_{1^{(\ell_1)}, 2^{(\ell_2)}, n_3}$. Logo, a matriz de adjacência de G pode ser escrita como:

$$A(G) = \left[\begin{array}{c|c|c} J_{\ell_1} - I_{\ell_1} & J_{\ell_1 \times 2\ell_2} & J_{\ell_1 \times n_3} \\ \hline J_{2\ell_2 \times \ell_1} & R_{2\ell_2} & J_{2\ell_2 \times n_3} \\ \hline J_{n_3 \times \ell_1} & J_{n_3 \times 2\ell_2} & \mathbf{0}_{n_3} \end{array} \right],$$

onde $R_{2\ell_2}$ é a matriz de adjacência do grafo multipartido completo $K_{2^{(\ell_2)}}$. Da Proposição 2.9, obtém-se a matriz

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \ell_1 - 1 & 2\ell_2 & n_3 \\ \ell_1 & 2\ell_2 - 2 & n_3 \\ \ell_1 & 2\ell_2 & 0 \end{bmatrix},$$

cujo polinômio característico é

$$g(x) = x^3 - (\ell_1 + 2\ell_2 - 3)x^2 - ((\ell_1 + 2\ell_2)n_3 + 2\ell_1 + 2\ell_2 - 2)x - 2n_3(\ell_1 + \ell_2).$$

Utilizando também a Proposição 2.9 conclui-se que o polinômio característico de G é

$$P_G(x) = x^{\ell_2+n_3-1}(x+1)^{\ell_1-1}(x+2)^{\ell_2-1}g(x).$$

Sendo G um grafo multipartido completo, do Corolário 3.5 e da fatoração de $P_G(x)$, o polinômio $g(x)$ possui exatamente uma raiz positiva, que é o índice de G . Além disso, para todo $n_3 \geq 3$ tem-se

$$\begin{aligned} g(-n_3) &= -n_3(n_3 - 1)(n_3 - 2) < 0; \\ g(-2) &= 2\ell_2(n_3 - 2) > 0; \\ g(-1) &= -\ell_1(n_3 - 1) < 0. \end{aligned}$$

Logo, $g(x)$ possui as suas raízes negativas nos intervalos $(-n_3, -2)$ e $(-2, -1)$. Assim, conclui-se que para todo $n_3 \geq 3$, $\lambda_n(G) < -2$ e $\lambda_{n-1}(G) = -2$. Portanto, $G \in \mathcal{C}'$ para todo $n_3 \geq 3$.

Agora, fazendo $n_3 = 2$ obtém-se $g(x) = (x+2)h(x)$, onde

$$h(x) = x^2 - (\ell_1 + 2\ell_2 - 1)x - 2(\ell_1 + \ell_2).$$

Como $h(-2) = 2(\ell_2 + 1)$ e $h(-1) = -\ell_1$ conclui-se que o polinômio $h(x)$ possui uma raiz no intervalo $(-2, -1)$ e a outra é positiva, pois é o índice de G . Portanto, para $n_3 = 2$, $G \notin \mathcal{C}'$. □

A Figura 7.10 exhibe os grafos $K_{1,2^{(2)},7}$, $K_{1^{(3)},2^{(3)},3}$, $K_{1^{(4)},2^{(2)},4}$ e $K_{1^{(5)},2^{(2)},5}$, que satisfazem as condições da Proposição 7.7, cujos espectros são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} \text{Spec}(K_{1,2^{(2)},7}) &= \{-4.54, -2, -1.2, 0^{(8)}, 7.74\}; \\ \text{Spec}(K_{1^{(3)},2^{(3)},3}) &= \{-2.72, -2^{(2)}, -1.31, -1^{(2)}, 0^{(5)}, 10.04\}; \\ \text{Spec}(K_{1^{(4)},2^{(2)},4}) &= \{-3.3, -2, -1.48, -1^{(3)}, 0^{(5)}, 9.79\}; \\ \text{Spec}(K_{1^{(5)},2^{(2)},5}) &= \{-3.74, -1.7, -1^{(4)}, 0^{(5)}, 9.44\}. \end{aligned}$$

A proposição a seguir exhibe os grafos em \mathcal{C}' que não possuem células de cardinalidade 1.

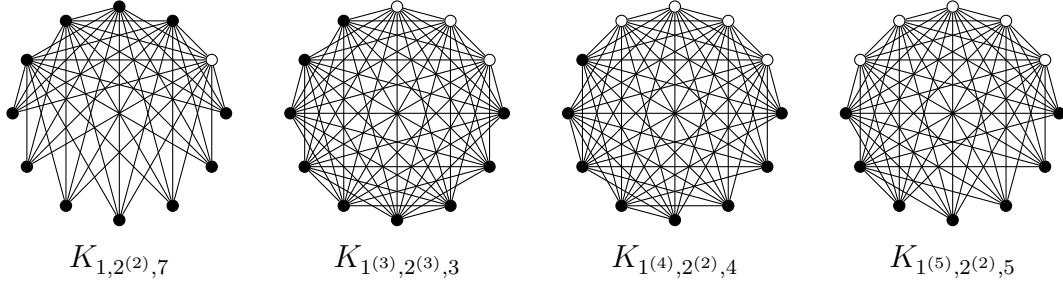


Figura 7.10: Grafos que satisfazem a Proposição 7.7.

Proposição 7.8 *Sejam ℓ_1 e n_2 inteiros tais que $2 \leq \ell_1 \leq n_2$. Para que se tenha $K_{2^{(\ell_1)}, n_2} \in \mathcal{C}'$ é necessário e suficiente que $n_2 \geq 3$.*

Demonstração. Sejam ℓ_1 e n_2 inteiros tais que $2 \leq \ell_1 \leq n_2$ e suponhamos $G \simeq K_{2^{(\ell_1)}, n_2}$.

Para $n_2 = 2$, $G \simeq CP(\ell_1 + 1)$. Como

$$\text{Spec}(CP(\ell_1 + 1)) = \{-2^{(\ell_1)}, 0^{(\ell_1+1)}, 2\ell_1 - 1\},$$

tem-se $\lambda_n(G) = -2$, o que implica em $G \notin \mathcal{C}'$.

Para $n_2 \geq 3$, $G \simeq CP(\ell_1) \vee n_2 K_1$. Do Teorema 2.17 tem-se que

$$\begin{aligned} P_G(x) &= \frac{P_{CP(\ell_1)}(x)P_{n_2 K_1}(x)}{(x - 2\ell_1 + 2)x} ((x - 2\ell_1 + 2)x - 2\ell_1 n_2) \\ &= x^{\ell_1 + n_2 - 1} (x + 2)^{\ell_1 - 1} f(x), \end{aligned}$$

onde $f(x) = x^2 - (2\ell_1 - 2)x - 2\ell_1 n_2$. Como o polinômio $f(x)$ possui uma raiz positiva, que é o índice de G , e

$$\begin{aligned} f(-n_2) &= n_2(n_2 - 2) > 0 \\ f(-2) &= -2\ell_1(n_2 - 2) < 0, \end{aligned}$$

conclui-se que $\lambda_n \in (-n_2, -2)$. Portanto, $\lambda_n(G) < -2$ e $G \in \mathcal{C}'$ para todo $n_2 \geq 3$. □

Os grafos $K_{2^{(3)}, 3}$ e $K_{2^{(4)}, 4}$, ilustrados na Figura 7.11, verificam a Proposição 7.8 e seus espectros são dados por

$$\begin{aligned} \text{Spec}(K_{2^{(3)}, 3}) &= \{-2.69, -2^{(2)}, 0^{(5)}, 6.69\}; \\ \text{Spec}(K_{2^{(4)}, 4}) &= \{-3.4, -2^{(3)}, 0^{(7)}, 9.4\}. \end{aligned}$$

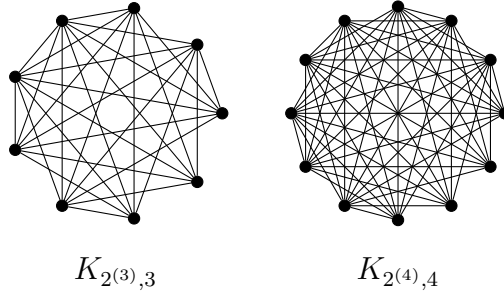


Figura 7.11: Grafos que satisfazem a Proposição 7.8.

O teorema a seguir reúne os resultados apresentados nesta seção para caracterizar os grafos cujos autovalores, exceto os extremais, estão no intervalo $[-2, 0]$.

Teorema 7.9 *Seja G um grafo de ordem n . Para que se tenha $G \in \mathcal{C}'$ é necessário e suficiente que se verifique, ao menos, uma das seguintes condições:*

- (i) *G é um grafo bipartido completo não isomorfo a $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{1,3}$, $K_{1,4}$ e $K_{2,2}$;*
- (ii) *$G \simeq K_{1^{(\ell_1)}, n_2}$, onde ℓ_1 e n_2 satisfazem uma das condições da Proposição 7.5;*
- (iii) *$G \simeq K_{1^{(\ell_1)}, n_2, n_3}$, onde ℓ_1 , n_2 e n_3 satisfazem uma das condições da Proposição 7.6;*
- (iv) *$G \simeq K_{1^{(\ell_1)}, 2^{(\ell_2)}, n_3}$, onde ℓ_1 , ℓ_2 e n_3 satisfazem as condições da Proposição 7.7;*
- (v) *$G \simeq K_{2^{(\ell_1)}, n_2}$, onde ℓ_1 e n_2 satisfazem as condições da Proposição 7.8.*

Como o acréscimo de vértices isolados a um dado grafo apenas aumenta a multiplicidade do autovalor $\lambda = 0$, concluímos que um grafo (conexo ou não) de ordem n possui todos os autovalores, exceto os extremais, no intervalo $[-2, 0]$ se e somente se tal grafo é isomorfo a um dos grafos fornecidos pelo Teorema 7.9 unido com eventuais vértices isolados. Note que a partir daí, temos uma caracterização explícita de todos os grafos que constituem a classe \mathcal{C} .

Capítulo 8

Considerações finais

No decorrer deste capítulo, destacamos as nossas contribuições e apontamos alguns tópicos para possível desenvolvimento futuro.

Em 2007, NIKIFOROV [42] propôs o problema de encontrar as relações de Nordhaus-Gaddum (NG-relações) para todos os autovalores de um grafo, como descrito na Seção 6.1 do Capítulo 6. Em 2014, NIKIFOROV e YUAN [45] encontraram uma cota superior válida para todos os $n - 1$ menores autovalores de um grafo G de ordem n e, em particular, mostraram que

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \frac{n}{\sqrt{2}}, \quad (8.1)$$

mas não exibiram grafos extremais para tal desigualdade.

Na Seção 6.2, estudamos os grafos para os quais $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \in [-1, 0]$. Demonstramos, na Proposição 6.9, que $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) = -1$ se e somente se $G \simeq K_n$ e que $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) = 0$ se e somente se G é um grafo split completo. Além disso, mostramos que não há grafos tais que $\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \in (-1, 0)$. Com o auxílio do AGX, para cada grafo G de ordem n , sugerimos um refinamento para a desigualdade (8.1), dado que provamos a não existência de grafos que satisfazem tal desigualdade na igualdade. O refinamento de (8.1) segue em (8.2).

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\overline{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}, \quad (8.2)$$

o qual denominamos *cota NG₂*.

Provamos que tal cota é válida em diversas classes de grafos tais como árvores, grafos unicíclicos, grafos linha generalizados e grafos excepcionais e encontramos dois resultados mais gerais, que satisfazem a cota (8.2). Tais resultados foram discutidos e descritos nos Teorema 6.16 e Teorema 6.19. O primeiro estabelece que a cota NG₂ é verdadeira para todo grafo cuja cintura é no mínimo $g \geq 5$ e, o segundo, mostra que tal cota também é válida para grafos em que $\min \{ \lambda_2(G), \lambda_2(\overline{G}) \} \leq 1$. Apesar de

não apresentarmos uma demonstração que valide a cota NG_2 para quaisquer grafos (ficou fora deste escopo aqueles com cintura 3 ou 4), mostramos que para muitos grafos, mesmo com cinturas 3 ou 4, que a cota NG_2 é satisfeita. Uma continuação natural desse trabalho é a investigação de cotas para λ_2 em grafos com cinturas 3 ou 4, que sejam justas o suficiente para provar que a cota NG_2 é válida para qualquer grafo. Na verdade, de acordo com o Teorema 2.1, para provarmos a validade de tal cota para todo grafo, basta mostrar que esta é verdadeira para todo grafo com cintura 3.

Outra contribuição original é mostrada no Capítulo 7, onde caracterizamos explicitamente todos os grafos cujos autovalores, exceto os extremais, estão no intervalo $[-2, 0]$. Tal resultado consta do Teorema 7.9 e generaliza os casos apresentados, em 2016, por CIOABĂ *et al.* [48].

Uma continuação deste trabalho está na investigação de outros intervalos reais em que a distância entre os autovalores extremais sejam pequenas. Também sugerimos a investigação de cotas para λ_2 em grafos de classes especiais.

Referências Bibliográficas

- [1] CVETKOVIĆ, D., STEVANOVIĆ, D. “Spectral moments of fullerene graphs”, *Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, v. 50, pp. 62–72, 2004.
- [2] CVETKOVIĆ, D., DOOB, M., SACHS, H. *Spectra of Graphs*. 3 ed. Leipzig, Johann Ambrosius Barth, 1995.
- [3] CVETKOVIĆ, D., ROWLINSON, P., SIMIĆ, S. *Eigenspaces of Graphs*, v. 66, *Encyclopedia of mathematics and its applications*. United Kingdom, Cambridge University Press, 1997.
- [4] BRANKOVIĆ, L., CVETKOVIĆ, D. “The eigenspace of the eigenvalue in generalized line graphs and a problem in security of statistical data bases”, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.*, v. 14, pp. 37–48, 2003.
- [5] MOHAR, B., POLJAK, S. “Eigenvalues in Combinatorial Optimization”. In: *Combinatorial and Graph-Theoretical Problems in Linear Algebra*, v. 50, *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, Springer-Verlag, pp. 107–151, New York, 1993.
- [6] CVETKOVIĆ, D., HANSEN, P., KOVACEVIĆ-VUJČIĆ, V. “On some interconnections between combinatorial optimization and extremal graph theory”, *Yugoslav Journal of Operations Research*, v. 14, n. 2, pp. 147–154, 2004.
- [7] LINIAL, N., WIDGERSON, A. “Expander Graphs and their Applications”, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, v. 43, n. 4, pp. 439–561, 2016.
- [8] CVETKOVIĆ, D., DAVIDOVIĆ, T. “Application of some graph invariants to the analysis of multiprocessor interconnection networks”, *Yugoslav Journal of Operations Research*, v. 18, n. 2, pp. 173–186, 2008.
- [9] ARSIĆ, B., CVETKOVIĆ, D., SIMIĆ, S., et al. “Graph spectral techniques in computer sciences”, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, v. 6, n. 1, pp. 1–30, 2012.

- [10] LUBOTZKY, A., PHILLIPS, R., SARNAK, P. “Ramanujan Graphs”, *Combinatorica*, v. 8, n. 3, pp. 261–277, 1989.
- [11] SIPSER, M., SPIELMAN, D. “Expander codes”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 42, pp. 1710–1722, 1996.
- [12] CVETKOVIĆ, D. “Application of graph spectra: an introduction to the literature”. In: *Application of graph spectra*, v. 13 (21), *Zbornik Radova*, Matematički institut SANU, pp. 7–31, Beograd, 2009.
- [13] CVETKOVIĆ, D., DOOB, M., SACHS, H. *Spectra of Graphs - Theory and Application*. New York, Academic Press, 1980.
- [14] BIGGS, N. *Algebraic Graph Theory*. 2 ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1993.
- [15] CHUNG, F. *Spectral Graph Theory*, v. 92, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Providence, . American Mathematical Society, 1997.
- [16] GODSIL, C. D., ROYLE, G. *Algebraic Graph Theory*. New York, Springer-Verlag, 2001.
- [17] CVETKOVIĆ, D., ROWLINSON, P., SIMIĆ, S. *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. Cambridge, Cambridge University Press, 2010.
- [18] BROUWER, A. E., HAEMERS, W. H. *Spectra of Graphs*. New York, Springer, 2012.
- [19] STEVANOVIĆ, D. *Spectral Radius of Graphs*. Amsterdam, Academic Press, 2015.
- [20] STANIĆ, Z. *Inequalities for graph eigenvalues*. Cambridge, Cambridge University Press, 2015.
- [21] CAO, D., HONG, Y. “Graphs characterized by the second eigenvalue”, *Journal Graph Theory*, v. 17, pp. 325–331, 1993.
- [22] PETROVIĆ, M. “On graphs whose second largest eigenvalue does not exceed $\sqrt{2}-1$ ”, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.*, v. 4, pp. 70–75, 1993.
- [23] CVETKOVIĆ, D., SIMIĆ, S. “On graphs whose second largest eigenvalue does not exceed $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ”, *Discrete Mathematics*, v. 138, pp. 213–227, 1995.
- [24] SIMIĆ, S. “Some notes on graphs whose second largest eigenvalue is less than $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ”, *Linear and Multilinear Algebra*, v. 39, pp. 59–71, 1995.

- [25] SIMIĆ, S. “Complementary pairs of graphs with the second largest eigenvalue not exceeding $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ”, *Publications de L’institut Mathématique (Beograd)*, v. 71, pp. 179–188, 1995.
- [26] CVETKOVIĆ, D. “On graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1”, *Publications de L’institut Mathématique (Beograd)*, v. 31, n. 45, pp. 15–20, 1982.
- [27] PETROVIĆ, M. “On graphs with exactly one eigenvalue less than -1 ”, *Journal Combinatorial Theory*, v. B 52, pp. 102–112, 1991.
- [28] STANIĆ, Z. “On regular graphs and coronas whose second largest eigenvalue does not exceed 1”, *Linear and Multilinear Algebra*, v. 58, n. 5, pp. 545–554, 2010.
- [29] KOLEDIN, T., STANIĆ, Z. “Regular graphs whose second largest eigenvalue is at most 1”, *Novi Sad Journal of Mathematics*, v. 43, n. 1, pp. 145–153, 2013.
- [30] PETROVIĆ, M., MILEKIĆ, B. “Generalized line graphs with the second largest eigenvalue at most 1”, *Publications de L’Institut Mathématique*, v. 68, n. 82, pp. 37–45, 2000.
- [31] XU, G. H. “On unicyclic graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 136, pp. 117–124, 2004.
- [32] GUO, S. G. “On bicyclic graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 407, pp. 201–210, 2005.
- [33] LI, S., YANG, H. “On tricyclic graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 434, pp. 2211–2221, 2011.
- [34] STANIĆ, Z. “Some graphs whose second largest eigenvalue does not exceed $\sqrt{2}$ ”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 437, n. 7, pp. 1812–1820, 2012.
- [35] KOLEDIN, T. “Regular graphs with girth at least 5 and small second largest eigenvalue”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 439, n. 5, pp. 1229–1244, 2013.
- [36] KOLEDIN, T., STANIĆ, Z. “Regular Graphs with Small Second Largest Eigenvalue”, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, v. 7, pp. 235–249, 2013.

- [37] MIHAILOVIĆ, B. L. “Trees whose second largest eigenvalue does not exceed $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ ”, *Applied Mathematics, Informatics and Mechanics*, v. 6, n. 2, pp. 119–129, 2014.
- [38] NEUMAIER, A., SEIDEL, J. J. “Discrete hyperbolic geometry”, *Combinatorica*, v. 3, pp. 219–237, 1983.
- [39] MIHAILOVIĆ, B., RASAJSKI, M., STANIĆ, Z. “Reflexive cacti: a survey”, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, v. 10, pp. 552–568, 2016.
- [40] NORDHAUS, E. A., GADDUM, J. “On complementary graphs”, *American Mathematical Monthly*, v. 63, pp. 175–177, 1956.
- [41] NOSAL, E. *Eigenvalues of Graphs*. Master thesis, University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, 1970.
- [42] NIKIFOROV, V. “Eigenvalue problems of Nordhaus-Gaddum type”, *Discrete Mathematics*, v. 307, pp. 774–780, 2007.
- [43] CSIKVÁRI, P. “On a conjecture of V. Nikiforov”, *Discrete Mathematics*, v. 309, pp. 4522–4526, 2009.
- [44] TERPAI, T. “Proof of a conjecture of V. Nikiforov”, *Combinatorica*, v. 31, n. 6, pp. 739–754, 2011.
- [45] NIKIFOROV, V., YUAN, X. “More eigenvalue problems Nordhaus-Gaddum type”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 451, pp. 231–245, 2014.
- [46] CIOABĂ, S. M., HAEMERS, W. H., VERMETTE, J. D., et al. “The graphs with all but two eigenvalues equal to ± 1 ”, *Journal of Algebraic Combinatorics*, v. 41, pp. 887–897, 2015.
- [47] LIMA, L. S., MOHAMMADIAN, A., OLIVEIRA, C. S. “The non-bipartite graphs with all but two eigenvalues in $[-1, 1]$ ”, *Linear and Multilinear Algebra*, v. 41, pp. 1–19, 2016.
- [48] CIOABĂ, S. M., HAEMERS, W. H., VERMETTE, J. D. “The graphs with all but two eigenvalues equal to -2 or 0 ”, *Designs, Codes and Cryptography*, pp. 1–11, 2016.
- [49] HARARY, F. *Graph Theory*. Philippines, Addison-Wesley, 1969.
- [50] DIESTEL, R. *Graph Theory*. New York, Springer-Verlag Heidelberg, Electronic Edition 2005.

- [51] BALAKRISHNAN, R., RANGANATHAN, K. *A Textbook of Graph Theory*. 2 ed. New York, Springer, 2012.
- [52] BEINEKE, L. W. “Families of Graphs and Digraphs”. In: *Handbook of Graph Theory*, Discrete Mathematics and its Applications, 2 ed., CRC Press, pp. 21–30, New York, 2013.
- [53] GROSS, J. L., YELLEN, J. “Fundamentals of Graph Theory”. In: *Handbook of Graph Theory*, Discrete Mathematics and its Applications, 2 ed., CRC Press, pp. 2–20, New York, 2013.
- [54] HORN, R. A., JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. New York, Cambridge University Press, 1992.
- [55] MEYER, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia, SIAM, 2000.
- [56] SERRE, D. *Matrices: Theory and Applications*. New York, Springer-Verlag, 2002.
- [57] DOOB, M. “Spectral Graph Theory”. In: *Handbook of Graph Theory*, Discrete Mathematics and its Applications, 2 ed., CRC Press, pp. 673–690, New York, 2013.
- [58] KRAUSZ, J. “Demonstration nouvelle d’une théorème de Whitney sur les re-seaux”, *Mat. Fiz. Lapok.*, v. 50, pp. 75–89, 1943.
- [59] BEINEKE, L. W. “Characterizations of derived graphs”, *Journal of Combinatorial Theory*, v. 9, pp. 129–135, 1970.
- [60] HOFFMAN, A. J. “ $-1 - \sqrt{2}$?” In: *Combinatorial Structures and Their Applications*, (R. Guy, Ed.), Gordon and Breach, pp. 173–176, New York, 1970.
- [61] CVETKOVIĆ, D., DOOB, M., SIMIĆ, S. “Some results on generalized line graphs”, *Comptes Rendus Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, v. 2, pp. 147–150, 1980.
- [62] RAO, S. B., SINGHI, N. M., VIJAYAN, K. S. “The minimal forbidden sub-graphs for generalized line-graphs”. In: *Combinatorics and graph theory*, v. 885, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, pp. 459–472, Berlin-Heidelberg, 1981.

- [63] SMITH, J. H. “Some properties of the spectrum of a graph”. In: *Combinatorial Structures and Their Applications, Science Publ.*, Gordon and Breach, pp. 403–406, New York-London-Paris, 1970.
- [64] SCHWENK, A. J. “Computing the characteristic polynomial of a graph”. In: *Graphs and Combinatorics*, n. 406, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, pp. 153–172, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
- [65] CARDOSO, D. M., DE FREITAS, M. A., MARTINS, E. A., et al. “Spectra of graphs obtained by a generalization of the join graph operation”, *Discrete Mathematics*, v. 313, pp. 733–741, 2013.
- [66] WOLK, E. S. “The comparability graph of a tree”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 13, pp. 789–795, 1962.
- [67] WOLK, E. S. “A note on “The comparability graph of a tree””, *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 16, pp. 17–20, 1965.
- [68] GRONE, R., MERRIS, R. “Ordering Trees by Algebraic Connectivity”, *Graphs and Combinatorics*, v. 6, pp. 229–237, 1990.
- [69] GROSSMAN, J. W., HARARY, F., KLAWE, M. “Generalized Ramsey Theory for Graphs, X: Double Stars”, *Discrete Mathematics*, v. 28, pp. 247–254, 1979.
- [70] NIKIFOROV, V. “The maximum spectral radius of C_4 -free graphs of given order and size”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 430, pp. 2898–2905, 2009.
- [71] FAVARON, O., MAHÉO, M., SACLÉ, J. F. “Some eigenvalues properties in graphs (Conjectures of Graffiti – II)”, *Discrete Mathematics*, v. 111, pp. 197–220, 1993.
- [72] NIKIFOROV, V. “Bounds on graph eigenvalues I”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 420, pp. 667–671, 2007.
- [73] HONG, Y. “A bound on the spectral radius of a graph”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 108, pp. 135–139, 1988.
- [74] COLLATZ, L., SINOGOWITZ, U. “Spektren Endlicher Grafen”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, v. 21, pp. 63–77, 1957.
- [75] SIMIĆ, S. “On the largest eigenvalue of unicyclic graphs”, *Publications de L’institut Mathématique (Beograd)*, v. 42, n. 56, pp. 13–19, 1987.

- [76] HONG, Y. “Bounds of eigenvalues of a graph”, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, v. 4, n. 2, pp. 165–168, 1988.
- [77] MERRIS, R. “Laplacian graph eigenvectors”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 278, pp. 221–236, 1998.
- [78] DOOB, M. “A surprising property of the least eigenvalue of a graph”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 46, pp. 1–7, 1982.
- [79] CONSTANTINE, G. “Lower Bounds on the Spectra of Symmetric Matrices with Nonnegative Entries”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 65, pp. 171–178, 1985.
- [80] HOFFMAN, A. J. “On graphs whose least eigenvalue exceeds $-1 - \sqrt{2}$ ”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 16, pp. 153–165, 1977.
- [81] CAMERON, P. J., GOETHALS, J. M., SEIDEL, J. J., et al. “Line Graphs, Root Systems and Elliptic Geometry”, *Journal of Algebra*, v. 43, pp. 305–327, 1976.
- [82] DOOB, M., CVETKOVIĆ, D. “On spectral characterizations and embeddings of graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 27, pp. 17–26, 1979.
- [83] CVETKOVIĆ, D., ROWLINSON, P., SIMIĆ, S. *Spectral Generalizations of Line Graphs: On Graphs with Least Eigenvalue -2* , v. 66. Cambridge, Cambridge University Press, 2004.
- [84] HONG, Y. “The k th largest eigenvalue of a tree”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 73, pp. 151–155, 1986.
- [85] HOWES, L. “On subdominantly bounded graphs – summary of results”. In: *Recent Trends in Graph Theory*, v. 186, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, pp. 181–183, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [86] POWERS, D. “Graph partitioning by eigenvectors”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 101, pp. 121–133, 1988.
- [87] ZHAI, M., LIN, H., WANG, B. “Sharp upper bounds on the second largest eigenvalues of connected graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 437, pp. 236–241, 2012.
- [88] NEUMAIER, A. “The second largest eigenvalue of a tree”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 46, pp. 9–25, 1982.

- [89] SHAO, J. “On the largest k th eigenvalues of trees”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 221, pp. 131–157, 1995.
- [90] CVETKOVIĆ, D. “Some possible directions in further investigations of graph spectra”. In: *Algebraic Methods in Graph Theory*, v. 2, *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai*, Elsevier Science Ltd, pp. 47–67, Amsterdam, North-Holland, 1981.
- [91] KOLEDIN, T., STANIĆ, Z. “Some spectral inequalities for triangle-free regular graphs”, *Filomat*, v. 28, pp. 1561–1567, 2013.
- [92] ALON, N. “Eigenvalues and Expanders”, *Combinatorica*, v. 6, pp. 83–96, 1986.
- [93] NILLI, A. “On the second eigenvalue of a graph”, *Discrete Mathematics*, v. 91, pp. 207–210, 1991.
- [94] BUSSEMAKER, F. C., COBELJIĆ, S., CVETKOVIĆ, D., et al. *Computer investigation of cubic graphs*. T. H. Report 76-WSK-01, Technological University Eindhoven, Netherlands, 1976.
- [95] LUBOTZKY, A., PHILLIPS, R., SARNAK, P. “Explicit Expanders and the Ramanujan Conjectures”. In: *Proceedings of the Eighteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 240–246, New York, 1986.
- [96] BIEN, F. “Constuction of Telephone Networks by Group Representations”, *Notices of the Amer. Math. Society*, v. 36, n. 1, pp. 5–22, 1989.
- [97] MURTY, M. R. “Ramanujan Graphs”, *J. Ramanujan Math. Soc.*, v. 18, n. 1, pp. 1–20, 2003.
- [98] FRIEDMAN, J. *A proof of Alon’s second eigenvalue conjecture and related problems*. New York, Memoirs of AMS 195, 2008.
- [99] MARCUS, A. W., SPIELMAN, D. A., SRIVASTAVA, N. “Interlacing families I: Bipartite Ramanujan graphs of all degrees”, *Annals of Mathematics*, v. 182, n. 1, pp. 307–325, 2015.
- [100] HONG, Y. “Sharp lower bounds on the eigenvalues of trees”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 113, pp. 101–105, 1989.
- [101] SHU, J. L. “On trees whose second largest eigenvalue does not exceed 1”, *Operations Research Transactions*, v. 2, n. 3, pp. 6–9, 1998.
- [102] PETROVIĆ, M., MILEKIĆ, B. “On the second largest eigenvalue of line graphs”, *Journal of Graph Theory*, v. 27, n. 2, pp. 61–66, 1998.

- [103] GAO, M. F., HUANG, Q. X. “On generalized θ -graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1”, *Discrete Mathematics*, v. 308, n. 23, pp. 5849–5855, 2008.
- [104] CVETKOVIĆ, D., SIMIĆ, S. “Minimal graphs whose second largest eigenvalue is not less than $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ”, *Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math.*, v. 121, n. 25, pp. 47–70, 2000.
- [105] AOUCHE, M., HANSEN, P. “A survey of Nordhaus-Gaddum type relations”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 161, pp. 466–546, 2013.
- [106] AMIN, A. T., HAKIMI, S. L. “Upper bounds on the order of a clique of a graph”, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, v. 22, pp. 569–573, 1972.
- [107] AOUCHE, M., BELL, F., CVETKOVIĆ, D. M., et al. “Variable neighborhood search for extremal graphs. 16. Some conjectures related to the largest eigenvalue of a graph”, *European Journal of Operational Research*, v. 191, pp. 661–676, 2008.
- [108] NIKIFOROV, V. “Eigenvalues and degree deviation in graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 414, pp. 347–360, 2006.
- [109] CAPOROSI, G. *Variable neighborhood search for extremal vertices: The system AutoGraphiX-III*. Les Cahiers du GERAD G-2015-09, GERAD & HEC Montréal, Canada, 2015.
- [110] READ, R. C., WILSON, R. J. *An Atlas of Graphs*. New York, Oxford: Clarendon Press, 1998.
- [111] TORGASEV, A. “Graphs whose second least eigenvalue is greater than -1 ”, *Publ. Elektrotehn Fak. Ser. Mat. Fiz.*, v. No. 759, pp. 148–154, 1982.

Apêndice A

Algumas demonstrações

Aqui seguem provas de alguns resultados da Seção 5.

Lema 5.8. *Sejam r , s e q inteiros positivos tais que $r \leq s$ e seja $G \simeq qK_1 \vee (K_1 \cup K_{r,s})$. Tem-se $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2} - 1$ se e somente se uma das seguintes condições é verdadeira:*

(i) $r > 1$, $s \geq r$ e $q = 1$;

(ii) $r = 1$, $s \geq 1$ e $q \geq 2$;

(iii) $r = 2$, $s \geq 2$ e $q = 2$;

(iv) $r = 2$, $2 \leq s \leq 3$ e $q \geq 3$;

(v) $r = 2$, $s = 4$ e $3 \leq q \leq 7$;

(vi) $r = 2$, $s = 5$ e $3 \leq q \leq 4$;

(vii) $r = 2$, $6 \leq s \leq 8$ e $q = 3$;

(viii) $r = 3$, $s = 3$ e $2 \leq q \leq 4$;

(ix) $r = 3$, $4 \leq s \leq 7$ e $q = 2$;

(x) $r = 4$, $s = 4$ e $q = 2$.

Demonstração. Note que $G = (V, E)$ é um grafo de ordem $n = r + s + q + 1$ e o conjunto V pode ser particionado em quatro conjuntos independentes:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V; d(v) = q\}, \\ V_2 &= \{v \in V; d(v) = s + q\}, \\ V_3 &= \{v \in V; d(v) = r + q\}, \\ V_4 &= \{v \in V; d(v) = r + s + 1\}, \end{aligned}$$

onde $|V_1| = 1$, $|V_2| = r$, $|V_3| = s$ e $|V_4| = q$. Além disso, V_2 , V_3 e V_4 são conjuntos de vértices gêmeos não adjacentes. Portanto, da Proposição 2.27, $\lambda = 0$ é um autovalor de G com multiplicidade, no mínimo, $r + s + q - 3$.

Para determinar os quatro últimos autovalores de G , note que a matriz de adjacência de G pode ser escrita como

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times r} & \mathbf{0}_{1 \times s} & \mathbf{1}_{1 \times q} \\ \mathbf{0}_{r \times 1} & 0_r & J_{r \times s} & J_{r \times q} \\ \mathbf{0}_{s \times 1} & J_{s \times r} & \mathbf{0}_s & J_{s \times q} \\ \mathbf{1}_{q \times 1} & J_{q \times r} & J_{q \times s} & 0_q \end{bmatrix}.$$

A matriz $A(G)$ é uma matriz em blocos cuja soma das linhas satisfazem as hipóteses da Proposição 2.9. Assim obtém-se a matriz

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & s & q \\ 0 & r & 0 & q \\ 1 & r & s & 0 \end{bmatrix},$$

cujas entradas são iguais as somas das linhas dos blocos de $A(G)$ e tem

$$f(x) = x^4 - [(r + q)s + (r + 1)q]x^2 - 2qrsx + qrs$$

como polinômio característico.

Pela Proposição 2.9,

$$P_G(x) = x^{n-4} (x^4 - [(r + q)s + (r + 1)q]x^2 - 2qrsx + qrs).$$

Os autovalores não nulos do grafo G são as raízes da equação $f(x) = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} f(0) &= qrs > 0; \\ f(\sqrt{2} - 1) &= (3 - 2\sqrt{2})(qrs - rs - qs - qr - q) + (3 - 2\sqrt{2})^2; \\ f(1) &= -q(r + 1)(s + 1) - rs + 1 < 0. \end{aligned}$$

Logo, f possui uma raiz no intervalo $(0, 1)$, pelo Teorema 2.30 a menor raiz de f é negativa e pelo Teorema 2.10 a maior raiz de f excede 1. Como $f(0) > 0$ e f é um polinômio de grau par segue que f possui exatamente duas raízes positivas.

Dessa forma, $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2} - 1$ se e somente se $f(\sqrt{2} - 1) \leq 0$, o que equivale a encontrar as soluções inteiras da inequação

$$T(q, r, s) = qrs - rs - qs - qr - q < 0.$$

Tais soluções são descritas nos seis casos a seguir.

Caso 1. Se $r > 1$ então

$$\begin{aligned} T(q, r, s) &= -r(s + q - qs) - qs - q & (A.1) \\ &< -2s - 2q + 2qs - qs - q \\ &= qs - 2s - 3q = s(q - 2) - 3q. \end{aligned}$$

Assim, se $q = 1$ então $T(q, r, s) < -s - 3 < 0$ para todo $s \geq 2$.

Caso 2. Se $r = 1$ então, da equação (A.1), $T(q, 1, s) = -s - 2q < 0$ para quaisquer $s \geq 1$ e $q \geq 2$.

Caso 3. Se $r = 2$ então, da equação (A.1),

$$T(q, 2, s) = s(q - 2) - 3q. \quad (A.2)$$

Se $q = 2$ então $T(2, 2, s) = -6 < 0$ para todo $s \geq 2$.

Para verificar as demais soluções, determinemos os valores de $q \geq 3$, na equação (A.2), em função de s .

- Se $s = 2$ então $T(q, 2, 2) = -q - 4 < 0$ para todo $q \geq 3$;
- se $s = 3$ então $T(q, 2, 3) = -6 < 0$ para todo $q \geq 3$;
- se $s = 4$ então $T(q, 2, 4) = q - 8 < 0$ para $q \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$;
- se $s = 5$ então $T(q, 2, 5) = 2q - 10 < 0$ para $q \in \{3, 4\}$;
- se $s = 6$ então $T(q, 2, 6) = 3q - 12 < 0$ para $q = 3$;
- se $s = 7$ então $T(q, 2, 7) = 4q - 14 < 0$ para $q = 3$;
- se $s = 8$ então $T(q, 2, 8) = 5q - 16 < 0$ para $q = 3$;
- se $s \geq 9$ então

$$\begin{aligned} T(q, 2, s) &= s(q - 2) - 3q \\ &\geq 6q - 18. \end{aligned}$$

Logo $T(q, 2, s) \geq 0$ para todo $q \geq 3$ sempre que $s \geq 9$.

Caso 4. Se $r = 3$ então, da equação (A.1),

$$T(q, 3, s) = 2q(s - 2) - 3s. \quad (A.3)$$

Como no caso anterior, determinemos os valores de q , na equação (A.3), para os quais $T(q, 3, s) < 0$ em função de $s \geq 3$.

- Se $s = 3$ então $T(q, 3, 3) = 2q - 9 < 0$ para $q \in \{2, 3, 4\}$;
- se $s = 4$ então $T(q, 3, 4) = 4q - 12 < 0$ para $q = 2$;
- se $s = 5$ então $T(q, 3, 5) = 6q - 15 < 0$ para $q = 2$;
- se $s = 6$ então $T(q, 3, 6) = 8q - 18 < 0$ para $q = 2$;
- se $s = 7$ então $T(q, 3, 7) = 10q - 21 < 0$ para $q = 2$;
- se $s \geq 8$ então

$$\begin{aligned} T(q, 3, s) &= s(2q - 3) - 4q \\ &\geq 12q - 24. \end{aligned}$$

Assim, se $s \geq 8$ tem-se $T(q, 3, s) \geq 0$ para todo $q \geq 2$.

Caso 5. Se $r = 4$ então, da equação (A.1),

$$T(q, 4, s) = q(3s - 5) - 4s. \quad (\text{A.4})$$

Determinemos os valores de $q \geq 2$, na equação (A.4), para que $T(q, 4, s) < 0$ de acordo com os valores do parâmetro $s \geq 4$.

- Se $r = 4$ então $T(q, 4, 4) = 7q - 16 < 0$ para $q = 2$;
- se $s \geq 5$ então

$$\begin{aligned} T(q, 4, s) &= s(3q - 4) - 5q \\ &\geq 10q - 20. \end{aligned}$$

Nesta situação tem-se $T(q, 4, s) \geq 0$ para todo $q \geq 2$.

Por fim, mostremos que $T(q, r, s) \geq 0$ para todo $r \geq 5$.

Caso 6. Se $r \geq 5$ então

$$\begin{aligned} T(q, r, s) &= r(qs - s - q) - qs - q \\ &\geq 4qs - 5s - 6q \\ &= s(4q - 5) - 6q \\ &\geq 14q - 25. \end{aligned}$$

Portanto, $T(q, r, s) \geq 0$ para todo $q \geq 2$ sempre que $r \geq 5$. O que conclui a demonstração do lema.

□

Lema 5.9. Sejam r, s, p e q inteiros positivos tais que $r \leq s, p \leq q$ e seja $G \simeq K_{p,q} \vee (K_1 \cup K_{r,s})$. Tem-se $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2} - 1$ se e somente se uma das seguintes condições é verdadeira:

- (i) $r = 1, s = 1$ e $1 \leq p \leq q$;
- (ii) $r = 1, s = 2, 1 \leq p \leq 2$ e $p \leq q$;
- (iii) $r = 1, s = 2, p = 3$ e $3 \leq q \leq 7$;
- (iv) $r = 1, s = 2, p = 4$ e $q = 4$;
- (v) $r = 1, s = 3, p = 1$ e $q = 1$.

Demonstração. A matriz de adjacência de G pode ser escrita da forma

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times r} & \mathbf{0}_{1 \times s} & \mathbf{1}_{1 \times p} & \mathbf{1}_{1 \times q} \\ \mathbf{0}_{r \times 1} & 0_r & J_{r \times s} & J_{r \times p} & J_{r \times q} \\ \mathbf{0}_{s \times 1} & J_{s \times r} & \mathbf{0}_s & J_{s \times p} & J_{s \times q} \\ \mathbf{1}_{p \times 1} & J_{p \times r} & J_{p \times s} & 0_p & J_{p \times q} \\ \mathbf{1}_{q \times 1} & J_{q \times r} & J_{q \times s} & J_{q \times p} & 0_q \end{bmatrix}.$$

Assim obtém-se a matriz

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & s & p & q \\ 0 & r & 0 & p & q \\ 1 & r & s & 0 & q \\ 1 & r & s & p & 0 \end{bmatrix},$$

cujo polinômio característico é

$$p(x) = x^5 - (pq + rs + (p + q)(r + s + 1))x^3 - 2(rs(p + q) + pq(r + s + 1))x^2 - (3qrs - rs(p + q))x + 2pqrs.$$

Pela Proposição 2.9, $P_G(x) = x^{n-5}p(x)$. Observe que o grafo $H = K_{p,q} \vee K_{r,s} \simeq K_{p,q,r,s}$ é um subgrafo induzido de G , obtido pela remoção do vértice isolado do grafo $K_1 \cup K_{r,s}$. Logo do Teorema 3.4, $\lambda_2(H) = 0$. Como G não é um grafo multipartido completo segue dos Teoremas 2.28 e 3.4 que $\lambda_3(G) \leq \lambda_2(H) = 0 < \lambda_2(G)$. Além disso, como os autovalores não nulos de G são as raízes do polinômio $p(x)$ segue que este possui exatamente duas raízes positivas.

Como $p(0) = 2pqrs > 0$, para determinar os grafos para os quais $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2} - 1$ precisamos determinar as soluções inteiras da inequação $p(\sqrt{2} - 1) \leq 0$.

Como $p(\sqrt{2} - 1) = (5\sqrt{2} - 7)T(p, q, r, s) + 29\sqrt{2} - 41$, onde

$$T(p, q, r, s) = \left((5 + 4\sqrt{2})pq + p - q - 1 \right) rs - \left(2pq(1 + \sqrt{2} + p + q) \right) (s + r + 1) - pq$$

e $0 < 29\sqrt{2} - 41 < 5\sqrt{2} - 7$, para que $p(\sqrt{2} - 1) \leq 0$ basta determinar as soluções inteiras da inequação $T(p, q, r, s) < 0$.

Determinamos o conjunto solução dessa inequação nos dois casos a seguir.

Caso 1. Para $r = 1$ tem-se a inequação

$$T(p, q, 1, s) = \left((3 + 2\sqrt{2}pq - 1) \right) s - (5 + 4\sqrt{2})pq - 2p - 2q < 0. \quad (\text{A.5})$$

Para determinar as soluções inteiras de (A.5) explicitamos q para cada variação dos parâmetros s e p .

- Se $s = 1$ em (A.5) tem-se

$$T(p, q, 1, 1) = - \left((2 + 2\sqrt{2})pq + 2p + 2q + 1 \right) < 0$$

para quaisquer inteiros p e q tais que $1 \leq p \leq q$.

- Fazendo $s = 2$ em (A.5) tem-se

$$T(p, q, 1, 2) = pq - 2p - 2q - 2 < 0. \quad (\text{A.6})$$

Determinamos as soluções inteiras da inequação (A.5) atribuindo valores para p em (A.6).

- Se $p = 1$ então $T(1, q, 1, 2) = -q - 4 < 0$ para qualquer $q \geq 1$;
- se $p = 2$ então $T(2, q, 1, 2) = -6 < 0$ para qualquer $q \geq 1$;
- se $p = 3$ então $T(3, q, 1, 2) = q - 8 < 0$ para $q \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$;
- se $p = 4$ então $T(4, q, 1, 2) = 2q - 10 < 0$ para $q = 4$;
- se $p \geq 5$ então de (A.6)

$$\begin{aligned} T(p, q, 1, 2) &= p(q - 2) - 2q - 2 \\ &\geq 3q - 12 \geq 0 \end{aligned}$$

para todo $q \geq 4$, isto é, a inequação (A.6) não possui soluções inteiras para o caso $5 \leq p \leq q$.

- Quando $s = 3$ em (A.5) obtemos

$$T(p, q, 1, 3) = (4 + 2\sqrt{2})pq - 2p - 2q - 3.$$

- Se $p = 1$ então $T(1, q, 1, 3) = (2 + 2\sqrt{2})q - 5 < 0$ se $q = 1$;
- se $p \geq 2$

$$\begin{aligned} T(p, q, 1, 3) &= p \left((3 + 2\sqrt{2})q - 2 \right) - 2q - 3 \\ &\geq (6 + 4\sqrt{2})q - 5 \geq 0 \end{aligned}$$

para todo $q \geq 2$.

- Se $s \geq 4$ tem-se

$$\begin{aligned} T(p, q, 1, s) &= \left((3 + 2\sqrt{2})pq - 1 \right) s - (5 + 4\sqrt{2})pq - 2p - 2q \\ &\geq p \left((7 + 4\sqrt{2})q - 2 \right) - 2q - 4 \\ &\geq 4\sqrt{2} - 1 > 0 \end{aligned}$$

para quaisquer inteiros p e q tais que $1 \leq p \leq q$. Logo a inequação (A.5) não possui soluções se $s \geq 4$.

Caso 2. Se $2 \leq r \leq s$ então

$$\begin{aligned} T(p, q, r, s) &= r \left[\left((5 + 4\sqrt{2})pq + p + q - 1 \right) s - \left((2 + 2\sqrt{2})pq + p + q \right) \right] \\ &\quad - \left((2 + 2\sqrt{2})pq + p + q \right) (s + 1) - pq \\ &\geq s \left((8 + 6\sqrt{2})pq + p + q - 2 \right) - 3 \left((2 + 2\sqrt{2})pq + p + q \right) - pq \\ &\geq (9 + 6\sqrt{2})pq - p - q - 4 = p \left((9 + 6\sqrt{2})q - 1 \right) - q - 4 \\ &\geq 3 + 6\sqrt{2} > 0 \end{aligned}$$

para quaisquer inteiros p e q satisfazendo $1 \leq p \leq q$. Portanto a inequação $T(p, q, r, s) < 0$ não admite soluções quando $2 \leq r \leq s$. O que completa a prova do lema. □

Índice Remissivo

- arestas adjacentes, 4
- autovalor, 13
 - semissimples, 14
 - simples, 14
- autovalores
 - não extremais, 77
 - extremais, 77
- autovetor, 14

- caminho, 5
- caminhos internamente disjuntos, 41
- cintura, 6
- Classe de grafos, 7
- clique, 5
- componente, 6
- conjunto independente, 5
- cota
 - NG_2 , 64

- diâmetro, 5
- diagonal principal, 13
- distância
 - entre arestas, 29

- entradas diagonais, 13
- espectro
 - de uma matriz, 14

- grafo, 4
 - k -cíclico, 6
 - k -partido, 6
 - k -partido r -balanceado, 6
 - k -partido completo, 6
 - r -regular, 5
 - árvore, 7
 - split* completo, 12
 - índice, 16
 - split*, 12
 - esporádico, 77
 - autocomplementar, 9
 - bipartido, 6
 - bipartido completo, 6
 - caminho, 7
 - ciclo, 5
 - complementar, 5
 - completo, 5
 - conexo, 5
 - coquetel, 6
 - desconexo, 5
 - dupla estrela, 12
 - dupla pipa, 27
 - dupla vassoura, 12
 - estrela, 7
 - excepcional, 22
 - floresta, 7
 - linha, 7
 - linha generalizado, 8
 - raio espectral, 16
 - theta grafo, 41
 - theta grafo generalizado, 41
 - vazio, 5
- grafos
 - isomorfos, 9

- invariante, 9

- matriz, 12
 - adjacência, 15
 - diagonalizável, 14

- ortogonal, 13
- permutação, 13
- diagonal, 13
- identidade, 13
- inversa, 13
- irredutível, 13
- não negativa, 13
- não singular, 13
- redutível, 13
- simétrica, 13
- transposta, 13
- multiplicidade
 - algébrica, 14
 - geométrica, 14
- Operação
 - H -junção, 10
 - coalescência, 10
 - junção, 9
 - união disjunta, 9
- polinômio característico, 14
- raio espectral, 14
- subgrafo, 5
 - abrangente, 6
 - induzido, 6
 - maximal, 5
 - próprio, 5
 - proibido, 7
- supergrafo, 5
- vértice
 - isolado, 4
 - pendente, 4
 - quase pendente, 5
 - universal, 5
- vértices
 - adjacentes, 4
 - gêmeos falsos, 5
 - gêmeos verdadeiros, 5
- vetor
 - de Faria, 18
 - coluna, 13
 - linha, 13