

ANÁLISES DE DIFERENTES ABORDAGENS PARA UM PROBLEMA DE
LOCALIZAÇÃO-ALOCAÇÃO DE ARMAZÉNS UTILIZANDO TÉCNICAS DE
PROGRAMAÇÃO INTEIRA-MISTA

Renato Pescarini Valério

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientadores: Laura Sílvia Bahiense da Silva
Leite
Virgílio José Martins Ferreira
Filho

Rio de Janeiro

Abril de 2016

ANÁLISES DE DIFERENTES ABORDAGENS PARA UM PROBLEMA DE
LOCALIZAÇÃO-ALOCAÇÃO DE ARMAZÉNS UTILIZANDO TÉCNICAS DE
PROGRAMAÇÃO INTEIRA-MISTA

Renato Pescarini Valério

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Examinada por:

Profa. Laura Silvia Bahiense da Silva Leite, D.Sc.

Prof. Virgílio José Martins Ferreira Filho, D.Sc.

Prof. Lino Guimarães Marujo, D.Sc.

Profa. Lidia Angulo Meza, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2016

Valério, Renato Pescarini

Ánalises de diferentes abordagens para um Problema de Localização-Alocação de Armazéns utilizando técnicas de Programação Inteira-Mista / Renato Pescarini Valério – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

XV, 86p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Laura Sílvia Bahiense da Silva Leite

Virgílio José Martins Ferreira Filho

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia de Produção, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 83-86.

1. Problema de Localização-Alocação de Armazéns. 2. Programação Inteira-Mista. 3. Linearização por Partes. 4. Relaxação Lagrangeana. I. Leite, Laura Sílvia Bahiense da Silva *et al.*. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Produção. III. Título.

You can't connect the dots looking forward; you can only connect them looking backward. So you have to trust that the dots will somehow connect in your future. You have to trust in something – your gut, destiny, life, karma, whatever. This approach has never let me down, and it has made all the difference in my life.

Steve Jobs

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Eliane Cruz Pescarini Valério e Edson Machado Valério, pelo amor incondicional, pela minha educação à qual dedicaram suas vidas, pelo incentivo aos estudos e pelo apoio em todos os momentos da minha vida;

À minha irmã, Camila Pescarini Valério, pelo amor incondicional, pela paciência e apoio nos momentos de dificuldade, pela amizade que temos e por sempre me lembrar do valor que tenho;

Aos meus avós, tios, primos e todos os familiares agradeço muito por sempre acreditarem tanto em mim;

Aos amigos do Colégio Macedo Soares, pela amizade de anos que conseguimos manter até hoje e pelas memórias que estarão sempre guardadas comigo;

Aos amigos da Universidade Federal Fluminense, por terem me apoiado na decisão de fazer este Mestrado, pela compreensão nos momentos em que deixei de estar presente e pela amizade que se mantém;

Aos amigos da Universidade Federal do Rio de Janeiro, pelos momentos e por todo o conhecimento que pudemos compartilhar ao longo deste Mestrado. Em especial à amiga Cecília Lorenzo, por todo o companheirismo durante esses dois anos;

Às amigas Ágatha Borges Teixeira e Maria Luiza Iusten da Silva, em especial, por termos, juntos, compartilhado este momento da vida de forma tão próxima, cada um em sua área de especialização, e por terem me apoiado sempre ao longo desta caminhada;

Aos amigos Leonardo Samarino Lages e Giovana Cópio Vieira, em especial, pela amizade inabalável, pela sintonia que temos de forma conjunta e por terem aberto suas casas para mim tantas vezes durante todos esses anos;

À Prof.^a D.Sc. Laura Silvia Bahiense da Silva Leite por ter aceitado me orientar ao longo do Mestrado, por todo o conhecimento compartilhado, por todo o apoio dado para a realização deste trabalho, pela disponibilidade em todos os momentos que precisei, pela compreensão nos momentos de dificuldade e pelo belo trabalho que faz como educadora e pesquisadora, com enorme amor pela profissão;

Ao Prof. D.Sc. Virgílio José Martins Ferreira Filho por ter aceitado me orientar ao longo do Mestrado, pela enorme contribuição dada a este trabalho e por todo o conhecimento que possui e faz questão de compartilhar com seus alunos;

Ao Prof. D.Sc. Lino Guimarães Marujo por aceitar o meu convite para participar da banca que examinou este trabalho e por colaborar com o aperfeiçoamento desta dissertação;

À Prof.^a D.Sc. Lidia Angulo-Meza por aceitar o meu convite para participar da banca que examinou este trabalho e por tudo o que fez por mim ao longo da minha vida acadêmica, o que foi essencial para que eu pudesse chegar onde cheguei;

A todos os professores e funcionários do PEP (Programa de Engenharia de Produção) que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho;

À Agência Nacional de Petróleo (ANP), ao Programa PRH-21 e à Petrobras, que forneceram o auxílio financeiro indispensável para a realização deste trabalho;

Por fim, agradeço a Deus por mais essa conquista.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISES DE DIFERENTES ABORDAGENS PARA UM PROBLEMA DE
LOCALIZAÇÃO-ALOCAÇÃO DE ARMAZÉNS UTILIZANDO TÉCNICAS DE
PROGRAMAÇÃO INTEIRA-MISTA

Renato Pescarini Valério

Abril/2016

Orientadores: Laura Sílvia Bahiense da Silva Leite

Virgílio José Martins Ferreira Filho

Programa: Engenharia de Produção

Este trabalho propõe o estudo de um problema de Localização-Alocação de Armazéns através de técnicas de Programação Inteira-Mista, integrando decisões estratégicas de localização de facilidades com decisões táticas de gestão de estoques. O problema consiste no projeto de um sistema de produção, estocagem e distribuição multi-produtos no qual os estoques de ciclo e de segurança são consolidados em armazéns. Os dois diferentes modelos estudados são originalmente formulados como modelos de programação inteira mista não-linear, devido a não-linearidade da expressão utilizada para o cálculo do estoque de segurança de cada cliente. Para linearização de ambos os modelos é utilizado um método de Linearização por Partes e dois métodos de realização do cálculo dos parâmetros utilizados nas restrições de linearização são comparados em relação ao erro de linearização. Posteriormente, considerando o modelo que apresentou o menor tempo médio de processamento e o método de cálculo dos parâmetros de linearização que apresentou o menor erro médio de linearização, mais teste são feitos objetivando-se a redução do tempo de processamento. Primeiramente, um grupo de restrições é declarado como sendo do tipo SOS1 e o tempo de processamento é analisado. Por fim, uma abordagem de Decomposição Lagrangeana que explora a estrutura do problema em dois elos é utilizada e os resultados são apresentados.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ANALYSIS OF DIFFERENT APPROACHES FOR AN INVENTORY LOCATION-
ALLOCATION PROBLEM USING MIXED-INTEGER PROGRAMMING
TECHNIQUES

Renato Pescarini Valério

April/2016

Advisors: Laura Sílvia Bahiense da Silva Leite

Virgílio José Martins Ferreira Filho

Department: Industrial Engineering

This work proposes the study of an Inventory Location-Allocation Problem using Mixed-Integer Programming Techniques, integrating strategic decisions concerning facilities location with tactical decisions concerning inventory management. The problem consists on the design of a multi-product production, stocking and distribution system in which the safety stock inventory and the cycle stock inventory are consolidated in distribution centers. The two different models studied are originally formulated as nonlinear mixed-integer programming models because of the nonlinearity in the expression used for calculating the safety stock level for each client. In order to turn both of them into linear models, a Piecewise Linearization method is used and two methods of calculating the linearization constraints parameters are compared regarding the linearization error. Afterwards, considering the model that presented the lowest average runtime and the calculation method of the linearization constraints parameters that presented the lowest average linearization error, more essays are done in order to decrease the runtime. Firstly, a group of constraints is declared as SOS1 constraints and the runtime is analysed. Finally, a Lagrangean Decomposition approach which explores the problem's two-echelon structure is used and the results found are presented.

Sumário

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Justificativa e Motivação	2
1.2 Objetivos	2
1.3 Estrutura	3
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1 Modelos Básicos de Gestão de Estoques	5
2.2 Estoque de Segurança	7
2.3 Centralização de Estoques	9
2.4 Problemas de Localização de Facilidades	12
2.4.1 Problemas de Localização de Facilidades que desconsideram Custos de Estoques	13
2.4.2 Problemas de Localização de Facilidades que consideram Custos de Estoques Simplificados	14
2.4.3 Problemas de Localização de Facilidades que consideram os efeitos de Centralização de Estoques de Segurança	15
2.4.4 Problemas de Localização de Facilidades que consideram os efeitos de Centralização de Estoques na Indústria de Petróleo e Gás	17
2.4.5 Quadro Resumo da Revisão Bibliográfica dos Problemas de Localização de Facilidades	19
3 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	21
3.1 Premissas e Hipóteses	22
4 METODOLOGIA	24
4.1 Modelagem Matemática	24
4.1.1 Modelo 1	27
4.1.2 Modelo 2	33
4.2 Segmentação na Linearização Por Partes	36
4.2.1 Segmentação do Eixo das Abscissas	36
4.2.2 Cálculo dos Parâmetros de Linearização	38
4.3 Uso de Conjuntos Especialmente Ordenados do Tipo 1 (SOS1)	41
4.4 Decomposição Lagrangeana	42
4.5 Geração de Instâncias	47
5 EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE	52
5.1 Comparação entre a Linearização por Partes Completa e a Linearização por Partes Simplificada	52

5.2 Influência do Número de Produtos	62
5.3 Comparação entre Modelo 1 com e sem a declaração de tipo SOS1	65
5.4 Desempenho da Abordagem por Decomposição Lagrangeana.....	69
6 CONCLUSÕES.....	79
6.1 Trabalhos Futuros	81
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	83

Lista de Figuras

Figura 1 - Gráfico Dente-de-Serra.....	6
Figura 2 - Custos em Função do Lote de Ressuprimento Q.....	7
Figura 3 - Distribuição Normal - Demanda durante o <i>Lead Time</i>	9
Figura 4 - Divisão em Elos do Problema de Localização-Alocação de Armazéns	22
Figura 5 - Primeira Perspectiva	25
Figura 6 - Segunda Perspectiva	25
Figura 7 - Linearização por Partes.....	30
Figura 8 - Segmentação das Abscissas Uniformes.....	37
Figura 9 - Segmentação das Ordenadas Uniformes	38
Figura 10 - Tempo Médio por N° de Segmentos (Modelo 1 - SAU)	55
Figura 11 - Tempo Médio por N° de Segmentos (Modelo 1 - SOU)	55
Figura 12 - Tempo Médio por N° de Segmentos (Modelo 2 - SAU)	56
Figura 13 - Tempo Médio por N° de Segmentos (Modelo 2- SOU)	56
Figura 14 - Erro Médio de Linearização	57
Figura 15 - Erro Médio por N° de Segmentos (Modelo 1 - SAU).....	59
Figura 16 - Erro Médio por N° de Segmentos (Modelo 1 - SOU).....	59
Figura 17 - Erro Médio por N° de Segmentos (Modelo 2 - SAU).....	60
Figura 18 - Erro Médio por N° de Segmentos (Modelo 2 - SOU).....	60
Figura 19 - Erro Médio por N° de Segmentos (Modelo 1).....	61
Figura 20 - Análise de Tempos do Algoritmo do Subgradiente.....	75
Figura 21 - Análise de Tempos do Algoritmo do Subgradiente - Limite Máximo de Passos	76
Figura 22 - Análise de Tempos do Algoritmo do Subgradiente - Limite Máximo de Tempo.....	77
Figura 23- Análise de Tempos do Algoritmo do Subgradiente - Tamanho de Passo	77

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Quadro Resumo da Revisão Bibliográfica	20
Tabela 2 - Lista de índices e conjuntos utilizados nas formulações	26
Tabela 3 - Lista parâmetros utilizados nas formulações	27
Tabela 4 - Lista de variáveis utilizadas nas formulações	27
Tabela 5 - Lista de símbolos utilizados no Algoritmo do Subgradiente	47
Tabela 6 - Tempo Médio de Processamento e Erro Médio de Linearização por segmentos	53
Tabela 7 - Tempo Médio de Processamento	54
Tabela 8 - Erro Médio de Linearização	58
Tabela 9 - Contagem dos experimentos por tipo de solução	63
Tabela 10 - Tempo Médio de Processamento por quantidade de produtos	64
Tabela 11 - <i>Gap</i> de Otimalidade para instâncias com 3 e 5 produtos e soluções não- ótimas	64
Tabela 12 - Modelo 1 Padrão x SOS1	67
Tabela 13 - Modelo 1 Padrão x SOS1 - Instâncias com Diferenças Significativas.....	68
Tabela 14 - Resultados da Decomposição Lagrangeana - Primal Ótimo	72
Tabela 15 - Resultados da Decomposição Lagrangeana - Primal Não-Ótimo	73

Lista de Símbolos

$i \in I$	Índice de produtos
$j \in J$	Índice de potenciais fornecedores a serem utilizados
$k \in K$	Índice de potenciais armazéns a serem abertos
$l \in L$	Índice de clientes
$r \in R$	Índice de segmentos na aproximação por linearização por partes
f_j	Custo fixo operacional anual do fornecedor j
P_j	Capacidade anual de produção do fornecedor j
c_{ijk}	Custo unitário de produção e envio do produto i a partir do fornecedor j até o armazém k
g_k	Custo anual de abertura do armazém k
h_{ik}	Custo anual unitário de manutenção de estoques do produto i no armazém k
V_k	Capacidade total de armazenagem no armazém k
Γ	Horizonte de planejamento: número de dias de operação em um ano
t_{ikl}	Custo unitário de transporte do produto i a partir do armazém k até o cliente l
φ_{kl}	Lead time médio de transporte a partir do armazém k até o cliente l
ξ_{kl}	Cobertura de clientes: 1 se o cliente l puder ser abastecido pelo armazém k ; 0 caso contrário
μ_{il}	Média da demanda diária do produto i por parte do cliente l
σ_{il}^2	Variância da demanda diária do produto i por parte do cliente l
α	Nível de serviço desejado para os clientes
Z_α	Fator de segurança correspondente ao nível de serviço alfa desejado pelos clientes
F_{ik}^r	Coefficiente linear do segmento r na aproximação por linearização por partes da função do estoque de segurança
C_{ik}^r	Coefficiente angular do segmento r na aproximação por linearização por partes da função do estoque de segurança
L_{ik}^r	Limitante superior da abscissa do segmento r na aproximação por linearização por partes da função do estoque de segurança
SS_{ik}	Estoque de segurança do produto i consolidado no armazém k

w_j	Escolha de fornecedores: 1 se o fornecedor j for utilizado ; 0 caso contrário
x_{ijk}	Número de unidades do produto i produzidas pelo fornecedor j e enviadas ao armazém k (Modelo 1)
x_{ijkl}	Número de unidades do produto i produzidas pelo fornecedor j e enviadas ao armazém k a fim de atender a demanda do cliente l (Modelo 2)
xS_{ijk}	Número de unidades do produto i produzidas pelo fornecedor j e enviadas ao armazém k a fim de suprir seu estoque de segurança (Modelo 2)
z_k	Abertura de armazéns: 1 se o armazém k for aberto ; 0 caso contrário
y_{ikl}	Alocação de clientes: 1 se o cliente l recebe o produto i através do armazém k ; 0 caso contrário
u_{ik}^r	Variável auxiliar binária da linearização por partes da função do estoque de segurança: 1 se o segmento r está ativo na aproximação do estoque de segurança produto i no armazém k
v_{ikl}^r	Variável auxiliar contínua da linearização por partes da função do estoque de segurança
SAU	Segmentação das Abscissas Uniformes
SOU	Segmentação das Ordenadas Uniformes
<i>primal</i>	Parâmetro que contém o melhor limitante primal conhecido
p	Passo atual
$(\lambda_{ik})^p$	Multiplicador de lagrange no passo p para cada i, k
$(z_k)^p$	Valor assumido pela variável $z_k \forall k$ na solução do Subproblema 2 no passo p
$(SS_{ik})^p$	Valor assumido pela variável $SS_{ik} \forall i, k$ na solução do Subproblema 2 no passo p
$(y_{ikl})^p$	Valor assumido pela variável $y_{ikl} \forall i, k, l$ na solução do Subproblema 2 no passo p
$(u_{ik}^r)^p$	Valor assumido pela variável $u_{ik}^r \forall i, k, r$ na solução do Subproblema 2 no passo p
$(v_{ikl}^r)^p$	Valor assumido pela variável $v_{ikl}^r \forall i, k, l, r$ na solução do Subproblema 2 no passo p
$(w_j)^p$	Valor assumido pela variável $w_j \forall j$ na solução do Subproblema 1 no passo

$(x_{ijk})^p$	p Valor assumido pela variável $x_{ijk} \forall i, j, k$ na solução do Subproblema 1 no passo p
$dual^p$	Valor do dual lagrangeano no passo p
$(s_{ik})^p$	Valor do subgradiente no passo p para cada i, k
s^p	Vetor dos subgradientes no passo p
$\ s^p\ $	Norma do vetor dos subgradientes no passo p
μ^p	Tamanho do passo
ϵ	Parâmetro tal que $0 \leq \epsilon \leq 2$

1 INTRODUÇÃO

Projetar um sistema de produção, estocagem e distribuição pode ser um dos problemas mais críticos dentro da gestão de uma cadeia de suprimentos. Ao longo do projeto devem-se tomar inúmeras decisões dentro dos níveis estratégico, tático e operacional. De acordo com Vidyarthi et al. (2007), enquanto as decisões relacionadas às áreas de produção e distribuição estão, em sua maioria, dentro do nível estratégico, aquelas relacionadas ao sistema de estocagem fazem parte do nível tático.

Dentro das decisões estratégicas, a localização de facilidades possui papel de destaque. Deve-se ter muita cautela ao se decidir o local onde será construído um armazém, uma fábrica, ou qualquer outra facilidade de um sistema de uma rede de suprimentos, visto que essa é uma decisão de longo prazo que costuma impactar de forma significativa o desempenho do sistema. Devido à importância da etapa de decisão quanto à localização de facilidades dentro da gestão de cadeias de suprimentos, foi criada um classe de modelos matemáticos específicos para o auxílio à tal decisão: os problemas de localização de facilidades.

Embora, conforme Gebennini, Gamberini, e Manzini (2009), uma completa otimização da rede de suprimentos só possa ser alcançada através da integração das decisões nos níveis estratégico, tático e operacional, a maioria dos estudos existentes na literatura tende a considerar tais decisões separadamente. Em relação aos estudos de localização de facilidades encontrados na literatura, de acordo com Shen, Coullard e Daskin (2003), a grande maioria ignora as decisões táticas relacionadas aos estoques, sendo a recíproca verdadeira, ou seja, a maioria dos estudos de gestão de estoques também ignora o as decisões estratégicas de localização de facilidades.

Integrando as decisões estratégicas de localização de facilidades com as decisões táticas de gestão de estoques, este trabalho propõe o estudo do Problema de Localização-Alocação de Armazéns com Consideração dos Efeitos de Consolidação de Estoques. Este problema consiste em um projeto de produção, estocagem e distribuição de um ou mais produtos, que são enviados dos fornecedores até os armazéns, onde ficarão estocados, e de onde serão enviados para os clientes alocados a tais armazéns. Além dos estoques de ciclo, nas modelagens propostas neste trabalho também são considerados estoques de segurança como forma de proteção contra a falta de estoques, sendo ambos consolidados nos armazéns. O objetivo do estudo, representado pela

função objetivo das modelagens propostas, é a minimização dos custos fixos de localização e abertura das facilidades, dos custos de armazenagem e dos custos de transporte, de forma a criar um projeto de rede de suprimentos otimizado.

1.1 Justificativa e Motivação

O estudo do problema de localização-alocação de armazéns proposto neste trabalho é de grande relevância para qualquer empresa, independentemente de sua área de atuação, visto que se busca otimizar o funcionamento de uma cadeia de suprimentos geral. Para a indústria de petróleo e gás, a grande incentivadora e motivadora para a realização deste trabalho, a aplicação de ferramentas de apoio à decisão podem gerar grandes economias através de ganhos de eficiência na cadeia de suprimentos, devido ao alto volume de investimentos que ali circulam.

Das várias possibilidades de aplicação do problema de localização-alocação de armazéns na indústria de petróleo e gás, Bittencourt (2014) cita a alocação das bases de distribuição dos distribuidores de derivados de petróleo, os quais recebem tais produtos das refinarias e podem consolidar os estoques de segurança dos postos de combustível.

No trabalho de Silva (2012) também é citada outra possibilidade de aplicação deste estudo na indústria de petróleo e gás, a qual se refere ao sistema de suprimento das unidades de produção de petróleo *offshore*, as chamadas Unidades de Produção. Segundo o autor, considerando-se que tais unidades devem ser supridas por armazéns localizados em alto-mar, os quais, por sua vez, devem ser supridos por fornecedores localizados em terra, a aplicação de modelos de localização-alocação de facilidades objetiva a otimização do sistema.

1.2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é realizar um estudo aprofundado do Problema de Localização-Alocação de Armazéns, partindo da comparação entre duas formulações matemáticas propostas por Ferreira Filho e Gendron (2012), as quais também foram utilizadas por Bittencourt (2014) e Bittencourt (2015). Ambas as formulações representam modelos de programação não linear inteira mista, nos quais é aplicado um método de Linearização por Partes de forma a torná-los modelos lineares.

Como objetivos secundários, destacam-se a realização de comparações entre as modelagens propostas e entre algumas variações dos métodos de linearização por partes quanto a indicadores importantes como tempo de processamento e erro médio de linearização e a aplicação de técnicas mais avançadas, entre elas a utilização de Conjuntos Especialmente Ordenados do tipo 1 (*Special Ordered Sets of type 1 - SOS1*) e a aplicação da técnica de Decomposição Lagrangeana para propor soluções mais eficientes para os modelos matemáticos.

1.3 Estrutura

Este trabalho encontra-se dividido em seis capítulos. O primeiro deles é a Introdução, onde são expostos o tema central e comentários iniciais acerca do estudo, assim como a justificativa e a motivação para a realização desse trabalho, seus objetivos principais e secundários, e a forma como ele está estruturado.

O segundo capítulo, intitulado Revisão Bibliográfica, apresenta todo o embasamento teórico deste trabalho, partindo dos modelos básicos de gestão de estoques, passando pela conceituação de estoque de segurança e de centralização de estoques, até chegar aos problemas de localização de facilidades, desde os mais simples aos mais sofisticados.

O terceiro capítulo, intitulado Descrição do Problema, expõe o problema de forma geral e lista as premissas e hipóteses sobre as quais os modelos matemáticos foram construídos.

O quarto capítulo, intitulado Metodologia, introduz as duas modelagens utilizadas inicialmente e as perspectivas sob as quais cada uma delas foi construída. Posteriormente, é introduzido o método de Linearização por Partes utilizado para linearizar ambas as modelagens, e os métodos utilizados para segmentação do domínio da função linearizada e para o cálculo dos parâmetros de linearização são exibidos. Em seguida, são apresentadas as abordagens de resolução através da modelagem por restrições do tipo SOS1 e por decomposição lagrangeana. Por fim, é descrito o método para geração das instâncias utilizadas nos experimentos.

O quinto capítulo, intitulado Experimentação e Análise, apresenta os diversos grupos de experimentos realizados, cada um com um objetivo diferente, e as análises dos resultados obtidos em cada um deles.

O sexto e último capítulo, intitulado Conclusões, apresenta uma síntese do estudo e uma reflexão dos resultados obtidos. Além disso, são fornecidas também sugestões para trabalhos futuros. Após este sexto capítulo encontra-se a listagem das referências bibliográficas utilizadas neste trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção são apresentados diversos conceitos e avanços encontrados na literatura, os quais foram fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho. Inicialmente são apresentados os modelos básicos de gestão de estoques, os quais representam o ponto de partida para qualquer estudo dessa abrangente área. Em seguida, apresenta-se o conceito de estoque de segurança e uma maneira utilizada para o cálculo do mesmo, e discute-se sobre a consolidação de estoques e vários trabalhos já publicados nessa área. Após a apresentação de todos esses conceitos envolvendo o estudo dos estoques, parte-se para a discussão dos problemas de localização de armazéns. Esta parte trata dos problemas básicos de localização de facilidades, passando por aqueles que consideram uma gestão de estoques simplificada, até chegar aos problemas de localização de facilidades que consideram os efeitos de consolidação de estoques. Em relação a esses últimos, são apresentados também alguns trabalhos aplicados na indústria de petróleo e gás. Por fim, são mostrados alguns trabalhos de localização de facilidades que utilizaram a técnica de relaxação lagrangeana em suas soluções.

2.1 Modelos Básicos de Gestão de Estoques

O modelo de gestão de estoques considerado como o mais básico da literatura é o chamado Modelo do Lote Econômico de Compra (*Economic Order Quantity - EOQ*), frequentemente tratado por sua sigla LEC em português. Este modelo foi desenvolvido por Harris (1913) como resultado de seu trabalho na Westinghouse Corporation e também ficou conhecido como *Wilson Lot-Size Formula*, em referência ao nome do consultor que o aplicou em diversas empresas (GARCIA et al., 2005).

De acordo com Garcia et al. (2005), os principais pressupostos da formulação clássica do LEC são :

- a. A demanda é determinística, constante e contínua;
- b. O tempo de ressuprimento ou tempo de ciclo (*lead time*) é determinístico e constante;
- c. Faltas de produtos e entregas com atraso (*backorders*) não são permitidas;
- d. Custos de pedido e de estoque são independentes do tamanho da ordem, não existindo, por exemplo, descontos por quantidade, e não variam no tempo;
- e. O pedido chega completo em um único instante de tempo;

- f. Itens diversos são pedidos de forma independente, ou seja, não são consideradas possibilidades de um pedido com vários itens;
- g. Não existem restrições, como espaço de armazenagem e capacidade de transporte.

Para se representar os níveis de estoque com base nestes pressupostos enumerados utiliza-se frequentemente um gráfico dente-de-serra, conforme o apresentado na Figura 1. Como se pode ver no gráfico, todas as vezes que o estoque atinge o nível de s unidades, o chamado ponto de pedido, é feito um pedido de Q unidades, o qual chegará após o tempo de ressuprimento ou tempo de ciclo L (*lead time*). O pedido é, então, consumido a uma taxa constante, até que se atinja novamente o nível de s unidades, quando um novo pedido de Q unidades será feito. Deste ponto em diante, o termo tempo de ressuprimento ou tempo de ciclo será referenciado através do termo em inglês *lead time*, conforme é comumente referenciado na literatura.

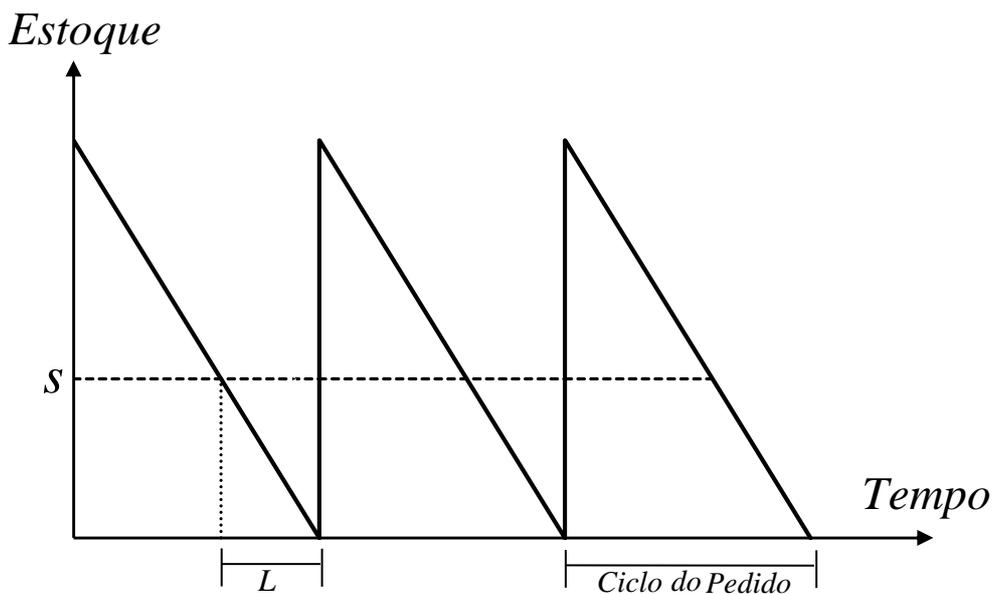


Figura 1 - Gráfico Dente-de-Serra
Fonte : Garcia et al. (2005)

O cálculo do ponto de pedido, ou seja, do nível s de estoque em que um pedido deverá ser feito, é realizado de forma trivial, visto que a demanda e o *lead time* são parâmetros determinísticos. Dessa forma, o ponto de pedido s será igual à demanda por unidade de tempo multiplicada pelo *lead time*. O maior problema é a determinação da quantidade Q . O cálculo dessa quantidade leva em conta o conceito de minimização do custo total, que em sua forma mais básica é igual à soma do custo de manutenção de

estoques com o custo de pedidos. O gráfico apresentado na Figura 2 apresenta esses três custos em função de Q , sendo CT a sigla utilizada para custo total, CE para custo de manutenção de estoques e CP para custo de pedidos. Neste gráfico é possível observar que existe um *trade-off* entre o custo de pedidos, que diminui com o aumento de Q , e o custo de manutenção de estoques, que aumenta com o aumento de Q . O Lote Econômico de Compra (LEC), representado por Q^* no gráfico, é o valor de Q que resolve tal *trade-off*, minimizando o custo total (GARCIA et al., 2005; SILVA, 2012).

Após a criação do Modelo do Lote Econômico de Compra, muitos outros modelos foram desenvolvidos para que pudessem ser aplicados a situações que não se poderia utilizar este primeiro. Pode-se citar como exemplo o Modelo do Lote Econômico de Produção, aplicado ao caso em que o pedido é entregue em frações, e não todo de uma vez como pressupõe o LEC, e o Modelo do Lote com Descontos por Quantidade, para o caso em que há descontos no custo do pedido de acordo com a quantidade Q , gerando uma função descontínua para o custo total. É possível encontrar o desenvolvimento desses e de muitos outros modelos em Garcia et al. (2005).

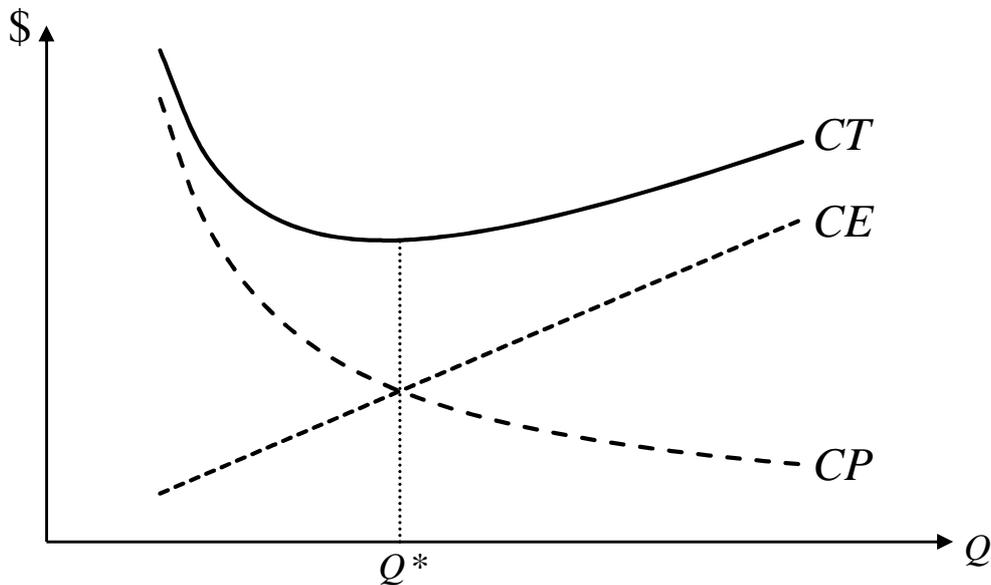


Figura 2 - Custos em Função do Lote de Ressuprimento Q
Fonte : Garcia et al. (2005)

2.2 Estoque de Segurança

O Lote Econômico de Compra, conforme tratado na seção anterior, só considera o estoque de ciclo, o qual, de acordo com Silva (2012), é utilizado para atender a demanda propriamente dita em um determinado período de tempo, sem levar em conta

as variações que a mesma pode apresentar durante o *lead time*. Conforme explicado por Garcia et al. (2005), o estoque de ciclo existe devido às possibilidades de economias de escala no processo de ressurgimento, fazendo com que seja vantajoso fazer pedidos em lotes com mais de uma unidade.

Entretanto, variações frequentemente estão presentes em um problema real devido às incertezas da demanda dos consumidores e do suprimento por parte dos fornecedores. Dessa maneira, surge a necessidade de se manter um estoque adicional de proteção contra faltas no estoque, o chamado estoque de segurança. De acordo com Bowersox e Closs (2004), esse estoque de segurança deve existir para amenizar as incertezas de demanda durante o prazo de ressurgimento, permitindo o atendimento do cliente nas situações em que a demanda real ultrapassar a demanda prevista.

Bowersox e Closs (2004) calculam o estoque de segurança com base na determinação da probabilidade de não faltar produto, considerando a distribuição da demanda durante o *lead time*. Como, segundo os autores, tal distribuição é frequentemente considerada aderente à distribuição normal, eles assumem a demanda durante o *lead time* como normalmente distribuída.

Ao se considerar a demanda diária de um cliente normalmente distribuída com média μ e variância σ^2 , o *lead time* de ressurgimento determinístico e igual a φ , e a não existência de correlação entre as demandas diárias, pode-se dizer que a distribuição da demanda deste cliente durante o *lead time* é normalmente distribuída com média $\varphi\mu$ (soma da média da demanda diária durante todo o *lead time*) e variância $\varphi\sigma^2$ (soma da variância da demanda diária durante todo o *lead time*). (BITTENCOURT; FERREIRA FILHO; LEITE, 2015; GARCIA et al., 2005).

O gráfico da Figura 3 apresenta a função densidade de probabilidades da distribuição normal da demanda durante o *lead time*, de acordo com as considerações do parágrafo anterior. Neste gráfico, a área pintada de cinza abaixo da curva representa a probabilidade α de que não haja falta de estoque durante o *lead time*. O estoque total que garante tal probabilidade é dado por:

$$\varphi\mu + Z_{\alpha}\sqrt{\varphi\sigma^2} \quad (2.1)$$

O valor apresentado na fórmula (2.1) é o somatório de duas partes. A primeira delas ($\varphi\mu$) representa o estoque de ciclo. Já a segunda ($Z_{\alpha}\sqrt{\varphi\sigma^2}$) representa o estoque

de segurança, onde Z_α é o ponto em uma curva normal padronizada para o qual a probabilidade à esquerda desse ponto é igual a α .

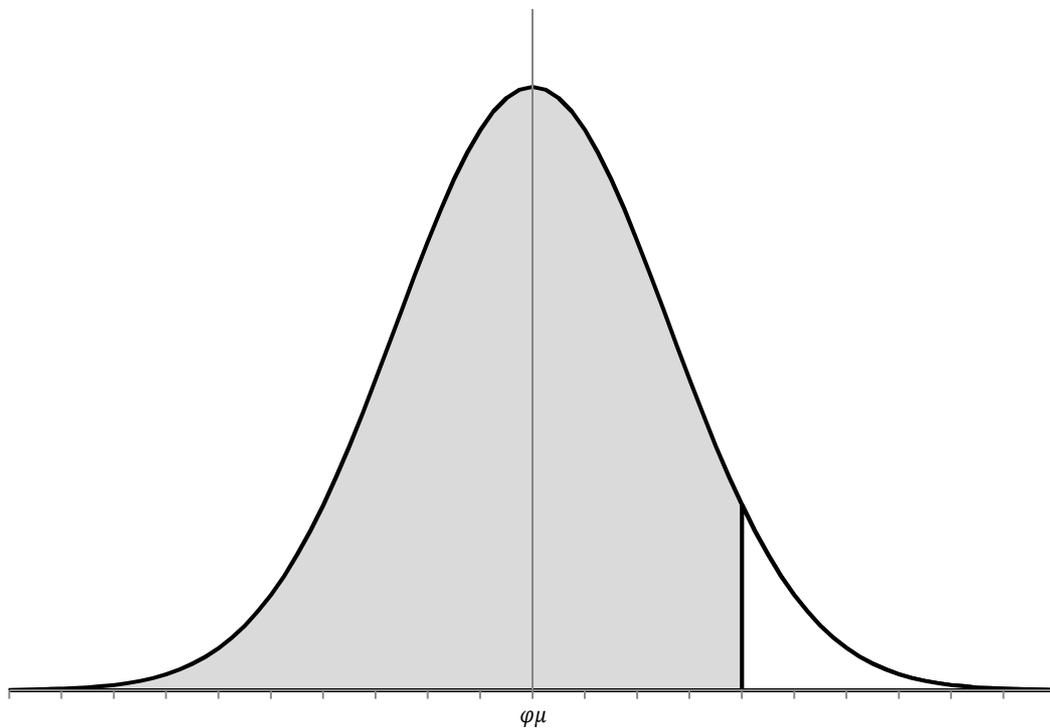


Figura 3 - Distribuição Normal - Demanda durante o *Lead Time*
Fonte : Adaptado de Silva (2012)

2.3 Centralização de Estoques

As técnicas de gestão de estoques tratadas nas seções anteriores consideram um único cliente sendo abastecido por um único armazém. Já para os casos em que se tem vários clientes e vários armazéns, torna-se necessária a criação de uma política de gerenciamento dos armazéns, de forma a otimizar a gestão da cadeia de suprimentos. A centralização de estoques, que será tratada nesta seção, é uma das técnicas largamente utilizadas nesses casos de múltiplos clientes e múltiplos armazéns.

A centralização de estoques, também chamada de consolidação de estoques, consiste no compartilhamento de unidades de armazenagem e distribuição de uma rede logística, os chamados armazéns, com o objetivo de mitigação da incerteza decorrente das flutuações da demanda de consumidores geográfica ou mercadologicamente separados, levando a reduções no nível total de estoques de segurança em uma cadeia de suprimentos. De acordo com Jorge (2008), a centralização de estoques, a análise de múltiplas fontes de fornecimento, a transferência de estoques entre centros de

distribuição e a padronização de componentes e peças para produção ou reposição representam as quatro subdivisões específicas da bibliografia de *risk pooling*. Embora, segundo o autor, não exista uma tradução perfeita para a expressão *risk pooling*, seu sentido se aproxima da ideia de mitigação de riscos, sendo, portanto, um conjunto de técnicas que têm como objetivo suavizar os riscos presentes dentro de uma rede logística, como as oscilações na demanda de consumidores geográfica ou mercadologicamente separados e as variações aleatórias no *lead time* dos fornecedores, de forma a promover uma diminuição nos custos logísticos.

Um dos primeiros estudos formais acerca da consolidação de estoques foi realizado por Maister (1976), onde foi fornecida a prova formal da chamada Regra da Raiz Quadrada (*Square Root Law*). Esta regra enuncia que a razão entre o estoque total de um sistema descentralizado, no qual os estoques de um produto qualquer forem mantidos em n armazéns, e o estoque total de um sistema centralizado, no qual os estoques deste mesmo produto forem mantidos em um só armazém, é igual a \sqrt{n} , ou seja, a centralização de n depósitos em apenas um reduz os estoques a uma taxa proporcional a \sqrt{n} . Conforme citado pelo autor, a Regra da Raiz Quadrada não foi uma novidade enunciada por ele, tendo sido referenciada nos trabalhos de Starr e Miller (1962), Brown (1967) e Heskett, Ivie e Glaskowsky (1974). Entretanto, foi Maister (1976) quem descreveu as suposições necessárias aos resultados encontrados e forneceu a prova desta regra, além de ter estendido a aplicabilidade da mesma para os estoques de ciclo em situações em que os níveis de estoque são geridos pelo Lote Econômico de Compra, já que os autores anteriores à ele afirmaram que tal regra só poderia ser aplicada aos estoques de segurança.

Aprofundando o estudo de Maister (1976), Eppen (1979) derivou uma expressão do custo esperado de manutenção e falta de estoques em função dos parâmetros da demanda de cada armazém e utilizou tal expressão para comparar tais custos nas situações de descentralização e centralização total. Assumindo que a demanda de cada cliente i é normalmente distribuída com média μ_i e desvio padrão σ_i , o autor demonstra que o custo total esperado no caso descentralizado com n clientes é $K \sum_{i=1}^n \sigma_i$. Já em uma situação de centralização total, considerando a não existência de correlação entre as demandas dos n clientes, esse mesmo custo seria de $K \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$, que é claramente menor do que $K \sum_{i=1}^n \sigma_i$. O parâmetro K utilizado em ambas as fórmulas é uma

constante definida por Eppen (1979) e que depende dos custos de manutenção e falta de estoques e da função de perda normal padronizada.

Com o intuito de generalizar a Regra da Raiz Quadrada, Zinn, Levy e Bowersox (1989) desenvolveram um modelo mais flexível, relaxando algumas restrições supostas por Maister (1976) e provando matematicamente que a Regra da Raiz Quadrada era um caso particular deste novo modelo. Este modelo, que passou a ser chamado de *Portfolio Effect* (PE), tem a capacidade de mensurar a redução percentual dos estoques de segurança após a centralização dos estoques de duas ou mais instalações. Mahmoud (1992), estendeu o modelo do *Portfolio Effect* para os casos de consolidações parciais em múltiplas localidades, provando que nem sempre uma centralização integral das unidades descentralizadas é mais efetiva do que sub-centralização na redução do estoque de segurança total (JORGE, 2008).

Uma das primeiras análises formais acerca da decisão de centralização em uma perspectiva mais ampla foi apresentada por Das e Tyagi (1997). O objetivo dos autores é determinar o nível ótimo de centralização como um *tradeoff* existente entre os custos de estoques e os custos de transporte através de um modelo de alocação de clientes a um número de armazéns disponíveis. Para isso, são analisados cinco cenários: o primeiro contendo apenas os custos de estoques de ciclo; o segundo, os custos de estoques de ciclo e de segurança; o terceiro, apenas custos de transporte; o quarto, custos de estoques de ciclo e de transporte ; e, por fim, o quinto contendo os custos de estoques de ciclo e de segurança e os custos de transporte. Os autores concluem que a centralização total de estoques leva a um resultado ótimo quando aplicada ao primeiro e ao segundo cenário, enquanto a descentralização total leva a um resultado ótimo quando aplicada ao terceiro cenário. Já para os quarto e quinto cenários, os autores concluem que o nível ótimo é alcançado através de uma centralização parcial de estoques, sendo que, quanto maior os custos de transporte em relação aos custos de estoques, maior o grau de descentralização. Segundo os autores, para estes dois últimos cenários, o grau de centralização deve ser determinado através do uso de modelos matemáticos, como o sugerido naquele artigo.

Trabalhando com um modelo de localização de armazéns que leva em conta os efeitos da centralização de estoques de segurança, Daskin, Coullard e Shen (2002) consideram a distribuição da demanda ao longo do *lead time* para o cálculo do estoque de segurança. Para iniciar a modelagem do problema, os autores assumem em um

primeiro momento que conhecem todos os clientes alocados a um determinado armazém, nomeando tais clientes de conjunto S , assumem que a demanda diária de cada cliente i é normalmente distribuída com média μ_i e desvio padrão σ_i e consideram o *lead time* em dias para entregas do fornecedor até o armazém como a constante φ . Com isso, considerando-se que a demanda diária de cada cliente i não possui correlação ao longo do tempo nem correlação com a demanda diária de qualquer outro cliente, pode-se dizer que a demanda ao longo do *lead time* neste armazém é normalmente distribuída com média $\varphi \sum_{i \in S} \mu_i$ e variância $\varphi \sum_{i \in S} \sigma_i^2$. Portanto, o estoque de segurança que garante a probabilidade α de que não haja falta de estoque durante o *lead time* é dado por:

$$Z_\alpha \sqrt{\varphi \sum_{i \in S} \sigma_i^2} \quad (2.2)$$

onde Z_α é o ponto em uma curva normal padronizada para o qual a probabilidade à esquerda desse ponto é igual a α .

2.4 Problemas de Localização de Facilidades

As decisões relacionadas à localização de facilidades representam um elemento crítico no planejamento estratégico de inúmeras companhias. Este é um tipo de decisão em longo prazo que irá impactar grande parte das futuras decisões táticas e operacionais dentro da gestão da cadeia de suprimentos e que possui um alto custo de investimento, sendo, portanto, um dos grandes desafios estratégicos de qualquer empresa (OWEN; DASKIN, 1998).

Esta seção tem como objetivo apresentar estudos que tratam do problema de localização de facilidades, partindo dos mais básicos, os quais não consideram os custos de estoques, passando por aqueles que consideram os custos de estoques simplificados, até chegar aos problemas de localização de facilidades que consideram os efeitos da centralização de estoques, estando esses últimos separados entre aqueles com aplicações gerais e aqueles aplicados na área de petróleo e gás.

2.4.1 Problemas de Localização de Facilidades que desconsideram Custos de Estoques

De acordo com Owen e Daskin (1998), o estudo da teoria de localização iniciou-se, formalmente, com o trabalho de Weber (1929), no qual o autor apresenta uma maneira de se posicionar um único armazém baseando-se no conceito de minimização da distância total entre o armazém e os diversos clientes. A partir da ideia apresentada por Weber (1929), outros estudos envolvendo localização de facilidades foram sendo desenvolvidos com aplicações em diversas áreas. Em Owen e Daskin (1998) foi feita uma revisão bibliográfica dos problemas clássicos de localização de facilidades, contemplando os problemas estáticos e determinísticos, os dinâmicos e os estocásticos. A seguir são apresentados alguns dos problemas estáticos e determinístico revisados por aqueles autores.

Um dos problemas de localização de facilidades clássicos, o problema das p -medianas, foi introduzido por Hakimi (1964). Este problema consiste em localizar p facilidades (medianas) em uma rede de modo a minimizar a soma total das distâncias de cada nó de demanda à sua mediana mais próxima e pertence à classe de problemas NP-completos.

O problema das p -medianas descrito anteriormente possui um abrangente leque de aplicações. Entretanto, para alguns casos, a localização de facilidades através da minimização da distância média percorrida pode não ser apropriada. Para os casos de localização de serviços de emergência, como corpo de bombeiros ou hospitais, a natureza crítica das demandas irá determinar um tempo máximo aceitável ou uma distância máxima aceitável. Para esses tipos de situação existe o problema de cobertura de conjuntos de locais, o qual tem como objetivo a minimização do custo de localização de facilidades garantindo a cobertura de toda a demanda e determinando o número mínimo de facilidades necessárias para se alcançar tal cobertura. Neste contexto, um ponto de demanda é considerado “coberto” quando puder ser atendido dentro de um período de tempo especificado ou a partir de uma dada distância máxima. Uma revisão mais completa dos problemas de cobertura aplicados à localização de facilidades pode ser encontrada em Schilling, Jayaraman e Barkhi (1993).

O potencial de inviabilidade quando da aplicação do problema de cobertura de conjuntos de locais em diversas situações reais é grande. Por isso, foi necessário o desenvolvimento de algumas outras abordagens com base no conceito de cobertura de

forma a diminuir os casos de inviabilidade. Um dos problemas criados com esse intuito foi o problema da máxima cobertura, proposto por Church e ReVelle (1974). Este problema busca a maximização da quantia de demanda coberta para uma distância máxima ou um tempo máximo aceitável, através da localização de uma quantia fixa de facilidades. Outro problema desenvolvido foi o problema dos p-centros, também conhecido como problema MinMax, já que o objetivo é a minimização da soma das distâncias máximas dos pontos de demanda até a facilidade (centro) à qual cada um deles foi alocado. Quando a localização das facilidades é limitada aos nós da rede, o problema dos p-centros é chamado de *vertex center problem*. Já quando se tem uma liberdade maior de localização, as facilidades podem ser instaladas em qualquer lugar da rede, e dá-se a tal problema o nome de *absolute center problem*.

Além dos problemas apresentados até aqui, os quais, segundo Owen e Daskin (1998), representam uma forte base para os estudos de teoria de localização realizados até a data de publicação daquele artigo, os autores apresentam ainda as formulações de alguns problemas adicionais encontrados na literatura, como os problemas de localização de facilidades com custo fixo (*fixed charge facility location problems*), os problemas de localização-alocação (*location-allocation problems*), o problema da antimédiana (*antimedian problem*), o problema do anticentro (*anticenter problem*) e o problema das p-dispersões (*p-dispersion problem*).

2.4.2 Problemas de Localização de Facilidades que consideram Custos de Estoques Simplificados

Na seção anterior foram apresentados modelos de localização de facilidades básicos que consideram apenas as distâncias entre as facilidades instaladas e os pontos de demanda e, em poucos casos, os custos de instalação das facilidades. Nesta seção são apresentados alguns problemas de localização de facilidades um pouco mais abrangentes pelo fato de considerarm custos relacionados aos estoques de ciclo.

Em Jayaraman (1998) é proposta um análise do relacionamento existente entre a gestão de estoques, a localização de facilidades e a determinação da política de transportes em um projeto de uma rede de distribuição. Para isso o autor formula um modelo de localização de facilidades capacitado em dois elos (fábricas-armazéns e armazéns-clientes) que incorpora múltiplos produtos e múltiplos modos de transporte através de um problema de programação matemática inteiro misto. O objetivo do

modelo proposto é minimizar os custos totais de estoque, transporte e localização, determinando a localização e a alocação das facilidades aos pontos de demanda, os parâmetros do estoque de ciclo das instalações e o modal a ser utilizado para cada produto.

Jayaraman e Pirkul (2001) propõem uma extensão do modelo proposto por Jayaraman (1998) incluindo mais um agente no modelo, que são os fornecedores de matéria-prima para as fábricas. Portanto, esse novo modelo pode ser visto como um sistema de três elos (fornecedores-fábricas, fábricas-armazéns e armazéns-clientes) e passa a considerar dois novos custos : o custo de transporte entre fornecedores e fábricas para cada tipo de matéria-prima e o custo de produção de cada um dos produtos nas potenciais fábricas. Para a solução do problema é proposta uma heurística que utiliza como *input* os resultados gerados por uma relaxação lagrangeana do problema.

Ambrosino e Scutellà (2005) também propõem um modelo de localização de facilidades levando em consideração os custos relacionados aos estoques de ciclos. Os autores formulam modelos para cenários estáticos e dinâmicos, além de introduzir armazéns intermediários em suas modelagens.

2.4.3 Problemas de Localização de Facilidades que consideram os efeitos de Centralização de Estoques de Segurança

Nesta seção são apresentados alguns problemas de localização de facilidades encontrados na literatura que consideram os efeitos de centralização de estoques de segurança em suas modelagens. A grande diferença da modelagem desses problemas é que, devido à consideração dos efeitos de centralização de estoques de segurança, os modelos criados passam a ser não lineares, enquanto aqueles que só consideram custos de estoques de ciclo são, no geral, modelos lineares.

Daskin, Coullard e Shen (2002) trabalham com um problema de localização de armazéns que incorpora os custos de estoque de ciclo e de estoque de segurança ao centro de distribuição, além dos custos de transporte desde os fornecedores até os armazéns. Os autores modelam o problema como um modelo de programação não linear inteira-mista e o resolvem utilizando o método da relaxação lagrangiana, além de esboçar algumas heurísticas de melhoria. Shen, Coullard e Daskin (2003) trabalham com o mesmo modelo proposto por Daskin, Coullard e Shen (2002), reestruturando o

mesmo como um modelo de programação inteira de cobertura de conjuntos e resolvendo o modelo resultante utilizando o método de geração de colunas.

Miranda e Garrido (2004) propõem uma abordagem de incorporação de decisões de controle de estoques, como as decisões de lote econômico de compra e de estoque de segurança, em modelos típicos de localização de facilidades, a qual é utilizada para solução de um problema de projeto de uma rede de distribuição através de um modelo de programação não linear inteira-mista. O modelo proposto considera a demanda estocástica, além dos efeitos da centralização de estoque, e a solução do mesmo é encontrada através de uma heurística baseada no método de relaxação lagrangeana.

O trabalho proposto por Vidyarthi et al. (2007) consiste na modelagem de um sistema de produção, estocagem e distribuição em dois elos que considera os efeitos de consolidação dos estoques de segurança dos clientes nos armazéns. É formulado um modelo de programação não linear inteira mista, que é linearizado através da utilização de técnicas de linearização por partes. O objetivo do modelo é a determinação da localização de fornecedores e armazéns, do nível de estoque transportado entre fornecedores e armazéns, a alocação dos clientes aos armazéns e o nível de estoque de segurança através da minimização da soma dos custos fixos de localização das facilidades, dos custos de transporte e dos custos de estoque de segurança. O modelo é fortalecido inserindo-se um conjunto de restrições redundantes e dividido em dois elos através do uso da relaxação lagrangeana, na qual uma heurística é baseada a fim de se resolver o problema.

You e Grossman (2008) lidam com um problema que considera simultaneamente a otimização de estoques e o projeto de uma rede de suprimentos dentro de um ambiente com demanda estocástica. O modelo é formulado com base naquele proposto por Shen, Coullard e Daskin (2003) como um problema de programação não linear inteira e é reformulado como um problema de programação não linear inteira mista. Para a solução, os autores propõem inicialmente uma heurística e posteriormente um algoritmo baseado em relaxação lagrangeana. You e Grossman (2010) modelam um sistema sob demanda incerta desenvolvendo um modelo de otimização que determina de forma simultânea a estrutura de transporte, a estocagem e a distribuição de uma rede de suprimentos com vários elos. O modelo é formulado como um problema de programação não linear inteira mista e é proposto um algoritmo de

decomposição baseado na integração das técnicas de relaxação lagrangeana e de aproximação por linearização por partes.

No trabalho de Gebennini, Gamberini, e Manzini (2009) é proposto um modelo de programação não linear inteira mista para o problema dinâmico de localização e alocação com controle do nível de serviço oferecido ao cliente e com otimização do estoque de segurança. Segundo os autores, o modelo é proposto com a finalidade de auxiliar o nível gerencial de uma empresa a tomar decisões relacionadas ao número de facilidades, a escolha da localização de tais facilidades, a alocação dos clientes às facilidades, e também para incorporar decisões táticas considerando controle de estoques, taxa de produção e determinação de nível de serviço em um ambiente com estocasticidade. É realizada uma análise experimental a fim de se identificar os fatores críticos que afetam os custos logísticos e, para finalizar, uma aplicação industrial é ilustrada a fim de se demonstrar a eficácia da abordagem de otimização proposta.

Ferreira Filho e Gendron (2012) apresentam duas formulações diferentes para um problema de localização-alocação de armazéns englobando um único produto através da utilização de programação inteira mista. Ambos os problemas são originalmente não lineares e linearizados através de técnicas de linearização por partes, possuindo, portanto, um determinado erro de linearização. Além disso, para uma das formulações, a qual explora a divisão em dois elos do problema, é proposta uma abordagem que engloba Decomposição Lagrangeana e o método de Geração de Linhas e Colunas de forma a se encontrar uma solução ótima e compará-la ao método tradicional do resolvidor (*solver*) CPLEX.

2.4.4 Problemas de Localização de Facilidades que consideram os efeitos de Centralização de Estoques na Indústria de Petróleo e Gás

Os problemas apresentados nessa seção são problemas de localização de facilidades que, assim como aqueles apresentados na seção anterior, levam em consideração os efeitos de centralização de estoques. Decidiu-se, entretanto, reservá-los em uma seção especial, visto que todos eles constituem-se em uma aplicação na indústria de petróleo e gás, assim como esse presente artigo.

Através do desenvolvimento de um modelo de localização de instalações e alocação de estoques formulado através do uso da programação matemática não linear, Montebeller Junior (2009) formulam um modelo que trata simultaneamente os estoques

de ciclo e de segurança através da incorporação dos efeitos de consolidação de estoques. Segundo o autor, a consideração das demandas dos clientes com correlações e desvios-padrão diferentes de zero, a consideração dos *lead-times* de ressuprimento dos armazéns com desvios-padrão também diferentes de zero e a adoção da premissa de que cada cliente pode ser abastecido por mais de um armazém (*cross-filling*) representam os grandes diferenciais do modelo proposto. Diversos cenários aleatórios são gerados e otimizados através do modelo criado e, com base na análise dos resultados, é verificada a adequação de políticas de alocação de estoques praticadas em redes logísticas já em operação, o que permite o autor concluir que para equipamentos e peças de reposição para a indústria de petróleo e gás seria mais adequada uma política de centralização total, enquanto que para combustíveis derivados do petróleo, a política mais adequada seria uma política mista.

O trabalho de Silva (2012) consiste em uma avaliação do gerenciamento dinâmico de estoques para o abastecimento de materiais e equipamentos para as unidades da cadeia produtora de petróleo a partir das plataformas produtoras de petróleo extraído da camada pré-sal. O autor formula um modelo de localização de instalações e alocação de estoques, o qual é utilizado para analisar diversos cenários com objetivo de se definir as políticas de estocagem mais adequadas a cada cenário. O modelo é inicialmente formulado como um modelo de programação não linear inteira mista e posteriormente linearizado através de técnicas de linearização por partes. Ferreira e Tarsitano (2015) utilizam o modelo proposto por Silva (2012) a fim de estudar melhorias na indústria de petróleo e gás, especificamente no que diz respeito ao apoio *offshore*. Os autores propõem três abordagens diferentes de linearização do modelo: o método de linearização por partes clássica, o qual também foi utilizado por Silva (2012); o método de linearização por partes usando SOS2 (*Special Ordered Sets 2*), cuja explicação pode ser encontrada em Bisschop (2012); e uma aproximação linear da fórmula do estoque de segurança através dos modelos apresentados por Pozo (2010). Por fim, o modelo é aplicado a um problema real, de forma a avaliar sua consistência.

Por fim, Bittencourt (2014) e Bittencourt (2015) comparam as duas formulações matemáticas propostas por Ferreira Filho e Gendron (2012) para o Problema de Localização de Armazéns considerando apenas um produto a ser distribuído. Uma das formulações analisa o problema sob a ótica da conexão dos dois elos da cadeia através de uma restrição de balanço de massa, sendo baseada em uma variável de índice duplo

x_{jk} , a qual representa o número de unidades produzidas em um determinado fornecedor j e enviadas a um armazém k , enquanto a outra conecta os fornecedores aos clientes através de uma variável de índice triplo x_{jkl} , a qual representa o número de unidades produzidas em um determinado fornecedor j e enviadas a um armazém k a fim de atender um à demanda do cliente l . Os modelos estudados são de natureza não linear inteira mista e são linearizados utilizando técnicas clássicas de linearização por partes, sendo comparados em diversos aspectos e cenários. Dentre as possíveis aplicações deste tipo de problema na indústria de petróleo, o autor destaca a distribuição dos derivados de petróleo provenientes das refinarias.

2.4.5 Quadro Resumo da Revisão Bibliográfica dos Problemas de Localização de Facilidades

Autores	Ano	Custos			Estoques Considerados		Método de Solução
		Fixo	Transporte	Armazenagem	Ciclo	Segurança	
Weber	1929		x				Solução Analítica
Hakimi	1964		x				Formulação do Problema das P-Mediana
Church & ReVelle	1974		x				Formulação do Problema da Máxima Cobertura
Jayaraman	1998	x	x	x	x		B&B (via GAMS)
Jayaraman & Pirkul	2001	x	x	x	x		Relaxação Lagrangeana e Heurística
Daskin, Coullard & Shen	2002	x	x	x	x	x	Relaxação Lagrangeana e Heurística
Shen, Coullard & Daskin	2003	x	x	x	x	x	Geração de Colunas
Miranda & Garrido	2004	x	x	x	x	x	Relaxação Lagrangeana e Heurística
Ambrosino & Scutellà	2005	x	x	x	x		B&B (via IBM CPLEX OPTIMIZER)
Vidyarthi, Celebi, Elhedhli & Jewkes	2007	x	x	x	x	x	Relaxação Lagrangeana e Heurística
You & Grossman	2008	x	x	x	x	x	Relaxação Lagrangeana e Heurística
Gebennini, Gamberini, &	2009	x	x	x	x	x	Técnicas de Programação

Manzini							Linear
Montebeller Junior	2009		x	x	x	x	B&B (via AIMMS)
You & Grossman	2010	x	x	x	x	x	Relaxação Lagrangeana e Heurística
Ferreira Filho e Gendron	2012	x	x	x	x	x	B&B (via IBM CPLEX OPTIMIZER)
Silva	2012	x	x	x	x	x	<i>Software</i> AIMMS
Bittencourt	2014	x	x	x	x	x	B&B (via IBM CPLEX OPTIMIZER)
Bittencourt	2015	x	x	x	x	x	B&B (via IBM CPLEX OPTIMIZER)
Ferreira e Tarsitano	2015	x	x	x	x	x	B&B (via AIMMS)

Tabela 1 - Quadro Resumo da Revisão Bibliográfica

3 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O problema estudado neste trabalho pode ser retratado como um problema de localização e alocação de facilidades de um sistema de produção, estocagem e distribuição multi-produtos. São considerados três conjuntos de facilidades: os fornecedores, que devem produzir e garantir o sistema com um ou mais produtos; os armazéns, onde os estoques devem ser armazenados; e os clientes, que são os consumidores dos produtos em questão. Basicamente, são fornecidos como dados de entrada do problema um determinado conjunto de clientes e suas demandas referentes a cada um dos produtos considerados e um conjunto de fornecedores e armazéns com localização, capacidade de produção ou armazenagem e custos anuais fixos conhecidos, além dos custos de produção, armazenagem e transporte entre os elos. Os objetivos principais do problema são definir quais fornecedores e armazéns utilizar, definição essa que diz respeito à localização de facilidades, e determinar qual armazém deve atender cada cliente de forma a garantir a satisfação da demanda dos mesmos, referente à alocação das facilidades.

Pode-se perceber que o problema descrito é dividido em dois elos, conforme apresentado na Figura 4. O primeiro elo é formado pelos fornecedores e armazéns, cujas localizações fazem parte da solução do problema, enquanto o segundo elo é formado pelos armazéns e clientes, os quais devem ser alocados uns aos outros. Os armazéns, nível intermediário do esquema apresentado nesta figura, representam o laço de união entre os dois elos e tem como função consolidar os estoques de ciclo e os estoques de segurança dos clientes. A presença da consolidação de estoques na configuração do sistema de estocagem e distribuição tende a diminuir o nível total de estoques do sistema, devido ao compartilhamento de unidades de armazenagem.

O problema abordado é baseado no problema de localização de armazéns estudado por Bittencourt (2014) e Bittencourt (2015), que realizam uma análise comparativa do desempenho de duas diferentes formulações propostas por Ferreira Filho e Gendron (2012). Há, entretanto três grandes diferenças entre as formulações do problema utilizadas por Ferreira Filho e Gendron (2012), por Bittencourt (2014) e por Bittencourt (2015) e as formulações propostas neste trabalho. A primeira delas consiste em considerar a presença de vários produtos no sistema, e não somente um produto como é estabelecido nas formulações daqueles autores. A segunda grande diferença é a

forma como é feito o cálculo dos parâmetros da linearização por partes do modelo. Neste trabalho é proposta uma forma diferente de realização do cálculo desses parâmetros com o intuito de se diminuir o erro de linearização, a qual será explicada adiante. A terceira e última diferença reside nos modelos mais simples derivados na decomposição lagrangeana proposta nesse trabalho.

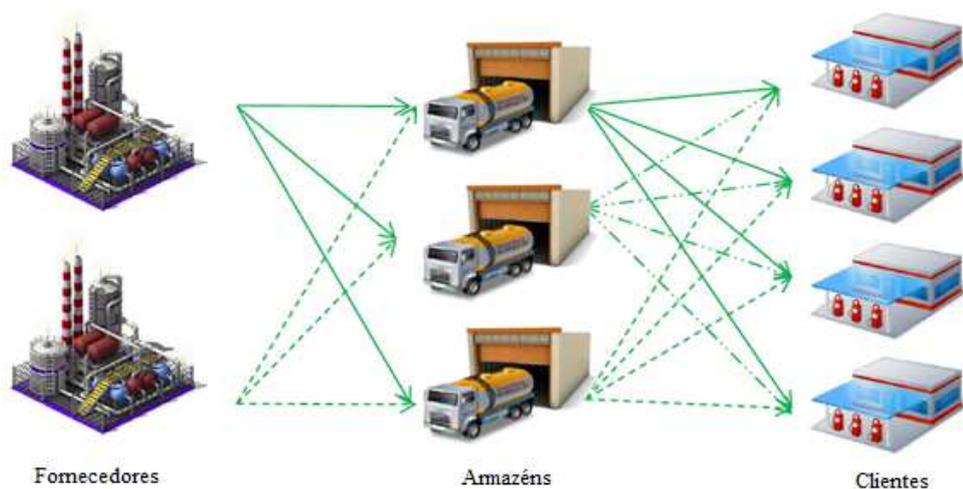


Figura 4 - Divisão em Elos do Problema de Localização-Alocação de Armazéns
Fonte : Bittencourt (2014)

3.1 Premissas e Hipóteses

As formulações propostas neste trabalho para o problema apresentado estão de acordo com as seguintes premissas e hipóteses, adaptadas de Bittencourt (2014):

- i. Cada fornecedor e cada cliente tem sua localização fixa e predeterminada;
- ii. As possíveis alocações para os armazéns são predeterminadas e finitas;
- iii. O número de armazéns é finito e no máximo igual ao número de possíveis localizações;
- iv. As demandas de cada cliente são independentes e seguem uma distribuição normal com desvio padrão diferente de zero e constante ao longo do tempo;
- v. O nível de serviço requerido por cada cliente é considerado na forma de um fator de segurança que garante certa probabilidade de não ocorrência de faltas de estoque (*stock-out*);
- vi. Para cada um dos produtos considerados, os clientes devem ser abastecidos por apenas um armazém, isto é, não é permitido *cross-filling* para cada possibilidade de cliente-produto, sendo permitido, entretanto, que um cliente possa receber produtos diferentes de armazéns diferentes;

- vii. Cada armazém pode servir a mais de um cliente;
- viii. Os estoques de ciclo e estoques de segurança são considerados apenas nos armazéns;
- ix. O estoque de segurança de todos os clientes servidos por um determinado armazém é mantido neste armazém;
- x. Não são considerados estoques nos fornecedores e nem nos clientes;
- xi. O modelo de gerenciamento de estoque nos armazéns é assumido como sendo o do LEC (Lote Econômico de Compra) e PP (Ponto de Pedido);
- xii. Os custos unitários de estocagem são funções do *lead time* de ressuprimento dos depósitos para cada fornecedor;
- xiii. Os custos unitários de transporte entre fornecedores e depósitos e entre depósitos e clientes depende da distância entre eles.

4 METODOLOGIA

Nesta seção é apresentada a metodologia utilizada para a modelagem do problema descrito anteriormente e para a geração dos dados utilizados nos experimentos realizados. São apresentadas as modelagens matemáticas propostas, as quais são originalmente representadas por modelos de programação não linear inteira mista e linearizadas por métodos de linearização por partes, assim como o cálculo dos parâmetros de linearização, as formas escolhidas para a segmentação na linearização, a conceituação dos Conjuntos Especialmente Ordenados do tipo 1 (*Special Ordered Sets of type 1* - SOS1), a abordagem de Decomposição Lagrangeana utilizada e a maneira como é realizada a geração das instâncias dos experimentos.

4.1 Modelagem Matemática

Cada um dos dois modelos de programação matemática apresentados neste trabalho é baseado em uma das duas perspectivas através das quais se podem encarar os problemas de localização-alocação de armazéns. Os modelos propostos por Ferreira Filho e Gendron (2012) e utilizados no trabalho de Bittencourt (2014) e Bittencourt (2015) também são baseados nestas perspectivas e são bastante semelhantes aos modelos propostos neste trabalho, sendo a presença de um novo índice representado pela letra i nos modelos aqui propostos uma das grandes diferenças em relação a estes últimos. A introdução desse novo índice permite a consideração de vários produtos no sistema, algo que não era possível através da utilização dos modelos formulados por Ferreira Filho e Gendron (2012).

A primeira perspectiva, sob a qual o modelo denominado neste trabalho de “Modelo 1” é construído, explora a divisão em dois elos do problema, conforme representado na Figura 5. No primeiro elo, formado pelos fornecedores e pelos armazéns, o fluxo (x_{ijk}) de cada produto i entre uma determinada combinação de fornecedor j e armazém k é determinado a fim de se suprir os estoques de ciclo. Esses estoques são representados pelo somatório das médias das demandas deste mesmo produto i por parte de cada cliente l alocado ao armazém k ($\sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl}$), e os estoques de segurança (SS_{ik}) centralizados no armazém k . No segundo elo, formado pelos armazéns e pelos clientes, é feita a alocação dos clientes aos depósitos para cada um dos produtos i através da variável binária y_{ikl} , sendo os fluxos entre os elos equilibrados através de restrições de conservação de fluxo.

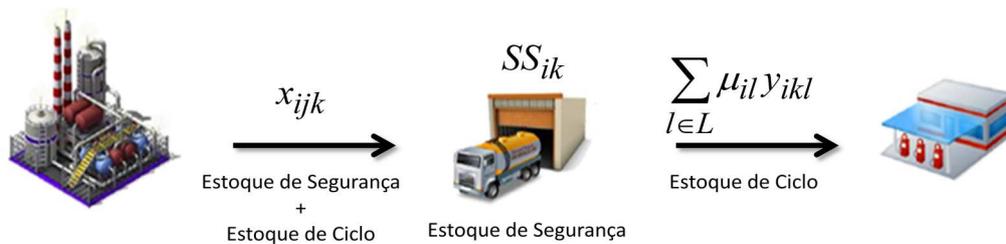


Figura 5 - Primeira Perspectiva
Fonte : Bittencourt (2014)

Já a segunda perspectiva, apresentada na Figura 6 e sob a qual o modelo denominado neste trabalho de “Modelo 2” é construído, separa o fluxo de produtos que partem do fornecedor em duas parcelas de acordo com o seu objetivo. Considera-se, portanto, uma parcela do fluxo que tem como objetivo atender ao estoque de ciclo de cada cliente l referente a cada produto i (x_{ijkl}), o qual é visto como um fluxo total ao longo da cadeia, partindo de determinado fornecedor j e sendo estocado em um determinado armazém k , e outra parcela referente ao estoque de segurança dos clientes alocados a cada armazém k (x_{sjk}).

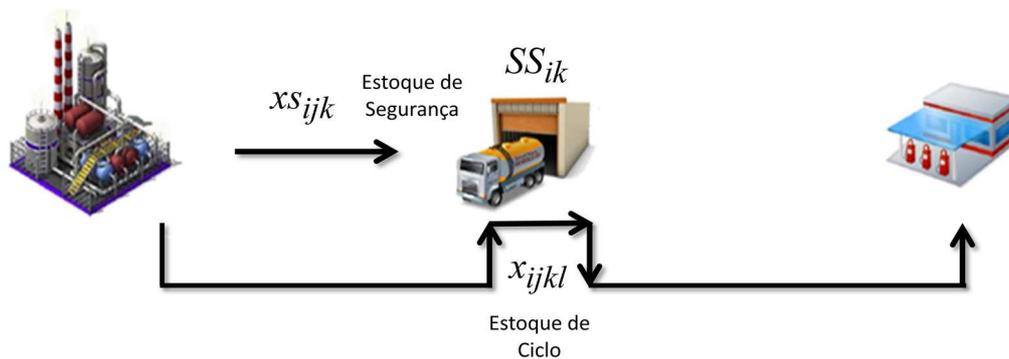


Figura 6 - Segunda Perspectiva
Fonte : Bittencourt (2014)

As Tabelas 2, 3 e 4 apresentam as listas contendo, respectivamente, os índices e conjuntos, os parâmetros, e as variáveis utilizadas nas formulações dos dois modelos apresentados nas seções a seguir.

Índices e Conjuntos	Significado
$i \in I$	Índice de produtos
$j \in J$	Índice de potenciais fornecedores a serem utilizados
$k \in K$	Índice de potenciais armazéns a serem abertos
$l \in L$	Índice de clientes
$r \in R$	Índice de segmentos na aproximação por linearização por partes

Tabela 2 - Lista de índices e conjuntos utilizados nas formulações

Parâmetro	Significado
f_j	Custo fixo operacional anual do fornecedor j
P_j	Capacidade anual de produção do fornecedor j
c_{ijk}	Custo unitário de produção e envio do produto i a partir do fornecedor j até o armazém k
g_k	Custo anual de abertura do armazém k
h_{ik}	Custo anual unitário de manutenção de estoques do produto i no armazém k
V_k	Capacidade total de armazenagem no armazém k
Γ	Horizonte de planejamento: número de dias de operação em um ano
t_{ikl}	Custo unitário de transporte do produto i a partir do armazém k até o cliente l
φ_{kl}	Lead time médio de transporte a partir do armazém k até o cliente l
ξ_{kl}	Cobertura de clientes: 1 se o cliente l puder ser abastecido pelo armazém k ; 0 caso contrário
μ_{il}	Média da demanda diária do produto i por parte do cliente l
σ_{il}^2	Variância da demanda diária do produto i por parte do cliente l
α	Nível de serviço desejado para os clientes
Z_α	Fator de segurança correspondente ao nível de serviço alfa desejado pelos clientes
F_{ik}^r	Coefficiente linear do segmento r na aproximação por linearização por partes da função do estoque de segurança
C_{ik}^r	Coefficiente angular do segmento r na aproximação por linearização por partes da função do estoque de segurança

L_{ik}^r	Limitante superior da abscissa do segmento r na aproximação por linearização por partes da função do estoque de segurança
------------	---

Tabela 3 - Lista parâmetros utilizados nas formulações

Variáveis	Significado
SS_{ik}	Estoque de segurança do produto i consolidado no armazém k
w_j	Escolha de fornecedores: 1 se o fornecedor j for utilizado ; 0 caso contrário
x_{ijk}	Número de unidades do produto i produzidas pelo fornecedor j e enviadas ao armazém k (Modelo 1)
x_{ijkl}	Número de unidades do produto i produzidas pelo fornecedor j e enviadas ao armazém k a fim de atender a demanda do cliente l (Modelo 2)
xs_{ijk}	Número de unidades do produto i produzidas pelo fornecedor j e enviadas ao armazém k a fim de suprir seu estoque de segurança (Modelo 2)
z_k	Abertura de armazéns: 1 se o armazém k for aberto ; 0 caso contrário
y_{ikl}	Alocação de clientes: 1 se o cliente l recebe o produto i através do armazém k ; 0 caso contrário
u_{ik}^r	Variável auxiliar binária da linearização por partes da função do estoque de segurança: 1 se o segmento r está ativo na aproximação do estoque de segurança produto i no armazém k
v_{ikl}^r	Variável auxiliar contínua da linearização por partes da função do estoque de segurança

Tabela 4 - Lista de variáveis utilizadas nas formulações

4.1.1 Modelo 1

A seguir é apresentada a formulação matemática não linear do modelo construído a partir da primeira perspectiva mencionada na seção 4.1, o qual é intitulado Modelo 1.

[Modelo 1]

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{j \in J} f_j w_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} (c_{ijk} + h_{ik}) x_{ijk} + \sum_{k \in K} g_k z_k \\ & + \Gamma \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} t_{ikl} \mu_{il} y_{ikl} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\text{Sujeito a} \quad SS_{ik} = Z_\alpha \sqrt{\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl}} \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.2)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ijk} = \Gamma \sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl} + SS_{ik} \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.3)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijk} \leq P_j w_j \quad \forall j \in J \quad (4.4)$$

$$\Gamma \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl} + \sum_{i \in I} SS_{ik} \leq V_k z_k \quad \forall k \in K \quad (4.5)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ikl} = 1 \quad \forall i \in I, \forall l \in L \quad (4.6)$$

$$y_{ikl} \leq \xi_{kl} z_k \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.7)$$

$$x_{ijk}, SS_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K \quad (4.8)$$

$$w_j, z_k, y_{ikl} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.9)$$

A função objetivo (4.1), a ser minimizada, representa a soma dos seguintes custos: custos fixos operacionais anuais dos fornecedores a serem utilizados, custos de produção e envio dos produtos desde os fornecedores até os armazéns, custos de manutenção de estoques de ciclo e de segurança nos armazéns, custos anuais de abertura dos armazéns e custos de transporte dos produtos desde os armazéns até os clientes. O conjunto de equações e inequações seguintes representam as restrições do problema. A restrição (4.2) apresenta o cálculo do estoque de segurança de cada um dos produtos

considerados para cada armazém aberto. A restrição (4.3) determina a conservação de fluxo de cada um dos produtos considerados em cada armazém aberto, assegurando que a quantidade de um determinado produto, recebida por um armazém proveniente dos fornecedores, seja igual à quantidade necessária para atender à demanda dos clientes alocados àquele armazém, somada à quantidade referente ao estoque de segurança dos mesmos. As restrições (4.4) e (4.5) limitam a capacidade de fornecedores e armazéns, respectivamente, além de determinar os fornecedores utilizados pelo sistema e os armazéns a serem abertos. A restrição (4.6) determina a alocação de clientes aos armazéns para cada um dos produtos considerados, impedindo o *cross-filling* para cada possibilidade de cliente-produto, ou seja, determinando que para cada produto, um determinado cliente deve ser abastecido integralmente por um mesmo armazém. A restrição (4.7) limita a cobertura de clientes, impedindo a alocação de clientes a armazéns que, por algum motivo, não possam atendê-los. Por fim, o conjunto de restrições (4.8) e (4.9) satisfazem aos requisitos de integralidade e não-negatividade das variáveis.

Devido à natureza da fórmula utilizada para o cálculo do estoque de segurança na restrição (4.2), o modelo apresentado é um modelo não linear. Por isso, a fim de torná-lo um modelo linear e permitir que o mesmo seja resolvido através dos métodos tradicionais empregados para a solução dos problemas de programação linear inteira mista, é necessária a utilização de técnicas de linearização. O procedimento escolhido para linearizar o modelo apresentado foi um procedimento de linearização por partes utilizada por Croxton, Gendron e Magnanti (2003), Croxton, Gendron e Magnanti (2007), Vidyarthi et al. (2007) e Frangioni e Gendron (2009), além de ter sido utilizado também nos modelos estudados por Ferreira Filho e Gendron (2012), Bittencourt (2014) e Bittencourt (2015), nos quais os modelos apresentados neste trabalho são baseados.

Ao se utilizar tal procedimento de linearização por partes para linearizar uma função $g(x) = \sqrt{x}$, por exemplo, deve-se dividir o eixo x em $|R|$ segmentos, não necessariamente iguais, estabelecendo-se um conjunto de limitantes superiores L^r , para todo $r = 1, 2, \dots, |R|$, conforme mostrado no gráfico da Figura 7. Em um intervalo $[L^{r-1}, L^r]$, a função $g(x) = \sqrt{x}$ é aproximada através da função linear $F^r + C^r x$, na qual F^r representa o coeficiente linear da reta e C^r o coeficiente angular, com $C^1 > C^2 > \dots > C^{|R|}$ e $F^1 < F^2 < \dots < F^{|R|}$. Para que a função seja contínua estabelece-se que $F^{r+1} + C^{r+1}L^r = F^r + C^r L^r$ para todo $r = 1, 2, \dots, |R|$ (VIDYARTHI et al., 2007).

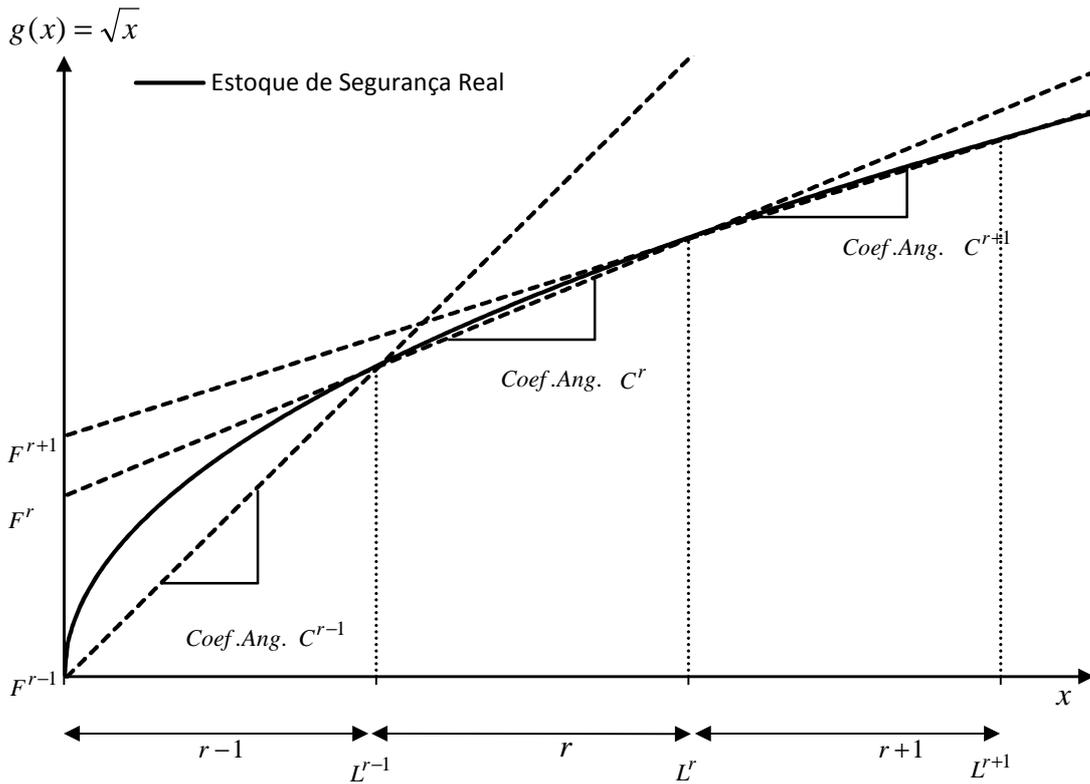


Figura 7 - Linearização por Partes
 Fonte : Adaptado de Vidyarthi et al. (2007)

Para que a função linearizada por partes possa ser utilizada em um modelo de programação matemática, devem-se introduzir neste mesmo modelo dois conjuntos de variáveis: as variáveis binárias u^r , para todo $r = 1, 2, \dots, |R|$, as quais determinam o segmento ativo, ou seja, aquele onde se encontra o valor de x e que será utilizado na aproximação, e pelas variáveis não negativas v^r , para todo $r = 1, 2, \dots, |R|$, as quais realizam a varredura dentro do segmento selecionado. Com isso, a valor da função dentro do modelo deve ser $g(x) = \sum_{r \in R} (F^r u^r + C^r v^r)$. Para que a aproximação seja realizada, é necessário também acrescentar ao modelo os três seguintes grupos de restrições:

$$x = \sum_{r \in R} v^r \quad (4.10)$$

$$F^{r-1} u^r \leq v^r \leq F^r u^r \quad \forall r \in R \quad (4.11)$$

$$\sum_{r \in R} u^r \leq 1 \quad (4.12)$$

De acordo com a restrição (4.10), o somatório de v^r em todos os segmentos deve ser igual a x . Sendo assim, a variável v^r receberá integralmente o valor x naquele segmento em que tal valor é encontrado e, conseqüentemente, igual a 0 para todos os outros valores de r , já que, devido a restrição (4.12), a variável u^r só pode assumir valor igual a 1 para um único valor de r , e o fará para o mesmo valor de r para o qual v^r é não nulo, assumindo valor igual a zero em todos os outros segmentos e forçando que v^r também seja igual a zero nesses mesmos segmentos através da restrição (4.11).

Aplicando-se o método explicado anteriormente para linearizar a restrição (4.2), a raiz da função do lado direito da equação $SS_{ik} = Z_\alpha \sqrt{\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl}}$ deve ser substituída por $\sum_{r \in R} (F_{ik}^r u_{ik}^r + C_{ik}^r \sum_{l \in L} v_{ikl}^r)$, fazendo com que a nova restrição fique representada pela equação (4.2a)

$$SS_{ik} = Z_\alpha \sum_{r \in R} \left(F_{ik}^r u_{ik}^r + C_{ik}^r \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \right) \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.2a)$$

Além disso, para que a aproximação ocorra corretamente, é necessária a inclusão das restrições (4.13), (4.14) e (4.15), correspondentes às restrições (4.10), (4.11) e (4.12), respectivamente.

$$\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl} = \sum_{l \in L} \sum_{r \in R} v_{ikl}^r \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.13)$$

$$F_{ik}^{r-1} u_{ik}^r \leq \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \leq F_{ik}^r u_{ik}^r \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (4.14)$$

$$\sum_{r \in R} u_{ik}^r \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.15)$$

Portanto, o Modelo 1 Linearizado por Partes completo pode ser visto a seguir.

[Modelo 1 – Linearizado por Partes]

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{j \in J} f_j w_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} (c_{ijk} + h_{ik}) x_{ijk} + \sum_{k \in K} g_k z_k \\ & + \Gamma \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} t_{ikl} \mu_{il} y_{ikl} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\text{Sujeito a} \quad SS_{ik} = Z_\alpha \sum_{r \in R} \left(F_{ik}^r u_{ik}^r + C_{ik}^r \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \right) \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.2a)$$

$$\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl} = \sum_{l \in L} \sum_{r \in R} v_{ikl}^r \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.13)$$

$$F_{ik}^{r-1} u_{ik}^r \leq \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \leq F_{ik}^r u_{ik}^r \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (4.14)$$

$$\sum_{r \in R} u_{ik}^r \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.15)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ijk} = \Gamma \sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl} + SS_{ik} \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.3)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijk} \leq P_j w_j \quad \forall j \in J \quad (4.4)$$

$$\Gamma \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl} + \sum_{i \in I} SS_{ik} \leq V_k z_k \quad \forall k \in K \quad (4.5)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ikl} = 1 \quad \forall i \in I, \forall l \in L \quad (4.6)$$

$$y_{ikl} \leq \xi_{kl} z_k \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.7)$$

$$x_{ijk}, SS_{ik}, v_{ikl}^r \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in L, \forall r \in R \quad (4.8a)$$

$$w_j, z_k, y_{ikl}, u_{ik}^r \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in L, \forall r \in R \quad (4.9a)$$

4.1.2 Modelo 2

A seguir é apresentada a formulação matemática não linear do modelo construído a partir da segunda perspectiva mencionada na seção 4.1, o qual é intitulado Modelo 2.

[Modelo 2]

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & \sum_{j \in J} f_j w_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} (c_{ijk} + t_{ikl}) x_{ijkl} + \sum_{k \in K} g_k z_k \\
 & + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{Sijk} \\
 & + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} h_{ik} \left(\sum_{j \in J} \sum_{l \in L} x_{ijkl} + \sum_{j \in J} x_{Sijk} \right)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\text{Sujeito a} \quad SS_{ik} = Z_\alpha \sqrt{\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl}} \quad \forall i \in I, \forall k \in K \tag{4.2}$$

$$\sum_{j \in J} x_{ijkl} = \Gamma \mu_{il} y_{ikl} \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L \tag{4.17}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} x_{ijkl} + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{Sijk} \leq P_j w_j \quad \forall j \in J \tag{4.18}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} x_{ijkl} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{Sijk} \leq V_k z_k \quad \forall k \in K \tag{4.19}$$

$$\sum_{j \in J} x_{Sijk} = SS_{ik} \quad \forall i \in I, \forall k \in K \tag{4.20}$$

$$\Gamma \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl} + \sum_{i \in I} SS_{ik} \leq V_k z_k \quad \forall k \in K \tag{4.5}$$

$$\sum_{k \in K} y_{ikl} = 1 \quad \forall i \in I, \forall l \in L \tag{4.6}$$

$$y_{ikl} \leq \xi_{kl} z_k \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L \tag{4.7}$$

$$x_{ijkl}, x_{Sijk}, SS_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.8c)$$

$$w_j, z_k, y_{ikl} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.9)$$

A grande diferença entre as duas modelagens apresentadas é a escolha das variáveis para representar o fluxo de produtos no sistema. No Modelo 1 existe somente uma variável (x_{ijk}) para determinar o fluxo de cada produto i entre uma determinada combinação de fornecedor j e armazém k , a qual é representada pelo somatório dos estoques de ciclo dos clientes l alocados ao armazém k ($\sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl}$) e dos estoques de segurança (SS_{ik}) centralizados neste mesmo armazém. Já no Modelo 2, separa-se o fluxo de produtos que partem do fornecedor em duas parcelas de acordo com o objetivo do mesmo. Considera-se, portanto, uma parcela do fluxo que tem como objetivo atender ao estoque de ciclo de cada cliente l referente a cada produto i (x_{ijkl}), o qual é enxergado como um fluxo total ao longo da cadeia, partindo de determinado fornecedor j e sendo estocado em um determinado armazém k , e outra parcela referente ao estoque de segurança dos clientes alocados a cada armazém k (x_{Sijk}). A função objetivo e as restrições utilizadas nesta modelagem são análogas às da modelagem anterior.

Assim como no Modelo 1, a natureza da fórmula utilizada para o cálculo do estoque de segurança na restrição (4.2) torna o modelo apresentado um modelo não-linear. Por isso, a fim de torná-lo um modelo linear, o modelo foi linearizado utilizando a mesma técnica de linearização por partes explicada na seção anterior. O Modelo 2 Linearizado por Partes completo pode ser visto a seguir.

[Modelo 2 – Linearização por Partes]

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \in J} f_j w_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} (c_{ijk} + t_{ikl}) x_{ijkl} + \sum_{k \in K} g_k z_k \\
 & + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{Sijk} \\
 \text{Minimizar} & \quad \quad \quad + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} h_{ik} \left(\sum_{j \in J} \sum_{l \in L} x_{ijkl} + \sum_{j \in J} x_{Sijk} \right)
 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\text{Sujeito a} \quad SS_{ik} = Z_\alpha \sum_{r \in R} \left(F_{ik}^r u_{ik}^r + C_{ik}^r \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \right) \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.2a)$$

$$\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl} = \sum_{l \in L} \sum_{r \in R} v_{ikl}^r \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.13)$$

$$F_{ik}^{r-1} u_{ik}^r \leq \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \leq F_{ik}^r u_{ik}^r \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (4.14)$$

$$\sum_{r \in R} u_{ik}^r \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.15)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ijkl} = \Gamma \mu_{il} y_{ikl} \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.17)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} x_{ijkl} + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{sijk} \leq P_j w_j \quad \forall j \in J \quad (4.18)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} x_{ijkl} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{sijk} \leq V_k z_k \quad \forall k \in K \quad (4.19)$$

$$\sum_{j \in J} x_{sijk} = SS_{ik} \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.20)$$

$$\Gamma \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl} + \sum_{i \in I} SS_{ik} \leq V_k z_k \quad \forall k \in K \quad (4.5)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ikl} = 1 \quad \forall i \in I, \forall l \in L \quad (4.6)$$

$$y_{ikl} \leq \xi_{kl} z_k \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.7)$$

$$v_{ikl}^r \leq \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 u_{ik}^r \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L, \forall r \in R \quad (4.18)$$

$$x_{ijkl}, x_{sijk}, SS_{ik}, v_{ikl}^r \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in L, \forall r \in R \quad (4.8d)$$

$$w_j, z_k, y_{ikl}, u_{ik}^r \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in L, \forall r \in R \quad (4.9a)$$

4.2 Segmentação na Linearização Por Partes

Nesta seção são abordadas duas particularidades da linearização por partes em duas subseções distintas. A subseção 4.2.1 expõe as formas escolhidas para a segmentação do eixo das abscissas nos gráficos das funções linearizadas. Já a subseção 4.2.2 apresenta o cálculo dos parâmetros utilizados no procedimento de linearização por partes dessas funções.

4.2.1 Segmentação do Eixo das Abscissas

O primeiro passo do procedimento de linearização por partes de uma função, conforme descrito na seção 4.1.1, é a segmentação do eixo das abscissas no gráfico de tal função, ou seja, a determinação dos valores de L^r para todo $r = 1, 2, \dots, |R|$. Neste trabalho foram utilizadas as duas formas de segmentação também utilizadas em Bittencourt (2014) e Bittencourt (2015).

A primeira forma de segmentação utilizada é chamada de Segmentação das Abscissas Uniformes (SAU), tendo sido referenciada no trabalho de Bittencourt (2014) como Segmentação Linear pelo fato de utilizar uma função linear para realizar a segmentação. Esta é uma configuração bastante intuitiva e amplamente utilizada na literatura, tendo sido encontrada em Croxton, Grendron e Magnanti (2007) e em Frangioni e Gendron (2009). Conforme pode ser visto no gráfico da Figura 8, o qual representa a Segmentação das Abscissas Uniformes de uma função $g(x) = \sqrt{x}$ com $|R| = 3$, essa forma de segmentação divide o eixo das abscissas até um determinado limite superior, ou seja, um valor máximo de x , em intervalos igualmente espaçados. Por esse motivo, neste trabalho tal tipo de Segmentação foi denominada de Segmentação das Abscissas Uniformes. Dessa forma, para o cálculo dos limitantes superiores L^r para todo $r = 1, 2, \dots, |R|$ deve considerá-los diretamente proporcionais ao índice do segmento r correspondente, conforme demonstrado pela fórmula (4.21), a qual é utilizada para determinar o valor dos limitantes de acordo com a SAU.

$$L^r = \frac{r}{|R|} \text{Max}(x) \quad \forall r \in R \quad (4.21)$$

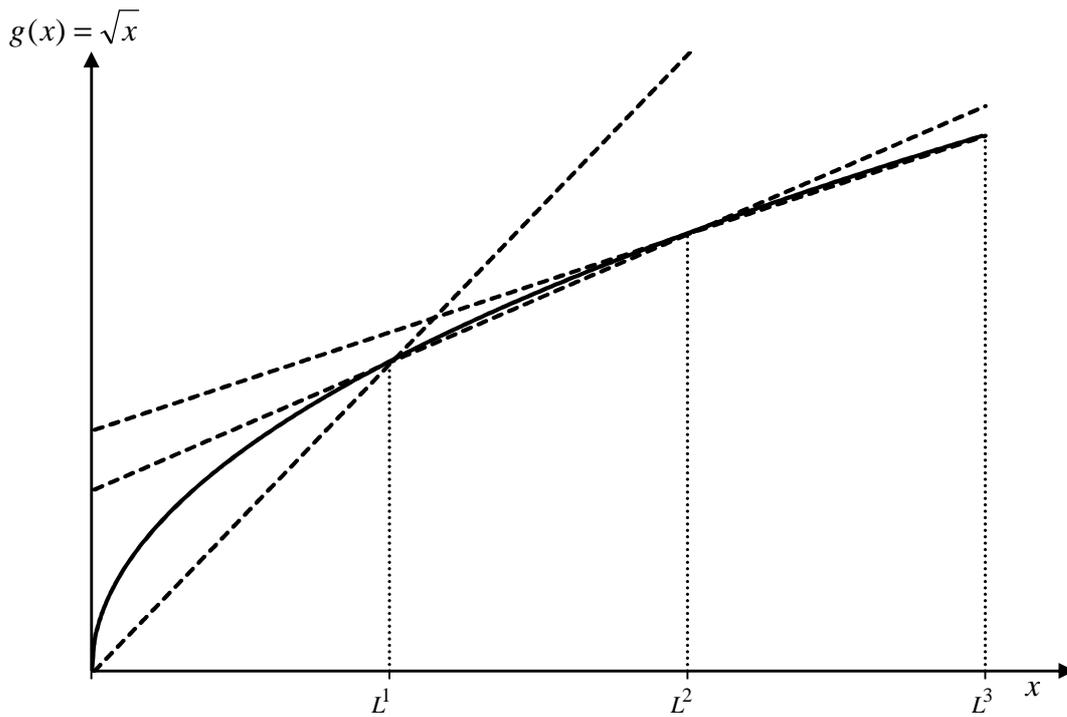


Figura 8 - Segmentação das Abscissas Uniformes
Fonte : Adaptado de Bittencourt (2014)

Já a segunda forma de segmentação utilizada é a chamada Segmentação das Ordenadas Uniformes (SOU), tendo sido referenciada no trabalho de Bittencourt (2014) Quadrática pelo fato de utilizar uma função quadrática para realizar a segmentação. Para o cálculo dos limitantes superiores L^r para todo $r = 1, 2, \dots, |R|$ de acordo com a SOU, os mesmos são considerados proporcionais ao quadrado do índice do segmento r correspondente, conforme demonstrado pela fórmula (4.22). Pode-se perceber que esse tipo de segmentação divide o eixo das ordenadas em intervalos igualmente espaçados e por esse motivo ela foi denominada de Segmentação das Ordenadas Uniformes neste trabalho. O gráfico da Figura 9 ilustra a SOU de uma função $g(x) = \sqrt{x}$ com $|R| = 3$.

$$L^r = \frac{r^2}{|R|^2} \text{Max}(x) \quad \forall r \in R \quad (4.22)$$

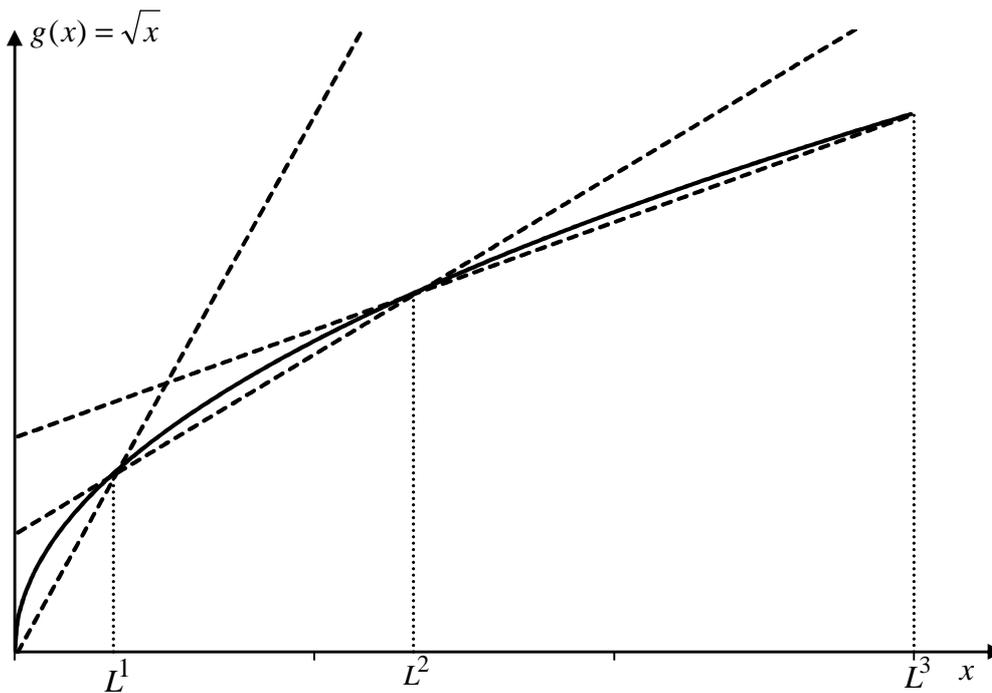


Figura 9 - Segmentação das Ordenadas Uniformes
Fonte : Adaptado de Bittencourt (2014)

Bittencourt (2014), antes de optar por utilizar as Segmentações referenciadas em seu trabalho como Linear e Quadrática, testou, no total, cinco formas de segmentação: a primeira através de uma função linear, a segunda através de uma função quadrática, a terceira através de uma função cúbica, a quarta através de uma função do logaritmo natural e a quinta através de uma função raiz quadrada. Dentre todas essas cinco, a Segmentação Quadrática foi a que obteve a menor diferença entre a área sob a curva da função do estoque de segurança (4.2) e a área delimitada pelas funções lineares por partes. Por isso, assim como era a expectativa daquele trabalho, neste trabalho também espera-se que a Segmentação Quadrática, aqui chamada de Segmentação das Ordenadas Uniformes, seja aquela a apresentar menor erro de linearização.

4.2.2 Cálculo dos Parâmetros de Linearização

Na seção anterior foram expostas as duas segmentações utilizadas nesse trabalho de uma forma geral, sem mencionar a adequação das mesmas às especificidades da restrição (4.2), a qual é o objeto de linearização. Nesta seção é apresentada a maneira como se realizou o cálculo dos parâmetros de linearização neste trabalho, adaptando-se tal cálculo às particularidades da restrição (4.2), novamente apresentada a seguir, e realizando-se uma comparação com o cálculo dos parâmetros análogos nos trabalhos de

Ferreira Filho e Gendron (2012), de Bittencourt (2014) e Bittencourt (2015). A forma como foi realizado o cálculo dos parâmetros de linearização nesse trabalho representa a segunda grande diferença desse trabalho para os trabalhos dos autores referenciados.

$$SS_{ik} = Z_{\alpha} \sqrt{\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl}} \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.2)$$

Analisando-se a restrição (4.2), percebe-se que o cálculo do estoque de segurança total é realizado em parcelas, representadas por todas as combinações possíveis de produtos e armazéns. Sendo assim, em um determinado problema com $|I|$ produtos e $|K|$ armazéns, haverá $|I| \times |K|$ funções de estoque de segurança a serem linearizadas. Para que o termo relativo à raiz quadrada seja o único do lado direito da equação, foi realizada uma manipulação da função (4.2), chegando a função g representada por (4.23).

$$g \left(\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl} \right) = \frac{SS_{ik}}{Z_{\alpha}} = \sqrt{\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl}} \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.23)$$

Portanto, para cada combinação de produtos e armazéns tem-se uma função com o eixo das ordenadas representado pelo termo $\frac{SS_{ik}}{Z_{\alpha}}$ e o eixo das abscissas pelo termo $\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl}$. Sendo assim, para cada uma dessas funções deve-se realizar o cálculo dos parâmetros da linearização, a começar pela definição do limite máximo do eixo das abscissas, limite esse que é utilizado no cálculo dos limitantes superiores L_{ik}^r de acordo com as fórmulas (4.21) e (4.22), até chegar ao cálculo dos coeficientes lineares e angulares das retas geradoras da função linear por partes utilizada para linearização da função manipulada (4.23) e representada na expressão (4.2a), novamente apresentada a seguir.

$$SS_{ik} = Z_{\alpha} \sum_{r \in R} \left(F_{ik}^r u_{ik}^r + C_{ik}^r \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \right) \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.2a)$$

Nos trabalhos de Ferreira Filho e Gendron (2012), de Bittencourt (2014) e de Bittencourt (2015), o número de funções a serem linearizadas é igual ao número total de armazéns $|K|$, devido ao fato de, naquele trabalho, não ser considerado o índice i relativo a número de produtos, só sendo possível a análise de sistemas com um único

produto. Entretanto, todas as funções a serem linearizadas possuem os mesmos valores para os parâmetros de linearização correspondentes, já que o máximo valor do domínio é estimado de forma pessimista, definindo-se um valor máximo idêntico para o eixo das abscissas de todas as funções a serem linearizadas. Esse valor é definido através da alocação de cada cliente ao armazém com maior *lead time* de entrega em relação àquele cliente, utilizando tal definição para o cálculo dos limitantes superiores de todo armazém k . Devido a tal simplificação que foi feita para o cálculo dos parâmetros de linearização, referir-se-á à linearização do trabalho dos autores citados, neste trabalho, como Linearização por Partes Simplificada. As fórmulas utilizadas para o cálculo dos limitantes superiores para a Segmentação das Abscissas Uniformes e para a Segmentação das Ordenadas Uniformes de uma Linearização por Partes Simplificada da restrição (4.2) são apresentadas pelas expressões (4.24) e (4.25), respectivamente. Vale lembrar que no trabalho de daqueles autores não estava presente o índice i , já que a modelagem daquele autor só permitia a consideração de um único produto.

$$L_{ik}^r = \frac{r}{|R|} \sum_{l \in L} \left[(\max_k \varphi_{kl}) \sigma_{il}^2 \right] \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (4.24)$$

$$L_{ik}^r = \frac{r^2}{|R|^2} \sum_{l \in L} \left[(\max_k \varphi_{kl}) \sigma_{il}^2 \right] \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (4.25)$$

Neste trabalho é utilizada uma forma diferente de se realizar o cálculo desses parâmetros com o intuito de se diminuir o erro de linearização. Analisando-se a chamada Linearização por Partes Simplificada, percebe-se que os valores máximos do eixo das abscissas relativo a cada uma das funções a ser linearizada poderia ser reduzido, com a expectativa de se aumentar a precisão da linearização. Essa redução se daria caso o cálculo fosse feito alocando-se todos os clientes l a cada um dos armazéns k e calculando-se o valor máximo do eixo das abscissas para cada combinação de produtos e armazéns utilizando-se a expressão $\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2$. Com isso, ter-se-ia um encurtamento no prolongamento do eixo das abscissas e uma linearização potencialmente mais precisa. Referir-se-á à linearização utilizada neste trabalho como Linearização por Partes Completa. As fórmulas utilizadas para o cálculo dos limitantes superiores para a Segmentação das Abscissas Uniformes e para a Segmentação das Ordenadas Uniformes de uma Linearização por Partes Completa da restrição (4.2) são apresentadas pelas expressões (4.26) e (4.27), respectivamente.

$$L_{ik}^r = \frac{r}{|R|} \sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (4.26)$$

$$L_{ik}^r = \frac{r^2}{|R|^2} \sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (4.27)$$

4.3 Uso de Conjuntos Especialmente Ordenados do Tipo 1 (SOS1)

De acordo com Bisschop (2012), existem tipos particulares de restrições em formulações de programação inteira que são bem comuns e que podem ser tratadas de maneira eficiente pelos resolvidores. Um desses tipos de restrições, que costuma estar muito presente em problemas de programação inteira, é aquele em que, em um conjunto de variáveis de decisão binárias, no máximo uma delas pode assumir um valor não nulo. Esse tipo de restrição pode ser modelado na maioria dos resolvidores de programação inteira de uma forma especial, conhecida como Conjuntos Especialmente Ordenados do Tipo 1 (*Special Ordered Sets of type 1* - SOS1). Deste ponto em diante, utilizar-se-á somente o termo SOS1 quando for necessário fazer referência aos Conjuntos Especialmente Ordenados do Tipo 1.

Quando uma restrição dessas é declarada como restrição do tipo SOS1 e reconhecida como tal por um *resolvidor de programação inteira*, o número de nós a serem analisados dentro da árvore de *Branch and Bound* é reduzido. Um exemplo de como o desempenho do resolvidor é favorecido pela declaração de uma restrição como tipo SOS1 pode ser encontrado em Bisschop (2012).

Em ambos os modelos linearizados apresentados na seção 4.1, há um grupo de restrições que podem ser claramente considerados restrições do tipo SOS1. Esse grupo de restrições é representado pela expressão (4.15).

$$\sum_{r \in R} u_{ik}^r \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.15)$$

Essa expressão indica que para cada conjunto produto-armazém, o somatório em r da variável de decisão binária u_{ik}^r deve ser menor ou igual a uma unidade. Sabendo-se que tal conjunto de restrições determina o segmento onde se encontra o valor do domínio a ser utilizado na aproximação do cálculo do estoque de segurança de cada produto em cada armazém, pode-se dizer que no máximo um único segmento r poderá

estar ativo para cada conjunto produto-armazém e, portanto, que no máximo uma das r variáveis de decisão binárias u_{ik}^r pode ser igual a uma unidade.

Na seção 5.3 deste trabalho é apresentada uma comparação entre o desempenho do Modelo 1 com e sem a declaração da restrição 4.15 como sendo do tipo SOS1.

4.4 Decomposição Lagrangeana

Foi apresentada por Ferreira Filho e Gendron (2012) uma abordagem que faz uso da técnica de decomposição lagrangeana aliada a técnicas de geração de linhas e colunas para solucionar um dos modelos por eles formulados. Esse modelo é análogo ao Modelo 1 apresentado neste trabalho e formulado sob a perspectiva que explora a divisão do problema em dois elos, o primeiro formado pelos fornecedores e pelos armazéns (fornecedores-armazéns), e o segundo formado pelos armazéns e pelos clientes (armazéns-clientes). Os dois elos são ligados através de restrições de conservação de fluxo, que acabam dificultando muito a solução convencional do problema. Esse é um dos exemplos típicos de um contexto onde a abordagem por decomposição lagrangeana costuma proporcionar uma resolução mais eficiente. Nesta abordagem, as restrições de conservação de fluxo são relaxadas, e o problema original é decomposto em dois subproblemas lagrangeanos: um envolvendo o elo fornecedores-armazéns e o outro envolvendo o elo armazéns-clientes.

O modelo apresentado no trabalho de Ferreira Filho e Gendron (2012) possui restrições adicionais, se comparado com o modelo análogo introduzido neste trabalho. Isso se deve ao fato de eles utilizarem a geração de linhas e colunas em sua modelagem. Neste trabalho, a técnica de decomposição lagrangeana foi aplicada diretamente ao Modelo 1, no intuito de se produzir subproblemas lagrangeanos mais fáceis de serem resolvidos, e, conseqüentemente, encontrar soluções com menores tempos médios de processamento. Essa foi a terceira grande diferença da abordagem aqui proposta em relação àquela apresentada em Ferreira Filho e Gendron (2012), conforme destacado na seção 3 deste trabalho. Por se tratar de uma formulação mais simples, a decomposição lagrangeana gerada nesse trabalho foi resolvida através de um algoritmo do tipo Subgradiente, um algoritmo básico bastante difundido e cuja fundamentação teórica pode ser encontrada em Fisher (1981) e em Wolsey (1998).

Para a aplicação da decomposição lagrangeana ao Modelo 1 linearizado por partes, conforme apresentado na seção 4.1.1 deste trabalho, deve-se relaxar as restrições

(4.3), que representam a conservação de fluxo entre os dois elos do problema. Isso é feito através da associação de multiplicadores de lagrange λ_{ik} às restrições (4.3), dividindo-se o modelo em dois subproblemas lagrangeanos, que são apresentados a seguir como Subproblema 1 e Subproblema 2. Manteve-se a mesma denominação das expressões idênticas àquelas apresentadas na seção 4, através da manutenção dos índices utilizados naquela seção, de forma a facilitar o entendimento do leitor.

[Subproblema 1]

$$\text{Minimizar } \sum_{j \in J} f_j w_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} (c_{ijk} + h_{ik} - \lambda_{ik}) x_{ijk} \quad (4.28)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijk} \leq P_j w_j \quad \forall j \in J \quad (4.4)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} \geq \Gamma \sum_{l \in L} \mu_{il} + \sum_{k \in K} SS_{ik} \quad \forall i \in I \quad (4.29)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} \leq V_k z_k \quad \forall k \in K \quad (4.30)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K \quad (4.8e)$$

$$w_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J \quad (4.9b)$$

O Subproblema 1 representa o primeiro elo do problema original (fornecedores-armazéns), determinando a utilização de fornecedores (w_j) e o fluxo de produtos a partir dos fornecedores até os armazéns (x_{ijk}).

Já o Subproblema 2, a seguir, representa o segundo elo do problema original (armazéns-clientes), determinando a localização dos armazéns (z_k), a alocação clientes-armazéns (y_{ikl}) e o estoque de segurança nos armazéns (SS_{ik}), além de contar ainda com as variáveis utilizadas para a linearização por partes (v_{ikl}^r, u_{ik}^r).

[Subproblema 2]

$$\text{Minimizar } \sum_{k \in K} g_k z_k + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \lambda_{ik} SS_{ik} + \Gamma \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} (t_{ikl} + \lambda_{ik}) \mu_{il} y_{ikl} \quad (4.31)$$

$$\text{Sujeito a } SS_{ik} = Z_\alpha \sum_{r \in R} \left(F_{ik}^r u_{ik}^r + C_{ik}^r \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \right) \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.2a)$$

$$\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl} = \sum_{l \in L} \sum_{r \in R} v_{ikl}^r \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.13)$$

$$F_{ik}^{r-1} u_{ik}^r \leq \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \leq F_{ik}^r u_{ik}^r \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (4.14)$$

$$\sum_{r \in R} u_{ik}^r \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.15)$$

$$\Gamma \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl} + \sum_{i \in I} SS_{ik} \leq V_k z_k \quad \forall k \in K \quad (4.5)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ikl} = 1 \quad \forall i \in I, \forall l \in L \quad (4.6)$$

$$y_{ikl} \leq \xi_{kl} z_k \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.7)$$

$$SS_{ik}, v_{ikl}^r \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L, \forall r \in R \quad (4.8f)$$

$$z_k, u_{ik}^r, y_{ikl} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (4.9c)$$

Pode-se perceber que todas as restrições presentes nos Subproblemas 1 e 2 são restrições presentes também no Modelo 1, exceto as restrições (4.29) e (4.30), ambas pertencentes ao Subproblema 1.

O intuito em adicionar tais restrições foi o de fortalecer o modelo. A restrição (4.29) foi adicionada para garantir que houvesse fluxo de produtos entre fornecedores e armazéns, ou seja, para garantir que as variáveis x_{ijk} e w_j não assumissem o valor trivial nulo quando da resolução da decomposição. Já a restrição (4.30) garante que um armazém só receba uma quantidade total de produtos inferior à sua respectiva capacidade, além de garantir também que um armazém só receba produto caso o mesmo

esteja aberto. Essas restrições são necessárias, pois se perde essa estrutura de conservação de fluxo ao se dualizar, ou seja, ao se relaxar as restrições (4.3).

Há outro fato importante a se considerar acerca do Subproblema 1. Pode-se perceber que as restrições adicionais deste subproblema, as restrições (4.29) e (4.30), possuem em sua formulação, as variáveis SS_{ik} e z_k , respectivamente. Essas variáveis são definidas pelo Subproblema 2 e, após determinados seus valores nesse subproblema, elas são tratadas como parâmetros no Subproblema 1.

A seguir são apresentados: o algoritmo do tipo subgradiente utilizado para a resolução da decomposição lagrangeana explicada anteriormente, baseado em Wolsey (1998); e a Tabela 5, que contém a lista dos símbolos utilizados neste algoritmo e seus respectivos significados.

[*Algoritmo do Subgradiente*]

1. Determine o valor do parâmetro *primal*;
2. Fixe $p = 0$ e determine os valores iniciais para $(\lambda_{ik})^p$ tal que $(\lambda_{ik})^p \geq 0 \quad \forall i, k$;
3. Resolva o Subproblema 2, obtendo os valores de $(z_k)^p$, $(SS_{ik})^p$, $(y_{ikl})^p$, $(u_{ik}^r)^p$ e $(v_{ikl}^r)^p$;
4. Com os valores de $(z_k)^p$ e de $(SS_{ik})^p$ obtidos com a resolução do Subproblema 2, resolva o Subproblema 1, obtendo $(w_j)^p$ e $(x_{ijk})^p$;
5. Some o valor encontrado para a função objetivo dos Subproblemas 1 e 2, de forma a encontrar o valor do dual lagrangeano $dual^p$;
6. Para todo i, k efetue :

$$\text{Se } [((\lambda_{ik})^p = 0) \text{ e } (\Gamma \sum_{l \in L} \mu_{il} (y_{ikl})^p, + (SS_{ik})^p - \sum_{j \in J} (x_{ijk})^p < 0)]$$

$$\text{Então } (s_{ik})^p := 0 ;$$

$$\text{Senão } (s_{ik})^p := \Gamma \sum_{l \in L} \mu_{il} (y_{ikl})^p, + (SS_{ik})^p - \sum_{j \in J} (x_{ijk})^p ;$$

7. Calcule o tamanho do passo μ^p utilizando a seguinte expressão:

$$\mu^p := \epsilon \frac{(1.05 \times \text{primal}) - \text{dual}^p}{\|s^p\|^2}$$

8. Para todo i, k efetue :

$$a. (\lambda_{ik})^{p+1} := (\lambda_{ik})^p + \mu^p \frac{(s_{ik})^p}{\|s^p\|}$$

9. Se os critérios de parada forem satisfeitos:

Então pare;

Senão faça $p := p + 1$ e vá para 3.

Símbolo	Significado
$primal$	Parâmetro que contém o melhor limitante primal conhecido
p	Passo atual
$(\lambda_{ik})^p$	Multiplicador de lagrange no passo p para cada i, k
$(z_k)^p$	Valor assumido pela variável $z_k \forall k$ na solução do Subproblema 2 no passo p
$(SS_{ik})^p$	Valor assumido pela variável $SS_{ik} \forall i, k$ na solução do Subproblema 2 no passo p
$(y_{ikl})^p$	Valor assumido pela variável $y_{ikl} \forall i, k, l$ na solução do Subproblema 2 no passo p
$(u_{ik}^r)^p$	Valor assumido pela variável $u_{ik}^r \forall i, k, r$ na solução do Subproblema 2 no passo p
$(v_{ikl}^r)^p$	Valor assumido pela variável $v_{ikl}^r \forall i, k, l, r$ na solução do Subproblema 2 no passo p
$(w_j)^p$	Valor assumido pela variável $w_j \forall j$ na solução do Subproblema 1 no passo p
$(x_{ijk})^p$	Valor assumido pela variável $x_{ijk} \forall i, j, k$ na solução do Subproblema 1 no passo p
$dual^p$	Valor do dual lagrangeano no passo p
$(s_{ik})^p$	Valor do subgradiente no passo p para cada i, k

s^p	Vetor dos subgradientes no passo p
$\ s^p\ $	Norma do vetor dos subgradientes no passo p
μ^p	Tamanho do passo
ϵ	Parâmetro tal que $0 \leq \epsilon \leq 2$

Tabela 5 - Lista de símbolos utilizados no Algoritmo do Subgradiente

4.5 Geração de Instâncias

Os dados utilizados na realização dos experimentos computacionais foram gerados a partir de um sistema programado em linguagem VBA (*Visual Basic for Applications*) no *Microsoft® Excel 2007*, de forma a possibilitar a geração automática das planilhas contendo os dados de entrada para tais experimentos. O método de construção dessas instâncias, explicado a seguir, foi baseado no método utilizado por Ferreira Filho e Gendron (2012), por Bittencourt (2014) e por Bittencourt (2015), o qual, por sua vez, se baseia na proposta de Vidyarthi et al. (2007). Além disso, assim como em Ferreira Filho e Gendron (2012), em Bittencourt (2014) e em Bittencourt (2015), foram utilizados dados das 150 cidades mais populosas da parte continental dos EUA, de acordo com o Censo Americano do ano de 2000, de forma a possibilitar potenciais comparações com o trabalho daqueles autores.

Cada instância a ser gerada recebe as seguintes entradas: o número de produtos $|I|$, limitado ao valor máximo de 5 produtos; o número de fornecedores $|J|$ e armazéns $|K|$, ambos limitados ao valor máximo de 20 fornecedores e 20 clientes, cujas respectivas localizações são referentes às 20 cidades mais populosas da parte continental dos EUA de acordo com o Censo Americano do ano de 2000; o número de clientes $|L|$, limitado ao valor máximo de 150 clientes, cujas localizações são referentes às 150 cidades mais populosas da parte continental dos EUA de acordo com o Censo Americano do ano de 2000; o número de segmentos de linearização $|R|$, limitado ao valor máximo de 20 segmentos; e por fim, o Coeficiente de Utilização da Capacidade dos Fornecedores (CUF) e o Coeficiente de Utilização da Capacidade dos Armazéns (CUA). O CUF é um coeficiente utilizado no cálculo das capacidades de cada um dos fornecedores e representa o valor esperado do Fator de Utilização da Capacidade dos Fornecedores (FUF), o qual é dado pelo somatório das demandas μ_{il} de todas as combinações de produto i e cliente l e do máximo estoque de segurança possível de

todos os clientes e produtos, dividido pelo somatório das capacidades de todos os fornecedores P_j . O cálculo do máximo estoque de segurança possível ($Max SS$) é realizado através da fórmula (4.32), alocando-se cada cliente l ao armazém k com maior tempo *lead time* de entrega em relação àquele cliente, para cada produto i . Já o CUA é análogo ao CUF, podendo ser visto como o valor esperado do Fator de Utilização da Capacidade dos Armazéns (FUA), também dado por uma divisão cujo numerador é semelhante àquele do cálculo do FUF e cujo denominador é dado pelo somatório das capacidades de todos os armazéns V_k . A utilização desses fatores foi inserida nos cálculos com o intuito de se balancear os valores gerados para a capacidade de fornecedores e armazéns.

$$Max SS = \sum_{i \in I} Z_\alpha \sqrt{\sum_{l \in L} [(\max_k \varphi_{kl}) \sigma_{il}^2]} \quad (4.32)$$

No processo de geração das instâncias, o horizonte de planejamento, ou seja, o número de dias produtivos em um ano, foi igual a 1, tendo, os custos fixos operacionais dos fornecedores e os custos de abertura dos armazéns, sido ajustados de forma proporcional. O *lead time* médio de transporte do armazém k para o cliente l (em dias) foi calculado em função do tempo de colocação do pedido e despacho, considerado igual a 1 dia, e da distância d_{kl} em milhas entre as localidades, considerando-se que seja possível percorrer um trajeto de 300 milhas por dia, conforme a expressão (4.33).

$$\varphi_{kl} = 1 + \frac{d_{kl}}{300} \quad \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.33)$$

O parâmetro de cobertura de clientes ξ_{kl} foi considerado igual a 1 para todas as combinações de armazéns e clientes, ou seja, todo cliente l pode ser abastecido por qualquer armazém k . A demanda média diária μ_{il} para um dado produto i e cliente l foi obtida pela divisão da população da cidade por 1.000. Já o desvio padrão da demanda foi calculado de acordo com a expressão (4.34), onde CV representa um coeficiente de variação, para o qual se adotou o valor de 0,05.

$$\sigma_{il} = \mu_{il} \times CV \times U[0, 1] \quad \forall i \in I, \forall l \in L \quad (4.34)$$

O nível de serviço dos clientes, α , foi de 95%, correspondente a um fator de segurança $Z_\alpha = 1,64$. O custo unitário de produção e envio do produto i a partir do

fornecedor j para o armazém k foi determinado através da divisão da distância d_{kl} em milhas entre as localidades por 100 para qualquer produto i , conforme (4.35).

$$c_{ijk} = \frac{d_{kl}}{100} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K \quad (4.35)$$

O custo unitário de transporte do produto i a partir do armazém k até o cliente l , também foi determinado através da divisão da distância d_{kl} em milhas entre as localidades por 100 para qualquer produto i , conforme (4.36).

$$t_{ikl} = \frac{d_{kl}}{100} \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.36)$$

A capacidade de produção dos fornecedores foi calculada em duas etapas. Na primeira etapa calcula-se a capacidade original de produção de cada fornecedor j ($P_j^{Original}$) dividindo-se a necessidade total máxima de produtos, representada pelo somatório dos estoques de ciclo e dos estoques de segurança, pelo número de fornecedores disponíveis e multiplicando o valor encontrado por um número aleatório entre zero e dois, conforme a expressão (4.37).

$$P_j^{Original} = U[0, 2] \frac{\sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} + Max SS}{|J|} \quad \forall j \in J \quad (4.37)$$

Após isso, calcula-se, então, o FUF desta primeira etapa, chamado de $FUF^{Original}$, representado pela divisão da necessidade total máxima de produtos pelo somatório das capacidades originais de produção de todos os fornecedores, conforme (4.38).

$$FUF^{Original} = \frac{\sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} + Max SS}{\sum_{j \in J} P_j^{Original}} \quad (4.38)$$

Na segunda etapa, calcula-se a capacidade de produção de cada fornecedor j a ser efetivamente utilizada nos experimentos (P_j), baseada no valor calculado do respectivo $P_j^{Original}$ e do $FUF^{Original}$ e levando em consideração também o Coeficiente de Utilização da Capacidade dos Fornecedores (CUF) fornecido como dado de entrada, conforme (4.39).

$$P_j = \left\lfloor \frac{P_j^{Original} \times FUF^{Original}}{CUF} \right\rfloor \quad \forall j \in J \quad (4.39)$$

Finalmente, calcula-se o valor real do Fator de Utilização da Capacidade dos Fornecedores (FUF), conforme (4.40).

$$FUF = \frac{\sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} + Max SS}{\sum_{j \in J} P_j} \quad (4.40)$$

De forma a se evitar um grande número de instâncias inviáveis, a fórmula de cálculo de P_1 foi alterada, como pode ser visto em (4.41). Essa alteração evita que se tenha uma capacidade total de produção inferior à soma dos estoques de ciclo e de segurança.

$$P_1 = Max \left[\left\lfloor \frac{P_1^{Original} \times FUF^{Original}}{CUF} \right\rfloor, \right. \\ \left. INT \left(\sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} + Max SS - \sum_{j \in J - \{1\}} P_j \right) + 1 \right] \quad (4.41)$$

O valor de P_j é utilizado para o cálculo do custo fixo operacional anual de cada fornecedor j (f_j), o qual possui uma parte fixa e uma parte variável que depende da capacidade de produção P_j , além de um fator de aleatoriedade, conforme (4.42). Vale lembrar que tal custo fixo está normalizado de acordo com o horizonte de planejamento considerado como sendo igual a um dia.

$$f_j = U[500, 1000] + U[1000, 2000] \sqrt{P_j} \quad \forall j \in J \quad (4.42)$$

A capacidade de armazenagem de cada armazém k é determinada de maneira análoga à dos fornecedores, conforme as expressões (4.43) a (4.47), análogas às expressões de (4.37) a (4.41), respectivamente.

$$V_k^{Original} = U[0, 2] \frac{\sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} + Max SS}{|K|} \quad \forall k \in K \quad (4.43)$$

$$FUA^{Original} = \frac{\sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} + Max SS}{\sum_{k \in K} V_k^{Original}} \quad (4.44)$$

$$V_k = \left\lceil \frac{V_k^{Original} \times FUA^{Original}}{CUA} \right\rceil \quad \forall k \in K \quad (4.45)$$

$$FUA = \frac{\sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} + Max SS}{\sum_{k \in K} V_k} \quad (4.46)$$

$$P_1 = Max \left[\left\lceil \frac{V_1^{Original} \times FUA^{Original}}{CUA} \right\rceil, \right. \\ \left. INT \left(\sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} + Max SS - \sum_{k \in K - \{1\}} V_k \right) + 1 \right] \quad (4.47)$$

Analogamente à f_j , o custo de abertura de cada armazém k (g_k) também possui uma parte fixa e outra variável, sendo esta dependente da raiz quarta de V_k , conforme (4.48). Assim como f_j , este custo fixo também está normalizado de acordo com o horizonte de planejamento considerado como sendo igual a um dia.

$$g_k = U[100, 500] + U[500, 1000] \sqrt[4]{V_k} \quad \forall k \in K \quad (4.48)$$

Por fim, o custo anual unitário de manutenção de estoques do produto i no armazém k foi determinado através da expressão (4.49).

$$h_{ik} = U[5, 10] \quad \forall k \in K \quad (4.49)$$

5 EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com os experimentos computacionais realizados. No primeiro grupo de experimentos, apresentado na seção 5.1, é feita uma comparação dos resultados obtidos em experimentos com as mesmas instâncias em modelos linearizados através da Linearização por Partes Completa e da Linearização por Partes Simplificada e analisada a influência do método de cálculo dos parâmetros e do número de segmentos de linearização no tempo de processamento dos modelos e no erro de linearização. Na seção 5.2, é apresentada a influência do crescimento dos valores do índice i , relativo ao número de produtos, no tempo de processamento do Modelo 1. A seção 5.3 apresenta uma comparação dos resultados obtidos através de experimentos com o Modelo 1 contendo e não contendo a declaração de restrições do tipo SOS1. Por fim, a seção 5.4 apresenta o desempenho da abordagem de decomposição lagrangeana aplicada ao Modelo 1.

Todos os experimentos foram realizados em um *notebook* pessoal com 4,00 GB de memória RAM, processador *Intel® Core™ i3* de 2.27 GHz e sistema operacional *Windows 7*. O problema foi modelado através do *software* AIMMS (*Paragon Decision Technology B.V.*) em sua versão 3.13, e o resolvidor utilizado foi o CPLEX 12.6. A escolha de tal *software* se deveu ao fato de o mesmo possuir poderosas ferramentas de otimização e uma interface gráfica amigável para formulação dos modelos.

5.1 Comparação entre a Linearização por Partes Completa e a Linearização por Partes Simplificada

Esses primeiros experimentos foram realizados com o objetivo principal de comparar a Linearização por Partes Completa e a Linearização por Partes Simplificada em relação ao tempo de processamento e ao erro médio de linearização, além de comparar o modelo (Modelo 1 e Modelo 2) e tipo de Segmentação (Abcissas Uniformes e Ordenadas Uniformes) em relação a esses mesmos quesitos e de verificar a influência do número de segmentos utilizados para as linearizações.

Para a realização dos experimentos foram geradas instâncias de tamanho médio com 1 produto, 15 fornecedores, 15 armazéns, 70 clientes, 50% de CUF e 50% de CUA. Foram testados 5, 7, 10, 13, 16 e 20 segmentos e, para cada um desses segmentos foram geradas 10 instâncias diferentes ($N = 1, \dots, 10$), totalizando 60 instâncias. Cada uma

dessas instâncias possuía os parâmetros referentes às Segmentações das Abscissas Uniformes (SAU) e das Ordenadas Uniformes (SOU) e também às Linearizações Completa e Simplificada, chegando a um total de 240 diferentes conjuntos de dados, os quais foram rodados tanto para o Modelo 1 quanto para o Modelo 2, totalizando 480 experimentos realizados com tempo máximo limitado em 1 hora para cada um. Nem todos os experimentos conseguiram encontrar um resultado ótimo dentro desse tempo, mas todos eles encontraram uma solução viável. Do total de 480 experimentos, somente 3 experimentos não puderam chegar a uma solução ótima, os quais também foram inseridos na análise de resultados já que o *Gap* de Otimalidade dos resultados viáveis encontrados foram bem pequenos, com o valor máximo de 0,4%. Os resultados desses experimentos são apresentados e analisados a seguir.

Número de Segmentos	Linearização	Modelo 1 - SAU		Modelo 1 - SOU		Modelo 2 - SAU		Modelo 2 - SOU	
		Tempo Médio (s)	Erro Médio						
5	Completa	13,9	44,5%	10,7	22,2%	181,5	44,5%	98,3	22,2%
	Simplificada	13,3	56,1%	20,6	30,6%	200,2	56,1%	419,9	30,7%
7	Completa	5,6	41,6%	19,8	13,6%	56,2	41,6%	420,6	13,6%
	Simplificada	7,6	52,2%	23,3	19,8%	54,5	52,2%	279,0	19,9%
10	Completa	16,0	36,6%	25,6	5,8%	148,9	36,6%	202,8	5,8%
	Simplificada	15,3	47,7%	24,2	9,1%	158,3	47,7%	225,4	9,1%
13	Completa	10,8	32,5%	20,2	3,3%	164,3	32,5%	142,9	3,3%
	Simplificada	13,2	41,5%	16,1	5,5%	439,6	41,5%	102,9	5,5%
16	Completa	33,9	26,0%	81,7	3,1%	176,8	26,0%	641,7	3,1%
	Simplificada	18,6	36,5%	51,5	4,9%	122,0	36,5%	295,4	4,9%
20	Completa	16,0	24,6%	33,1	2,0%	339,0	24,6%	235,2	2,0%
	Simplificada	11,5	32,8%	21,5	3,2%	129,3	32,8%	117,1	3,2%

Tabela 6 - Tempo Médio de Processamento e Erro Médio de Linearização por segmentos

Analisando-se os resultados relativos ao tempo médio de processamento dos modelos, pode-se chegar a algumas conclusões significativas. O Modelo 1 – SAU – Lin. Simplificada foi o que apresentou o menor tempo médio de processamento (13,3s), seguido do Modelo 1 – SAU – Lin. Completa (16,0s), conforme apresentado pela Tabela 7. Nesta mesma tabela, comparando-se os o Modelo 1 com o Modelo 2, percebe-se que o primeiro modelo apresenta sempre menores valores de tempo médio de processamento dentro de uma mesma categoria de segmentação e linearização. É

importante mencionar que as relaxações lineares de ambos os modelos geraram exatamente os mesmos resultados para todas as instâncias testadas. Em relação à forma de segmentação, os modelos que utilizaram a Segmentação das Ordenadas Uniformes apresentaram maiores valores de tempo médio de processamento em relação àqueles que utilizaram a Segmentação das Abscissas Uniformes, realizando a comparação para uma mesma categoria de modelo e de linearização. Por fim, dentro de uma mesma categoria de modelo e de segmentação, ou seja, de uma mesma coluna da Tabela 7, os experimentos que utilizaram a Linearização por Partes Simplificada apresentaram menor tempo médio de processamento que aqueles que utilizaram a Linearização por Partes Completa, como pode ser visto através da comparação da linha referente à Linearização Simplificada com a linha referente à Linearização Completa, para cada uma das colunas desta mesma tabela.

Linearização	Modelo 1		Modelo 2	
	SAU	SOU	SAU	SOU
Completa	16,0 s	31,8 s	177,8 s	290,2 s
Simplificada	13,3 s	26,2 s	184,0 s	239,9 s

Tabela 7 - Tempo Médio de Processamento

Ao se observar os gráficos das Figuras 10 a 13, referentes aos dados de tempo médio de processamento condensados na Tabela 6, pode-se perceber a influência do número de segmentos no tempo de processamento. Cada um desses gráficos apresenta o tempo médio de processamento por número de segmentos de um conjunto de experimentos de um mesmo (Modelo 1 e Modelo 2) e mesmo tipo de segmentação (Segmentação das Abscissas Uniformes e Segmentação das Ordenadas Uniformes), tanto para Linearização Completa, quanto para Linearização Simplificada. No geral, como pode se ver em todos os gráficos, existe uma tendência de aumento do tempo de processamento conforme se aumenta o número de segmentos, tanto para os experimentos com Linearização Completa, quanto para aqueles com a Simplificada. Percebe-se que, em cada um dos gráficos, os valores de tempo médio de processamento para os experimentos com Linearização Completa é, na maioria dos casos, superior a esses mesmos valores para os experimentos com Linearização Simplificada, para qualquer número de segmentos. Além disso, é visível que com o aumento do número de segmentos verifica-se um aumento na diferença percentual entre esses valores, o que é

comprovado pelo afastamento entre cada uma das retas, as quais tem valores mais próximos para números menores de segmentos e valores mais distantes para números maiores de segmentos. Esse maior afastamento ocorre, no geral, a partir do número de segmentos igual a 13.

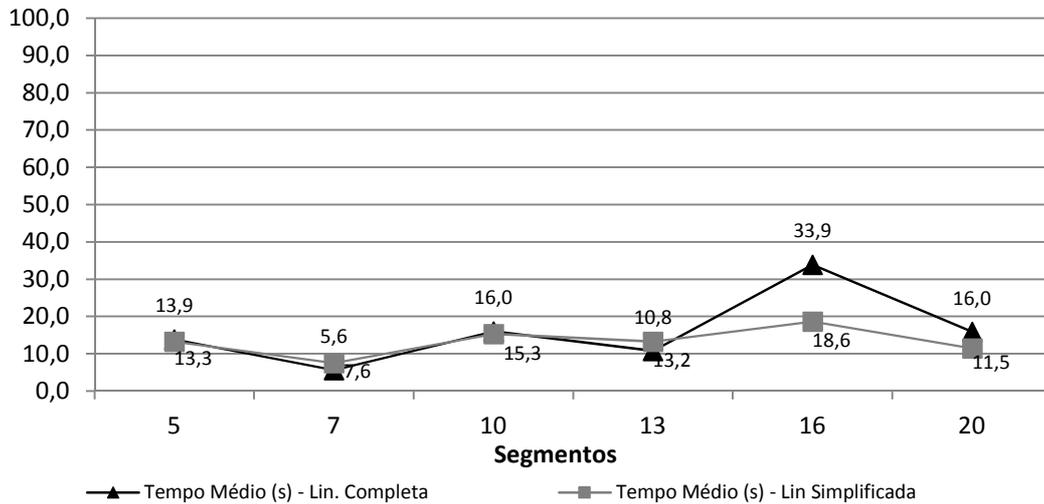


Figura 10 - Tempo Médio por Nº de Segmentos (Modelo 1 - SAU)
Fonte : O Autor

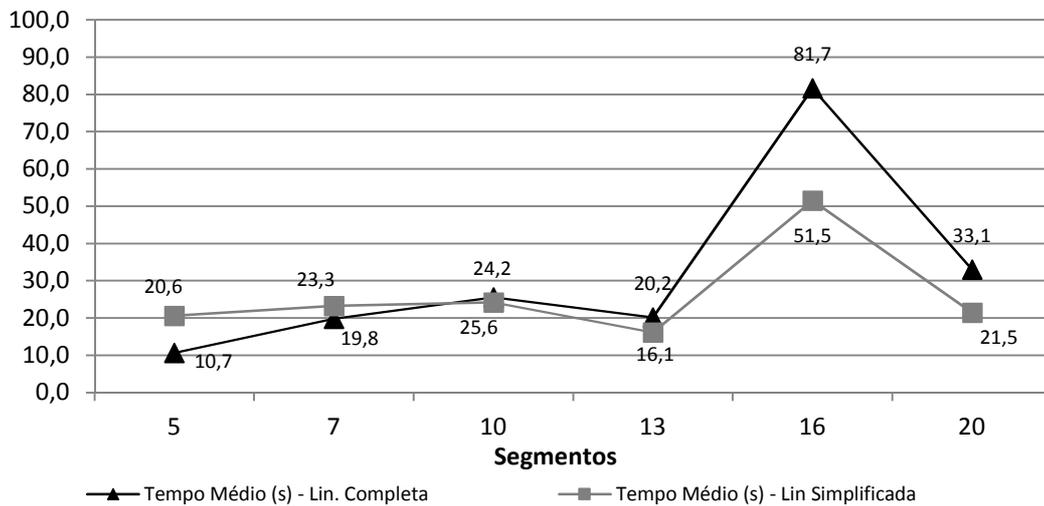


Figura 11 - Tempo Médio por Nº de Segmentos (Modelo 1 - SOU)
Fonte : O Autor

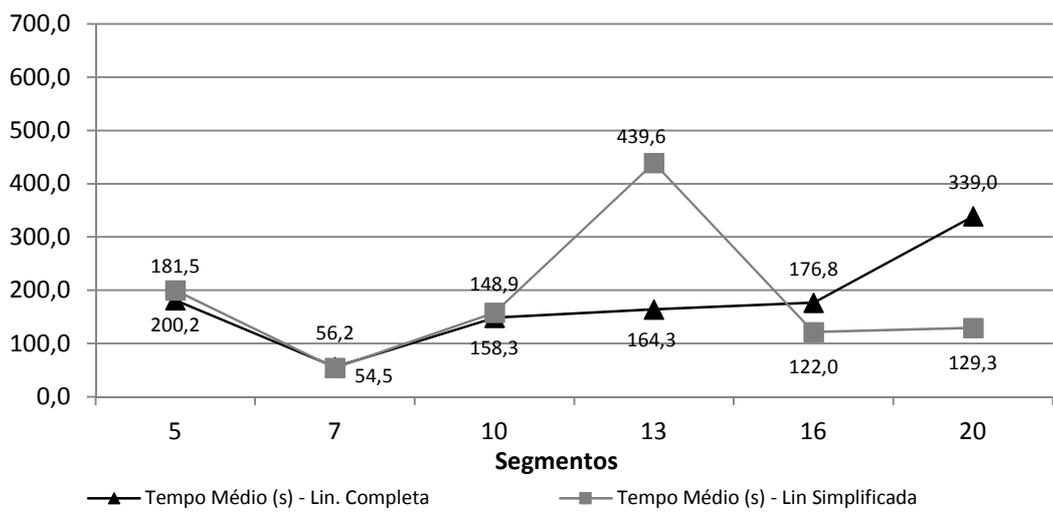


Figura 12 - Tempo Médio por Nº de Segmentos (Modelo 2 - SAU)
 Fonte : O Autor

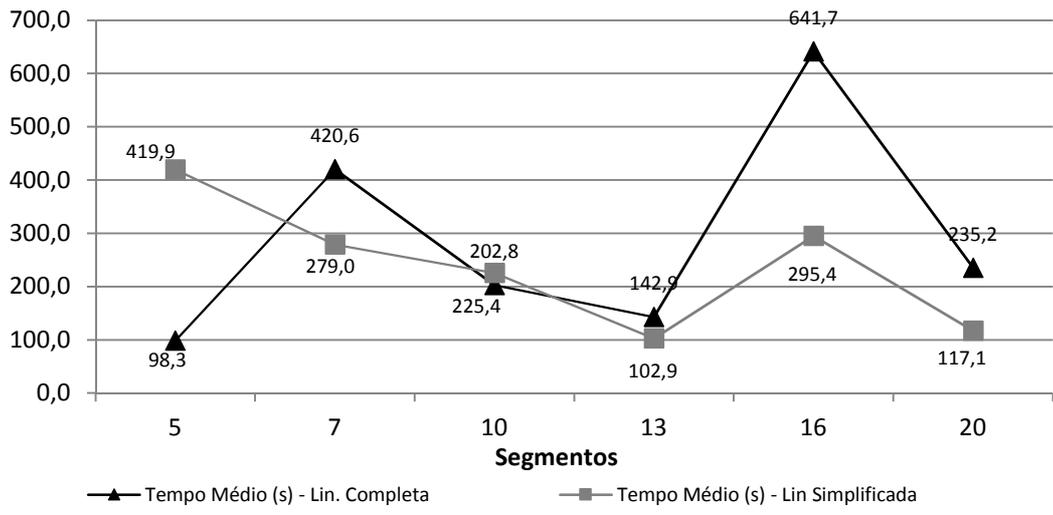


Figura 13 - Tempo Médio por Nº de Segmentos (Modelo 2- SOU)
 Fonte : O Autor

Além das análises relacionadas ao tempo médio de processamento dos experimentos, foram também feitas análises relacionadas ao erro médio de linearização desses mesmos experimentos, cujo valor é encontrado através da expressão (5.1).

$$\text{Erro Médio de Linearização} = \frac{SS_{Real} - SS_{Linearizado}}{SS_{Real}} \times 100\% \quad (5.1)$$

$$SS_{Real} = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} SS_{ik} = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \left[Z_\alpha \sqrt{\sum_{l \in L} \phi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl}} \right] \quad (5.2)$$

$$SS_{Linearizado} = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} SS_{ik} = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \left[Z_\alpha \sum_{r \in R} \left(F_{ik}^r u_{ik}^r + C_{ik}^r \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \right) \right] \quad (5.3)$$

O erro médio de linearização (5.1) consiste em uma diferença percentual entre o valor do Estoque de Segurança Total Real (SS_{Real}), representado pela equação (5.2), a qual realiza o somatório dos termos da restrição (4.2), e o valor do Estoque de Segurança Total Linearizado, representado pela equação (5.3), a qual realiza o somatório dos termos da restrição (4.2a). O gráfico da Figura 14 representa erro médio de linearização graficamente.

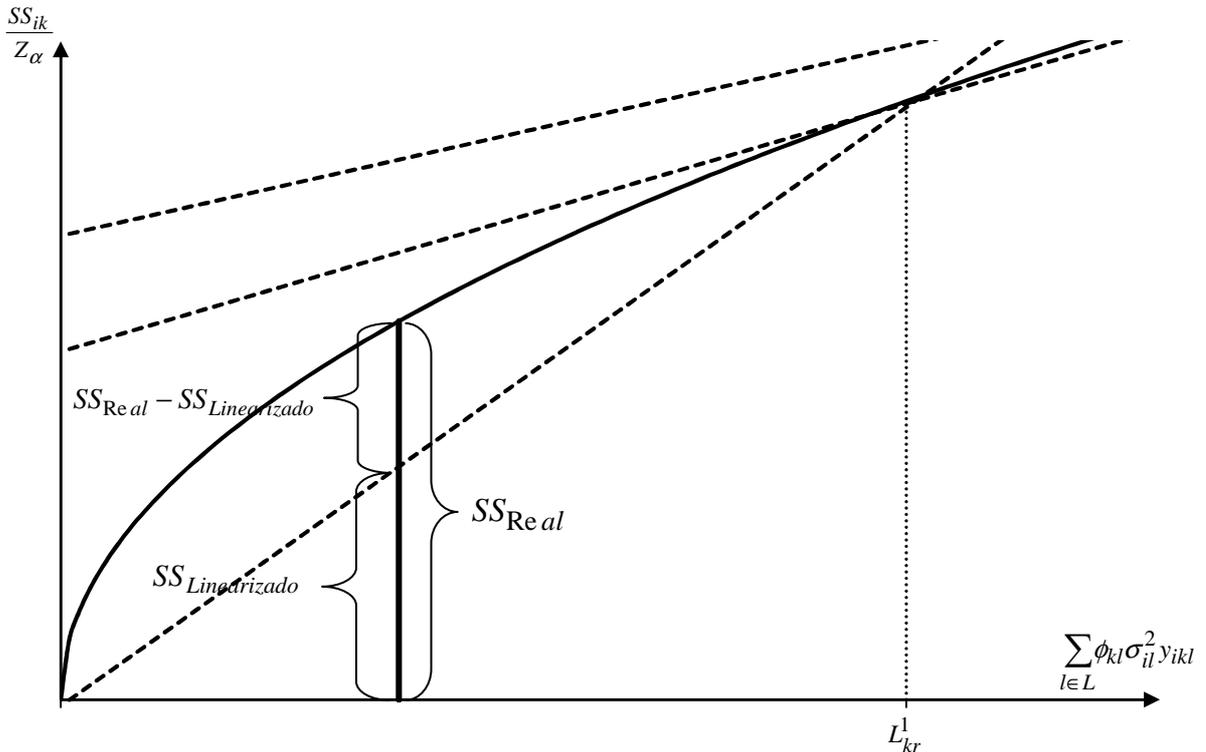


Figura 14 - Erro Médio de Linearização
Fonte : Adaptado de Bittencourt (2014)

Analisando-se a Tabela 8, percebe-se que os valores de erro médio de linearização para grupos de experimentos análogos do Modelo 1 e do Modelo 2, ou seja,

com mesma forma de segmentação (Abscissas Uniformes ou Ordenadas Uniformes) e mesmo tipo de linearização (Completa ou Simplificada), são idênticos quando arredondados em 1 casa decimal. Quando se analisa esses mesmos valores por números de segmentos, conforme mostrado nos gráficos das Figuras 15 a 18, percebe-se que o erro médio de linearização por número de segmentos se mantém idênticos quando arredondados em 1 casa decimal para esses mesmos grupos de experimentos análogos do Modelo 1 e do Modelo 2, exceto para os casos em que o número de segmentos é igual a 5 e a 7 dos modelos com Segmentação das Abscissas Uniformes e Linearização Simplificada, onde existe uma pequena e insignificativa diferença entre o erro médio do Modelo 1 e o erro médio do Modelo 2. Dessa forma, os gráficos das Figuras 15 e 16, referentes ao Modelo 1, podem ser considerados idênticos aos gráficos das Figuras 17 e 18, referentes ao Modelos 2, respectivamente. Portanto, apesar de os experimentos realizados através do Modelo 2 apresentarem maior tempo médio de processamento quando comparados com aqueles realizados através do Modelo 1, conforme mostrado anteriormente, os resultados de ambos possuem erro médio de linearização similares. A análise a partir de agora é feita, então, sem se considerar o modelo utilizado (Modelo 1 ou Modelo 2), já que tal consideração não gera mudanças significativas no erro médio de linearização.

Linearização	Modelo 1		Modelo 2	
	SAU	SOU	SAU	SOU
Completa	34,3%	8,3%	34,3%	8,3%
Simplificada	44,5%	12,2%	44,5%	12,2%

Tabela 8 - Erro Médio de Linearização

Comparando-se os experimentos quanto ao tipo de linearização utilizada, é visível em todos os gráficos, e também na Tabela 8, que aqueles com Linearização Completa possuem sempre valores de erro médio de linearização inferiores aos valores correspondentes dos experimentos com Linearização Simplificada, o que era exatamente o intuito de se propor o uso da Linearização Completa. Além disso, é visível também que quanto maior o número de segmentos, menor o erro médio de linearização, seja qual for o tipo de linearização utilizado, o que é algo que já se esperava.

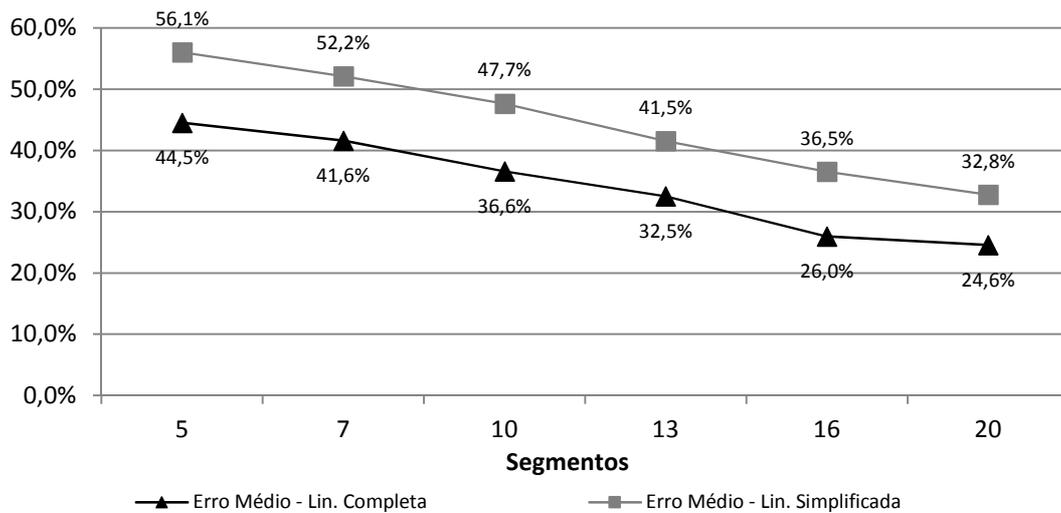


Figura 15 - Erro Médio por N° de Segmentos (Modelo 1 - SAU)
 Fonte: O Autor

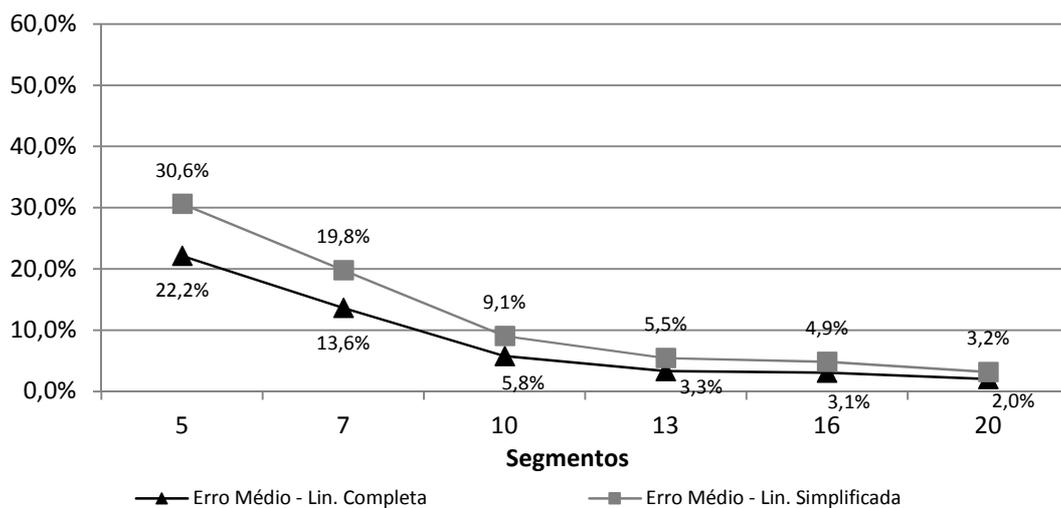


Figura 16 - Erro Médio por N° de Segmentos (Modelo 1 - SOU)
 Fonte: O Autor

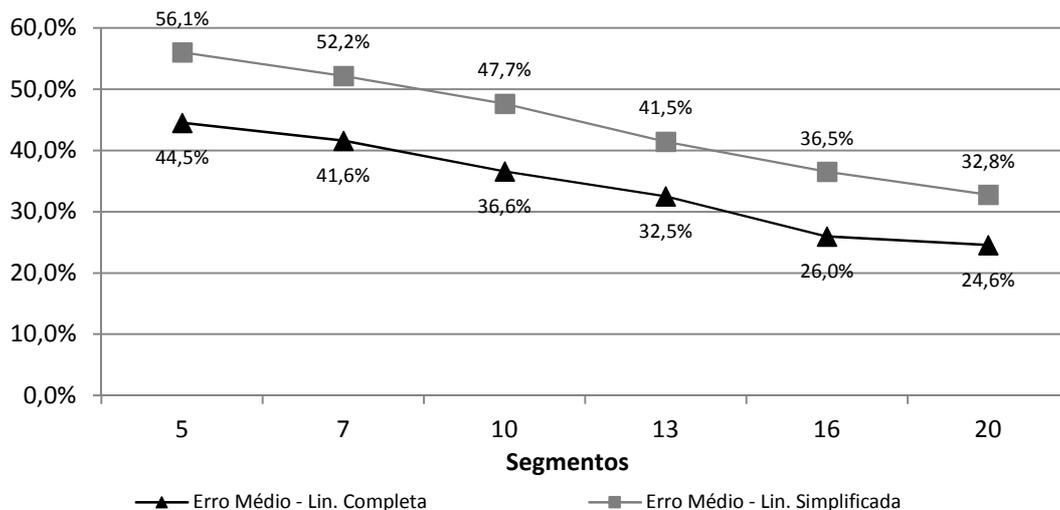


Figura 17 - Erro Médio por N° de Segmentos (Modelo 2 - SAU)
Fonte: O Autor

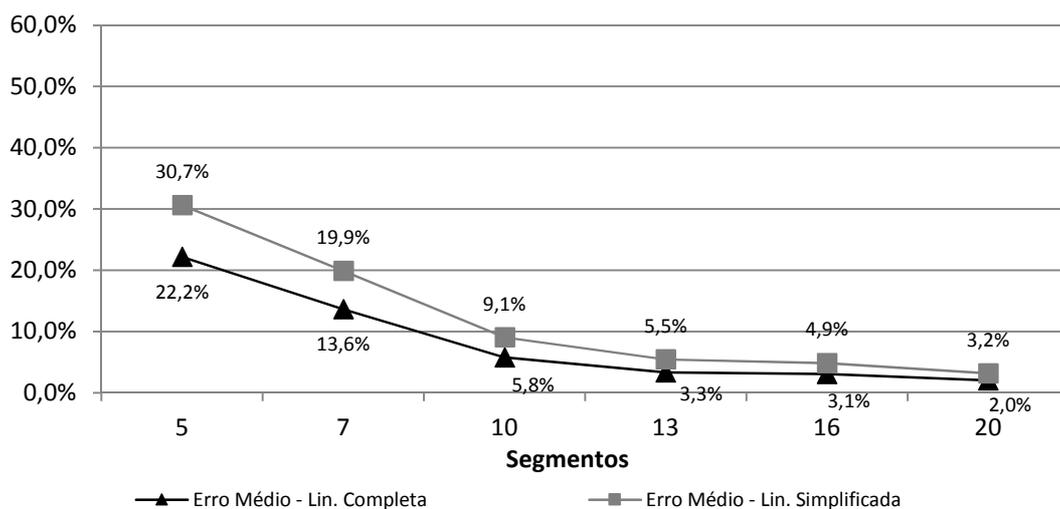


Figura 18 - Erro Médio por N° de Segmentos (Modelo 2 - SOU)
Fonte: O Autor

Para análise da influência das segmentações no valor do erro médio de linearização, juntou-se os dois gráficos referentes ao Modelo 1 (Figuras 15 e 16) em um só gráfico, dando origem ao gráfico apresentado pela Figura 19. Não foi feito o mesmo para os gráficos referentes ao Modelo 2 (Figuras 17 e 18) já que, conforme mencionado anteriormente, não há diferença significativa nos valores do erro médio de linearização entre resultados provenientes do Modelo 1 e os provenientes do Modelo 2. Analisando-se a Figura 19, pode-se perceber que, para cada série de dados que representa uma das duas possíveis linearizações (Completa e Simplificada), os resultados provenientes de

experimentos realizados com Segmentação das Ordenadas Uniformes (SOU) são sempre menores que aqueles realizados com Segmentação das Abscissas Uniformes (SAU). Inclusive, ao se percorrer a curva da Linearização Completa nesse gráfico, por exemplo, percebe-se que o valor do erro médio de linearização dos experimentos que utilizaram a Segmentação das Abscissas Uniformes com o maior número possível de segmentos (24,6%), ou seja, 20 segmentos é superior ao valor desse mesmo erro referente aos experimentos que utilizaram a Segmentação das Ordenadas Uniformes com o menor número possível de segmentos (22,2%), ou seja, 5 segmentos. Essa mesma análise é válida também para a curva da Linearização Simplificada. Portanto, a Segmentação das Ordenadas Uniformes é sempre mais efetiva no que diz respeito à obtenção de menores erros médios de linearização.

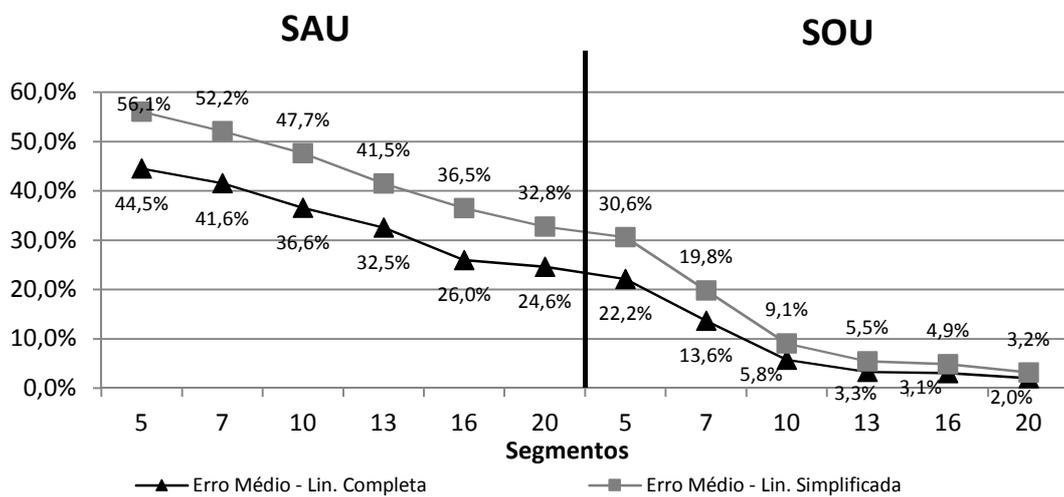


Figura 19 - Erro Médio por N° de Segmentos (Modelo 1)
Fonte: O Autor

Além disso, ainda observando-se essa mesma figura, é possível perceber que, para os experimentos com Segmentação das Abscissas Uniformes há uma grande diferença, com média de 10,2%, entre os valores do erro médio de linearização da Linearização Completa e da Linearização Simplificada para todos os números de segmentos. Já quando se chega aos experimentos com Segmentação das Ordenadas Uniformes, há uma redução visível no valor dessa mesma diferença, conforme se aumenta o número de segmentos. Para os experimentos que utilizaram tal tipo de segmentação com 5 segmentos, a diferença entre o erro médio de linearização entre aqueles que utilizaram Linearização Completa e os que utilizaram Linearização Simplificada é de 8,4%, diferença essa que chega a 1,2% quando se altera o número de

segmentos para 20. Portanto, diferentemente do que se observa na Segmentação das Abscissas Uniformes, a Segmentação das Ordenadas Uniformes gera uma redução na diferença dos erros médios de linearização entre a Linearização Completa e a Simplificada que diminui com o aumento do número de segmentos.

5.2 Influência do Número de Produtos

O segundo grupo de experimentos foi realizado com o objetivo principal de se analisar a influência do aumento do número de produtos no tempo médio de processamento dos experimentos para o Modelo 1, o qual apresentou menor tempo de processamento nos experimentos realizados na seção anterior. Todos os experimentos realizados nesta seção foram linearizados de acordo com a Linearização por Partes Completa, a qual é mais efetiva na redução do erro médio de linearização em comparação com a Linearização por Partes Simplificada, conforme mostrado também nos experimentos realizados na seção anterior.

Para a realização dos experimentos foram geradas instâncias com 10 fornecedores, 10 armazéns, 50 clientes ou 15 fornecedores, 15 armazéns, 100 clientes, combinadas com os parâmetros CUF e CUA assumindo, ambos, valores de 50% ou de 80% e com número de segmentos igual a 10 ou 20. Para todas essas combinações de parâmetros foram geradas instâncias com 1, 3 ou 5 produtos, totalizando 24 instâncias. Foram testados experimentos com 1, 3 e 5 produtos, pois os mesmos representam, respectivamente, os valores mínimo, intermediário e máximo de produtos considerados nesse trabalho. Cada uma dessas instâncias possuía os parâmetros referentes às Segmentações das Abscissas Uniformes (SAU) e das Ordenadas Uniformes (SOU), totalizando, portanto, 48 experimentos realizados com tempo máximo limitado em 1 hora para cada um. Os resultados desses experimentos são apresentados a seguir.

A Tabela 9 apresenta a contagem dos experimentos que encontraram solução ótima, solução inteira não ótima, solução inviável dentro do limite máximo de 1 hora ou solução inviável, dividindo-se a contagem por quantidade de produtos considerados (1, 3 e 5), o que totaliza os 48 experimentos realizados. Analisando-se os dados apresentados nesta tabela, verifica-se que a grande maioria dos experimentos com 1 só produto pode encontrar soluções ótimas (75%) e os que não encontraram solução ótima representavam instâncias inviáveis para o problema (25%).

Já em relação às instâncias com 3 produtos, na grande maioria dos experimentos foi encontrada uma solução inteira não-ótima (75% experimentos), e em poucos foram encontradas soluções ótimas (18,8%). Assim, como ocorreu para experimentos com 3 produtos, para aqueles com 5 produtos foram observados poucos experimentos obtendo solução ótima (12,5%) e a grande maioria obtendo solução inteira não-ótima (87,5%). Foram realizados experimentos com limite máximo de tempo de 2 horas para algumas destas instâncias que obtiveram uma solução inteira não-ótima, com o objetivo de se verificar se com o dobro de tempo seria possível chegar à solução ótima. Entretanto, além de nenhum desses experimentos ter conseguido chegar à solução ótima, eles também não obtiveram uma diminuição significativa do *gap* de otimalidade, já que com o limite de 1 hora tal *gap* já possuía um valor baixo para todos os casos. Desta maneira, resolveu-se manter a análise dos resultados com limite máximo de 1 hora para todos os experimentos.

Solução	Experimentos		
	1 produto	3 produtos	5 produtos
Ótima	12	3	2
Inteira Não-Ótima	-	12	14
Inviável dentro do limite de 1 hora	-	1	-
Inviável	4	-	-
Total	16	16	16

Tabela 9 - Contagem dos experimentos por tipo de solução

Conforme se verifica na Tabela 10, os experimentos com 5 produtos apresentaram um tempo médio de processamento de aproximadamente 54 minutos (3245,3 segundos), o que representa um valor bastante próximo de 1 hora já que 87,5% desses experimentos rodaram até o limite máximo de tempo, tendo encontrado uma solução inteira não-ótima em todos esses casos. Já os experimentos com 3 produtos apresentaram um tempo médio de processamento de aproximadamente 49 minutos (2946,3 segundos), o que representa também um valor bastante próximo de 1 hora já que 81,3% desses experimentos rodaram até o limite máximo de tempo tendo, também todos eles, encontrado uma solução inteira não-ótima, exceto um caso em que não foi possível encontrar solução inteira viável neste limite de tempo. Por fim, para os experimentos com 1 produto, o tempo médio de processamento foi de 20,8 segundos, número bastante inferior a esse mesmo indicador para os modelos com 3 e 5 produtos.

Dessa forma, pode-se dizer que o aumento de 1 para 3 produtos, o que representa um aumento de 200% no número de produtos, gerou um aumento de pelo menos 14.000% no tempo médio de processamento e que o aumento de 1 para 5 produtos, o que representa um aumento de 400% no número de produtos, gerou um aumento de pelo menos 15.500% no tempo médio de processamento. Em ambos os casos foi considerado um aumento de “pelo menos certa percentagem” já que muitos dos experimentos envolvidos precisariam de mais tempo para chegar a uma solução ótima. Portanto, como se pode verificar pela comparação feita, o aumento do número de produtos na modelagem ocasiona um aumento significativo no tempo médio de processamento dos experimentos.

Experimentos		
1 produto	3 produtos	5 produtos
20,8 s	2.946,3 s	3.245,3 s

Tabela 10 - Tempo Médio de Processamento por quantidade de produtos

Avaliou-se também o *gap* de otimalidade encontrado nos resultados dos experimentos para modelos com 3 e 5 produtos que apresentaram soluções inteiras não-ótimas. Como nenhum deles obteve solução ótima, todos eles tiveram um *gap* de otimalidade diferente de zero, já que esse valor representa a diferença percentual entre os valores dos limitantes primais e duais da função objetivo, nesse caso, após 1 hora de processamento. Conforme apresentado na Tabela 11, o valor mínimo para o *gap* de otimalidade encontrado no resultado desses experimentos foi de 0,0004%, enquanto o valor máximo foi de 0,89%, o que pode ser considerado um valor bem pequeno. Calculou-se também o *gap* médio para tais experimentos, encontrando-se o valor é de 0,08%.

Experimentos	
<i>Gap</i> de Otimalidade Mínimo	0,0004%
<i>Gap</i> de Otimalidade Médio	0,08%
<i>Gap</i> de Otimalidade Máximo	0,89%

Tabela 11 - *Gap* de Otimalidade para instâncias com 3 e 5 produtos e soluções não-ótimas

Portanto, pode-se dizer que, apesar de não terem sido obtidas soluções ótimas para a maioria dos experimentos com 3 e 5 produtos dentro de um tempo limite de 1 hora, obteve-se sempre soluções inteiras não ótimas com valores de gap de otimalidade relativamente pequenos. Ainda assim, resolveu-se rodar novamente alguns experimentos com o tempo máximo limitado em 2 horas. Apesar do aumento no limite do tempo de processamento, todos os experimentos continuaram alcançando o tempo máximo de processamento sem encontrar soluções ótimas e com valores de *gap* de otimalidade não muito diferentes daqueles apresentados pelos respectivos experimentos com tempo limite de 1 hora.

5.3 Comparação entre Modelo 1 com e sem a declaração de tipo SOS1

Os experimentos desta seção foram realizados com o objetivo de se analisar a influência da declaração das restrições (4.15) como restrições do tipo SOS1 no desempenho do Modelo 1, como foi explicado na seção 4.3 deste trabalho. De acordo com Bisschop (2012), no *software* AIMMS há um atributo de restrições chamado de propriedade onde é possível indicar que uma determinada restrição é do tipo SOS1. Esse atributo foi utilizado para declarar as restrições (4.15) do Modelo 1 como restrições do tipo SOS1 no *software* AIMMS.

$$\sum_{r \in R} u_{ik}^r \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.15)$$

Foram realizados experimentos com o Modelo 1 e com a Linearização por Partes Completa, pelo mesmo motivo apresentado na seção 5.2. Para a realização dos experimentos foram utilizadas as mesmas instâncias geradas para os experimentos desta última seção, as quais foram criadas com 10 fornecedores, 10 armazéns, 50 clientes ou 15 fornecedores, 15 armazéns, 100 clientes, combinadas com os parâmetros CUF e CUA assumindo, ambos, valores de 50% ou de 80%, com número de segmentos igual a 10 ou 20 e com 1, 3 ou 5 produtos, totalizando 24 instâncias. Cada uma dessas instâncias possuía os parâmetros referentes às Segmentações das Abscissas Uniformes (SAU) e das Ordenadas Uniformes (SOU), o que leva a um total de 48 conjuntos de dados. Cada um desse conjunto de dados foi rodado 2 vezes, sendo a primeira no Modelo 1 em seu formato padrão e a segunda no Modelo 1 com a declaração das restrições (4.15) como do tipo SOS1, totalizando 96 experimentos realizados com tempo máximo limitado em 1 hora para cada um.

A Tabela 12 apresenta o resultado de todos 96 experimentos realizados. A primeira coluna desta tabela representa a instância utilizada, cuja denominação é feita de acordo com a nomenclatura $i-j-k-l_s-FUF-FUA_Segmentação$, onde:

- i : número de produtos;
- j : número de fornecedores;
- k : número de armazéns;
- l : número de clientes;
- s : número de segmentos;
- FUF : Fator de Utilização da Capacidade dos Fornecedores;
- FUA : Fator de Utilização da Capacidade dos Armazéns;
- $Segmentação$: tipo de segmentação utilizada (SAU ou SOU).

A segunda e a terceira coluna da Tabela 12 apresentam, respectivamente, o tempo de processamento, em segundos, e o status final do experimento feito com uma determinada instância utilizando-se o Modelo 1 sem a declaração de restrições do tipo SOS1, enquanto a quarta e a quinta coluna desta mesma tabela apresentam essas mesmas informações para o experimento feito utilizando-se o Modelo 1 com a declaração de restrições do tipo SOS1. A nomenclatura utilizada para o status final do programa é a mesma fornecida como dado de saída pelo *software* AIMMS, podendo assumir as seguintes alternativas: “*Optimal*”, quando o resolvidor encontrar uma solução ótima; “*IntegerSolution*”, quando o resolvidor encontrar uma solução viável não-ótima; “*IntermediateInfeasible*”, quando quando o resolvidor não for capaz de encontrar uma solução viável para o problema no limite de 1 hora; e “*IntegerInfeasible*”, quando o problema for inviável para determinada instância.

Analisando-se os dados da Tabela 12 é possível perceber que, para quase todas as instâncias, o *status* final do caso foi igual para os experimentos feitos com e sem a declaração de variáveis do tipo SOS1. Do total de 48 instâncias, esse fato só não ocorreu para as 4 seguintes: “3-10-10-50_10-0,50-0,50_SAU” e “3-10-10-50_10-0,50-0,50_SOU”, para as quais o experimento feito com o Modelo 1 sem a declaração de SOS1 encontrou uma solução viável não ótima, enquanto o experimento feito com o Modelo 1 com a declaração de SOS1 encontrou uma solução viável ótima ; “3-15-15-100_20-0,80-0,80_SOU”, para a qual o experimento feito com o Modelo 1 sem a declaração de SOS1 não encontrou nenhuma solução viável no intervalo de 1 hora,

enquanto o experimento feito com o Modelo 1 com a declaração de SOS1 encontrou uma solução viável não ótima; e “5-10-10-50_10-0,50-0,50_SAU”; para a qual o experimento feito com o Modelo 1 sem a declaração de SOS1 encontrou uma solução ótima, enquanto o experimento feito com o Modelo 1 com a declaração de SOS1 encontrou uma solução viável não ótima.

Instância	Modelo 1 - Padrão		Modelo 1 - SOS1	
	Tempo (s)	Status Final	Tempo (s)	Status Final
1-10-10-50_10-0,50-0,50_SAU	1,6	<i>Optimal</i>	1,6	<i>Optimal</i>
1-10-10-50_10-0,50-0,50_SOU	2,0	<i>Optimal</i>	1,3	<i>Optimal</i>
1-10-10-50_10-0,80-0,80_SAU	11,7	<i>Optimal</i>	12,4	<i>Optimal</i>
1-10-10-50_10-0,80-0,80_SOU	22,8	<i>Optimal</i>	13,6	<i>Optimal</i>
1-10-10-50_20-0,50-0,50_SAU	1,8	<i>Optimal</i>	1,7	<i>Optimal</i>
1-10-10-50_20-0,50-0,50_SOU	3,2	<i>Optimal</i>	5,2	<i>Optimal</i>
1-10-10-50_20-0,80-0,80_SAU	-	<i>IntegerInfeasible</i>	-	<i>IntegerInfeasible</i>
1-10-10-50_20-0,80-0,80_SOU	-	<i>IntegerInfeasible</i>	-	<i>IntegerInfeasible</i>
1-15-15-100_10-0,50-0,50_SAU	42,5	<i>Optimal</i>	25,2	<i>Optimal</i>
1-15-15-100_10-0,50-0,50_SOU	34,4	<i>Optimal</i>	47,5	<i>Optimal</i>
1-15-15-100_10-0,80-0,80_SAU	-	<i>IntegerInfeasible</i>	-	<i>IntegerInfeasible</i>
1-15-15-100_10-0,80-0,80_SOU	-	<i>IntegerInfeasible</i>	-	<i>IntegerInfeasible</i>
1-15-15-100_20-0,50-0,50_SAU	21,6	<i>Optimal</i>	33,4	<i>Optimal</i>
1-15-15-100_20-0,50-0,50_SOU	78,3	<i>Optimal</i>	90,9	<i>Optimal</i>
1-15-15-100_20-0,80-0,80_SAU	12,4	<i>Optimal</i>	12,8	<i>Optimal</i>
1-15-15-100_20-0,80-0,80_SOU	100,5	<i>Optimal</i>	87,5	<i>Optimal</i>
3-10-10-50_10-0,50-0,50_SAU	3603,2	<i>IntegerSolution</i>	2703,3	<i>Optimal</i>
3-10-10-50_10-0,50-0,50_SOU	3600,3	<i>IntegerSolution</i>	3038,8	<i>Optimal</i>
3-10-10-50_10-0,80-0,80_SAU	3600,0	<i>IntegerSolution</i>	3600,1	<i>IntegerSolution</i>
3-10-10-50_10-0,80-0,80_SOU	3600,1	<i>IntegerSolution</i>	3600,1	<i>IntegerSolution</i>
3-10-10-50_20-0,50-0,50_SAU	24,8	<i>Optimal</i>	23,7	<i>Optimal</i>
3-10-10-50_20-0,50-0,50_SOU	139,6	<i>Optimal</i>	344,9	<i>Optimal</i>
3-10-10-50_20-0,80-0,80_SAU	134,3	<i>Optimal</i>	25,3	<i>Optimal</i>
3-10-10-50_20-0,80-0,80_SOU	3600,1	<i>IntegerSolution</i>	3600,1	<i>IntegerSolution</i>
3-15-15-100_10-0,50-0,50_SAU	3608,3	<i>IntegerSolution</i>	3612,5	<i>IntegerSolution</i>
3-15-15-100_10-0,50-0,50_SOU	3601,3	<i>IntegerSolution</i>	3603,2	<i>IntegerSolution</i>
3-15-15-100_10-0,80-0,80_SAU	3600,1	<i>IntegerSolution</i>	3600,5	<i>IntegerSolution</i>
3-15-15-100_10-0,80-0,80_SOU	3625,8	<i>IntegerSolution</i>	3600,4	<i>IntegerSolution</i>
3-15-15-100_20-0,50-0,50_SAU	3601,9	<i>IntegerSolution</i>	3600,6	<i>IntegerSolution</i>
3-15-15-100_20-0,50-0,50_SOU	3600,5	<i>IntegerSolution</i>	3600,8	<i>IntegerSolution</i>
3-15-15-100_20-0,80-0,80_SAU	3600,3	<i>IntegerSolution</i>	3600,8	<i>IntegerSolution</i>
3-15-15-100_20-0,80-0,80_SOU	3600,3	<i>IntermediateInfeasible</i>	3600,7	<i>IntegerSolution</i>
5-10-10-50_10-0,50-0,50_SAU	1035,7	<i>Optimal</i>	3602,1	<i>IntegerSolution</i>
5-10-10-50_10-0,50-0,50_SOU	292,1	<i>Optimal</i>	435,6	<i>Optimal</i>
5-10-10-50_10-0,80-0,80_SAU	3600,3	<i>IntegerSolution</i>	3600,3	<i>IntegerSolution</i>
5-10-10-50_10-0,80-0,80_SOU	3604,0	<i>IntegerSolution</i>	3606,5	<i>IntegerSolution</i>
5-10-10-50_20-0,50-0,50_SAU	3600,3	<i>IntegerSolution</i>	3600,6	<i>IntegerSolution</i>
5-10-10-50_20-0,50-0,50_SOU	3610,2	<i>IntegerSolution</i>	3613,5	<i>IntegerSolution</i>
5-10-10-50_20-0,80-0,80_SAU	3600,8	<i>IntegerSolution</i>	3600,6	<i>IntegerSolution</i>
5-10-10-50_20-0,80-0,80_SOU	3600,4	<i>IntegerSolution</i>	3600,2	<i>IntegerSolution</i>
5-15-15-100_10-0,50-0,50_SAU	3606,7	<i>IntegerSolution</i>	3631,0	<i>IntegerSolution</i>
5-15-15-100_10-0,50-0,50_SOU	3600,6	<i>IntegerSolution</i>	3652,2	<i>IntegerSolution</i>
5-15-15-100_10-0,80-0,80_SAU	3640,6	<i>IntegerSolution</i>	3653,9	<i>IntegerSolution</i>
5-15-15-100_10-0,80-0,80_SOU	3705,6	<i>IntegerSolution</i>	3615,7	<i>IntegerSolution</i>
5-15-15-100_20-0,50-0,50_SAU	3601,7	<i>IntegerSolution</i>	3602,4	<i>IntegerSolution</i>
5-15-15-100_20-0,50-0,50_SOU	3600,6	<i>IntegerSolution</i>	3601,5	<i>IntegerSolution</i>
5-15-15-100_20-0,80-0,80_SAU	3625,1	<i>IntegerSolution</i>	3614,0	<i>IntegerSolution</i>
5-15-15-100_20-0,80-0,80_SOU	3600,6	<i>IntegerSolution</i>	3601,4	<i>IntegerSolution</i>

Tabela 12 - Modelo 1 Padrão x SOS1

Além disso, para a maioria das instâncias, a diferença de tempo de processamento entre os experimentos com e sem declaração de restrições do tipo SOS1 não foi significativa. Por isso, criou-se a Tabela 13, a qual apresenta novamente os tempos de processamento do Modelo 1 sem e com a declaração das variáveis do tipo SOS1 e a diferença entre tais tempos nas três últimas colunas, só englobando as instâncias para as quais esta diferença entre tempo de processamento foi igual ou superior a 100 segundos, de forma a facilitar a visualização do leitor. No total, somente 6 das 48 instâncias apresentaram uma diferença maior que 100 segundos entre os tempos de processamento dos experimentos, sendo que nenhuma delas possuía o parâmetro número de produtos igual a 1.

Instância	Tempo (s)		Diferença de Tempo (s) Original - SOS1
	Modelo 1 - Padrão	Modelo 1 - SOS1	
3-10-10-50_10-0,50-0,50_SAU	3603,2	2703,3	899,986
3-10-10-50_10-0,50-0,50_SOU	3600,3	3038,8	561,432
3-10-10-50_20-0,50-0,50_SOU	139,6	344,9	-205,25
3-10-10-50_20-0,80-0,80_SAU	134,3	25,3	109,013
5-10-10-50_10-0,50-0,50_SAU	1035,7	3602,1	-2566,419
5-10-10-50_10-0,50-0,50_SOU	292,1	435,6	-143,505

Tabela 13 - Modelo 1 Padrão x SOS1 - Instâncias com Diferenças Significativas

Por fim, vale notar que a diferença entre tempo de processamento, quando positiva, indica que o experimento sem a declaração de restrições do tipo SOS1 teve um maior tempo de processamento que o experimento contando com tal declaração, o que indica que, nesses casos, a declaração atingiu o objetivo de redução do tempo. Entretanto, vale notar que houve casos em que a diferença foi negativa, o que indica um aumento no tempo de processamento ao se incluir essa declaração.

Portanto, como para a maioria dos casos não houve alteração significativa no tempo de processamento ao se adicionar a declaração de restrições do tipo SOS1 e, para os casos em que houve alteração significativa, a declaração indicou redução no indicador de tempo em uns casos e aumento em outros casos, não foi possível detectar um padrão de comportamento, não sendo possível, então, afirmar que a inclusão dessa declaração ajudaria na melhoria do tempo de processamento do modelo envolvido nos experimentos.

5.4 Desempenho da Abordagem por Decomposição Lagrangeana

Nesta última seção de experimentos o objetivo principal foi o de se analisar o desempenho da abordagem por Decomposição Lagrangeana aplicada ao Modelo 1 através da dualização das restrições de conservação de fluxo, dividindo o subproblema lagrangeano em outros dois subproblemas, um englobando as variáveis relacionadas ao primeiro elo (fornecedores-armazéns) e o outro englobando as variáveis do segundo elo (armazéns-clientes), conforme apresentado na seção 4.4.

Para a realização dos experimentos foram utilizadas as mesmas instâncias geradas para os experimentos da seção 5.2, as quais também foram utilizadas nos experimentos da seção 5.3, tendo sido criadas com 10 fornecedores, 10 armazéns, 50 clientes ou 15 fornecedores, 15 armazéns, 100 clientes, combinadas com os parâmetros CUF e CUA assumindo, ambos, valores de 50% ou de 80%, com número de segmentos igual a 10 ou 20 e com 1, 3 ou 5 produtos, totalizando 24 instâncias. Cada uma dessas instâncias possuía os parâmetros referentes às Segmentações das Abscissas Uniformes (SAU) e das Ordenadas Uniformes (SOU), o que leva a um total de 48 experimentos. Todos os experimentos foram feitos considerando o cálculo dos parâmetros de linearização de acordo com a Linearização por Partes Completa, já que a mesma produz menores erros de linearização quando comparada com a Linearização por Partes Simplificada.

O Algoritmo do Subgradiente, conforme descrito na seção 4.4, foi implementado no *software* AIMMS (*Paragon Decision Technology B.V.*) em sua versão 3.13. O valor utilizado como o parâmetro *primal* na relaxação foi, para cada instância, estabelecido como a melhor solução viável conhecida para a mesma, ou seja, o valor da solução encontrada pelos experimentos feitos com o Modelo 1 padrão – sem a declaração de variáveis do tipo SOS1 – na seção 5.3. Portanto, se para uma determinada instância uma solução ótima for conhecida, então esse valor deve ser usado como *primal* na relaxação; caso não se conheça uma solução ótima, mas sim uma solução viável, então o valor de tal solução viável deve ser usado como *primal* na relaxação; por fim, se não for conhecida nenhuma solução viável para o problema, não há valor a ser usado como *primal* na relaxação e por isso não deve ser aplicada a relaxação neste caso. Os valores iniciais de todos os multiplicadores lagrangeanos $(\lambda_{ik})^{p=0}$ foram fixados em zero e o valor inicial do parâmetro ϵ foi fixado como igual a 2 sendo que, a cada 100 passos, tal

parâmetro teve seu valor corrente dividido pela metade. Por fim, foram estabelecidos os seguintes critérios que determinam o fim do algoritmo:

- Limite máximo de passos igual a 200; portanto, caso o algoritmo atinja o passo 200, ele deve ser finalizado;
- Tamanho do passo sempre superior a 0,0001; portanto, se em um passo o tamanho do passo seguinte calculado for menor ou igual a esse valor, o algoritmo deve parar;
- Limite máximo do somatório dos tempos de solução dos Subproblemas 1 e 2 em todos os passos igual 1 hora; portanto, o tempo máximo de duração do algoritmo pode ser maior que 1 hora, contanto que a soma dos tempos de solução dos Subproblemas 1 e 2 em todos os passos seja no máximo igual a esse valor;
- Diferença entre *primal* e *dual^p* menor ou igual que 1 unidade para o caso em que o primal utilizado for a solução ótima, pois, caso tal diferença seja menor ou igual a 1 pode-se dizer que foi encontrado uma solução ótima.

As Tabelas 14 e 15 apresentam o resultado dos experimentos realizados nesta seção. Os resultados foram separados de acordo com o tipo de *primal* utilizado, sendo aqueles cujo *primal* é uma solução ótima apresentados na Tabela 14 e aqueles cujo *primal* não é uma solução ótima apresentados na Tabela 15. A primeira coluna destas tabelas representa a instância utilizada, sendo a nomenclatura a mesma utilizada na seção anterior. A segunda, a terceira e a quarta colunas representam o tempo total do algoritmo do subgradiente, em segundos, e o somatório dos tempos das soluções do Subproblema 1 e o somatório dos tempos das soluções do Subproblema 2 em termos de porcentagem do tempo total, respectivamente. A quinta coluna da Tabela 14 apresenta o *gap* de otimalidade do último passo para cada experimento, calculado através da expressão (5.4).

$$Gap\ de\ Otimalidade = \frac{primal - dual^p}{primal} \times 100\% \quad (5.4)$$

Já na Tabela 15, como o primal utilizado não é uma solução ótima, não temos um *gap* de otimalidade, mas sim a diferença percentual entre os valores do *primal* e do *dual^p*, diferença esta que é apresentada na quinta coluna desta tabela e é calculada da

mesma maneira que o *gap* de otimalidade. A sexta coluna de ambas as tabelas representa o número de passos, ou seja, o número de iterações atingido em cada experimento. Por fim, a sétima coluna apresenta o motivo de parada do algoritmo, que possui as seguintes alternativas: “Limite Máximo de Passos”, quando o limite de 200 passos for atingido; “Tamanho do Passo”, quando o tamanho do passo seguinte calculado for menor ou igual a 0,0001; “Limite Máximo de Tempo”, quando o somatório dos tempos de solução dos Subproblemas 1 e 2 tiver atingido 3600 segundos; e por fim, “Valor Ótimo encontrado”; quando a diferença entre o *primal* e o *dual*^p atingir um valor menor ou igual a 1 unidade, sendo aplicável somente ao caso em que o *primal* utilizado for a solução ótima. Em ambas as tabelas, as instâncias de 1, 3 e 5 produtos estão separadas entre si através de uma linha vazia preenchida com a cor cinza. Ao final destas tabelas é apresentado o valor mínimo, médio e máximo de cada uma das colunas, exceto a última que não é formada por dados quantitativos.

Iniciando a análise pela Tabela 14, que apresenta os resultados dos experimentos cujo *primal* utilizado é uma solução ótima, pode-se perceber que os *gaps* de otimalidade atingiram valores bem pequenos, sobretudo para as instâncias com 1 produto, as quais são de mais fácil resolução. O valor mínimo do *gap* de otimalidade desses experimentos foi de 0.0%, o qual é referente à única instância para a qual o algoritmo do subgradiente conseguiu encontrar um valor ótimo. Em média, o *gap* de otimalidade atingido pelo algoritmo para as instâncias presentes na Tabela 14 foi de 4,089%, o que é um valor relativamente baixo. Por fim, é importante observar que somente 2 das 17 instâncias consideradas apresentaram valor de *gap* de otimalidade acima de 10%, especificamente iguais a 14,897% e 14,961%, e que ambas são instâncias com 3 produtos.

Em relação ao motivo de parada dos experimentos com as 17 instâncias que tiveram como *primal* uma solução ótima, na grande maioria desses experimentos o motivo de parada foi a chegada ao limite máximo de 200 passos. Todas as 12 instâncias com 1 produto aqui consideradas tiveram esse mesmo motivo de parada, exceto uma, para a qual o valor ótimo foi encontrado. Já os outros 5 experimentos, 3 com instâncias de 3 produtos e 2 com instâncias de 5 produtos, todos pararam por terem atingido o limite mínimo do tamanho do passo, igual a 0,0001. É importante ressaltar que, para as instâncias 3-10-10-50_20-0,50-0,50_SAU e 3-10-10-50_20-0,50-0,50_SOU, mesmo

que o algoritmo não tivesse parado pelo tamanho do passo, ele teria parado pelo limite máximo de 200 passos ter sido atingido.

Instância	Tempo Total (s)	Σ Tempos Sub.1 (%)	Σ Tempos Sub. 2 (%)	Gap (%)	Passos	Motivo de Parada
1-10-10-50_10-0,50-0,50_SAU	577,0	1,937%	9,9%	3,819%	200	Limite Máximo de Passos
1-10-10-50_10-0,50-0,50_SOU	297,0	1,585%	11,1%	3,450%	200	Limite Máximo de Passos
1-10-10-50_10-0,80-0,80_SAU	669,0	0,975%	11,7%	1,423%	200	Limite Máximo de Passos
1-10-10-50_10-0,80-0,80_SOU	352,0	1,055%	15,9%	1,436%	200	Limite Máximo de Passos
1-10-10-50_20-0,50-0,50_SAU	898,0	1,279%	22,1%	3,660%	200	Limite Máximo de Passos
1-10-10-50_20-0,50-0,50_SOU	928,0	1,489%	24,3%	3,479%	200	Limite Máximo de Passos
1-15-15-100_10-0,50-0,50_SAU	1023,0	2,157%	27,8%	0,791%	200	Limite Máximo de Passos
1-15-15-100_10-0,50-0,50_SOU	1103,0	2,481%	27,9%	0,525%	200	Limite Máximo de Passos
1-15-15-100_20-0,50-0,50_SAU	1225,0	1,932%	22,9%	2,535%	200	Limite Máximo de Passos
1-15-15-100_20-0,50-0,50_SOU	1401,0	1,592%	25,6%	2,602%	200	Limite Máximo de Passos
1-15-15-100_20-0,80-0,80_SAU	1770,0	0,259%	43,0%	0,853%	200	Limite Máximo de Passos
1-15-15-100_20-0,80-0,80_SOU	300,0	0,582%	52,6%	0,0%	28	Valor Ótimo encontrado
3-10-10-50_20-0,50-0,50_SAU	1568,0	1,288%	33,1%	14,897%	200	Tamanho do passo
3-10-10-50_20-0,50-0,50_SOU	1154,0	0,639%	61,4%	14,961%	200	Tamanho do passo
3-10-10-50_20-0,80-0,80_SAU	1059,0	0,472%	49,3%	2,276%	101	Tamanho do passo
5-10-10-50_10-0,50-0,50_SAU	17,0	1,559%	24,3%	6,643%	4	Tamanho do passo
5-10-10-50_10-0,50-0,50_SOU	24,0	0,650%	40,8%	6,165%	2	Tamanho do passo
Mínimo	17,0	0,259%	9,9%	0,0%	2	
Média	845,0	1,290%	29,6%	4,089%	161	
Máximo	1770,0	2,481%	61,4%	14,961%	200	

Tabela 14 - Resultados da Decomposição Lagrangeana - Primal Ótimo

Já em relação à Tabela 15, é possível perceber a presença de linhas sem as informações dos resultados obtidos com a aplicação do algoritmo do subgradiente, contendo simplesmente as informações “Primal – *IntegerInfeasible*” ou “Primal – *IntermediateInfeasible*”. Isso ocorreu, pois não foi possível aplicar o algoritmo do subgradiente nesses casos, já que não se conhecia uma solução viável para nenhuma dessas instâncias. Os casos em que há a informação “Primal – *IntegerInfeasible*” indicam que aquelas instâncias não são viáveis quando da aplicação do Modelo 1 padrão, conforme indicado na seção 5.3. Já o único caso em que há a informação “Primal – *IntermediateInfeasible*” indica que não foi possível encontrar uma solução viável no limite de 3600 segundos quando da aplicação do Modelo 1 padrão naquela instância, também conforme indicado na seção 5.3. Portanto, apesar de termos 31 instâncias nessa tabela, tivemos somente 26 experimentos realizados, já que nos outros 5 não foi possível aplicar o Algoritmo do Subgradiente.

Nos dados apresentados pela Tabela 15, não temos mais um *gap* de otimalidade, já que não estamos com um *primal* ótimo, mas sim com uma aproximação primal. Por

isso, a quinta coluna desta tabela é nomeada de Diferença Percentual Primal x Dual. Além disso, no conjunto de 26 experimentos contidos na Tabela 15, um deles não conseguiu encontrar uma solução para os subproblemas no primeiro passo, não tendo sido possível, por esse motivo, realizar o cálculo da Diferença Percentual Primal x Dual para esse caso. Sendo assim, a quinta coluna relativa a tal experimento foi preenchida com “***”, e considerar-se-á, a partir de agora, 25 experimentos a serem analisados.

Instância	Tempo Total (s)	Σ Tempos Sub.1 (%)	Σ Tempos Sub. 2 (%)	Dif. Primal Dual (%)	Passos	Motivo de Parada
1-10-10-50_20-0,80-0,80_SAU	Primal - <i>IntegerInfeasible</i>					
1-10-10-50_20-0,80-0,80_SOU	Primal - <i>IntegerInfeasible</i>					
1-15-15-100_10-0,80-0,80_SAU	Primal - <i>IntegerInfeasible</i>					
1-15-15-100_10-0,80-0,80_SOU	Primal - <i>IntegerInfeasible</i>					
3-10-10-50_10-0,50-0,50_SAU	526,0	1,700%	23,0%	7,027%	100	Tamanho do passo
3-10-10-50_10-0,50-0,50_SOU	459,0	1,411%	44,2%	6,883%	100	Tamanho do passo
3-10-10-50_10-0,80-0,80_SAU	912,0	0,623%	57,3%	0,381%	100	Tamanho do passo
3-10-10-50_10-0,80-0,80_SOU	3937,0	0,126%	91,3%	0,240%	78	Limite Máximo de Tempo
3-10-10-50_20-0,80-0,80_SOU	2200,0	0,140%	76,6%	2,083%	100	Tamanho do passo
3-15-15-100_10-0,50-0,50_SAU	3853,0	0,202%	93,2%	3,689%	83	Limite Máximo de Tempo
3-15-15-100_10-0,50-0,50_SOU	4015,0	0,392%	83,8%	3,744%	100	Tamanho do passo
3-15-15-100_10-0,80-0,80_SAU	4150,0	0,261%	86,5%	1,862%	177	Limite Máximo de Tempo
3-15-15-100_10-0,80-0,80_SOU	3781,0	0,080%	95,1%	2,717%	26	Limite Máximo de Tempo
3-15-15-100_20-0,50-0,50_SAU	5062,0	0,342%	70,8%	7,918%	157	Limite Máximo de Tempo
3-15-15-100_20-0,50-0,50_SOU	4097,0	0,143%	87,8%	7,606%	51	Limite Máximo de Tempo
3-15-15-100_20-0,80-0,80_SAU	3615,0	0,000%	99,6%	***	1	Limite Máximo de Tempo
3-15-15-100_20-0,80-0,80_SOU	Primal - <i>IntermediateInfeasible</i>					
5-10-10-50_10-0,80-0,80_SAU	377,0	1,006%	32,7%	1,767%	100	Tamanho do passo
5-10-10-50_10-0,80-0,80_SOU	215,0	1,016%	39,4%	1,694%	26	Tamanho do passo
5-10-10-50_20-0,50-0,50_SAU	398,0	0,929%	22,7%	7,618%	100	Tamanho do passo
5-10-10-50_20-0,50-0,50_SOU	899,0	1,001%	24,6%	7,584%	100	Tamanho do passo
5-10-10-50_20-0,80-0,80_SAU	3691,0	0,010%	97,5%	3,281%	31	Limite Máximo de Tempo
5-10-10-50_20-0,80-0,80_SOU	3650,0	0,005%	98,6%	2,572%	6	Limite Máximo de Tempo
5-15-15-100_10-0,50-0,50_SAU	782,0	1,299%	51,5%	10,311%	100	Tamanho do passo
5-15-15-100_10-0,50-0,50_SOU	1762,0	1,260%	50,7%	9,978%	100	Tamanho do passo
5-15-15-100_10-0,80-0,80_SAU	2567,0	0,316%	85,4%	3,606%	100	Tamanho do passo
5-15-15-100_10-0,80-0,80_SOU	3906,0	0,134%	92,0%	3,361%	34	Limite Máximo de Tempo
5-15-15-100_20-0,50-0,50_SAU	991,0	0,994%	43,3%	8,461%	100	Tamanho do passo
5-15-15-100_20-0,50-0,50_SOU	4781,0	0,444%	74,9%	8,068%	90	Limite Máximo de Tempo
5-15-15-100_20-0,80-0,80_SAU	3877,0	0,006%	93,1%	2,286%	3	Limite Máximo de Tempo
5-15-15-100_20-0,80-0,80_SOU	3654,0	0,013%	98,5%	2,312%	3	Limite Máximo de Tempo
Mínimo	215,0	0,002%	22,7%	0,240%	1	
Média	2621,4	0,533%	69,8%	4,478%	76	
Máximo	5062,0	1,700%	99,6%	10,311%	177	

Tabela 15 - Resultados da Decomposição Lagrangeana - Primal Não-Ótimo

Nesses 25 experimentos contidos na Tabela 15 nos quais foi possível a aplicação o Algoritmo do Subgradiente e a obtenção de um valor para o indicador Diferença Percentual Primal x Dual, pode-se perceber que os valores encontrados para tal

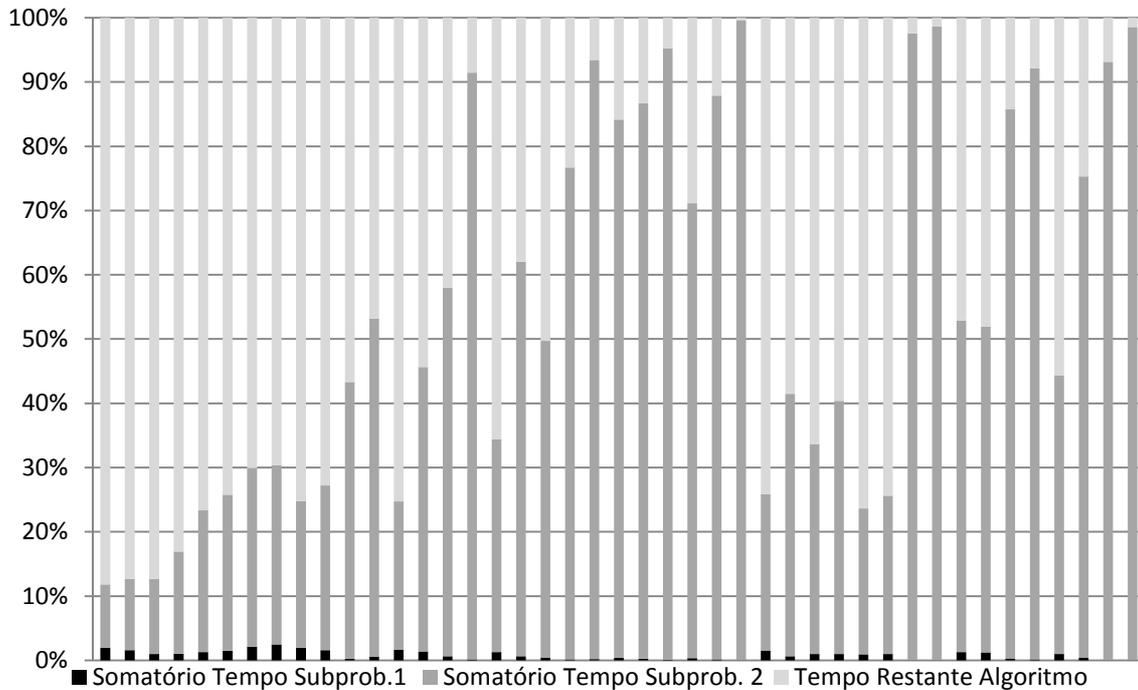
indicador foram, no geral, bem baixos. O valor médio da Diferença Percentual Primal x Dual para tais experimentos foi de 4.478%, tendo sido o mínimo igual a 0,240% e o máximo igual a 10,311%. Vale ressaltar que todos esses valores se referem a experimentos com instâncias maiores, de 3 e 5 produtos, sendo que somente para um dessas instâncias foi obtido uma Diferença Percentual Primal x Dual superior a 10%.

Analisando-se o motivo de parada de cada um desses 25 experimentos, é importante notar que não houve nenhum deles com parada causada pelo limite máximo de 200 passos. Foram obtidos 13 experimentos com o fim do algoritmo tendo sido causado pelo limite mínimo de tamanho do passo e outros 12 experimentos com atingindo o limite máximo de tempo de 1 hora, o que é um resultado bastante equilibrado.

Se analisarmos os experimentos de forma conjunta, alguns pontos importantes comuns a todos eles podem ser verificados, devendo, portanto, ser ressaltados. O primeiro deles é no que diz respeito à diferença percentual entre o primal e o dual, seja ela representada pelo *gap* de otimalidade dos experimentos da Tabela 14 ou pela Diferença Percentual Primal x Dual da Tabela 15. Para cada um desses experimentos foram registrados os valores da diferença percentual entre o primal e o dual no primeiro passo e no último passo do Algoritmo, a fim de se comparar a diferença entre os mesmos e, conseqüentemente, a qualidade do algoritmo. O valor médio encontrado para a diferença entre os valores desses indicadores no primeiro e no último passo foi de 0,02%, o qual é bastante pequeno. O valor máximo encontrado para tal diferença foi de 2,89%, relativo à instância “1-10-10-50_10-0,50-0,50_SAU”, contida na segunda linha da Tabela 14. Para todas as outras instâncias, o valor encontrado foi bastante inferior a esse. Portanto, essa comparação demonstra que a utilização do Algoritmo do Subgradiente não foi tão eficiente na resolução da Decomposição Lagrangeana proposta, visto que, mesmo nos casos em que se registrou grande número de passos, o algoritmo caminhou muito lentamente.

Outro ponto interessante é relativo ao tempo de processamento do algoritmo. A fim de se tornar mais visual a análise, foi criado um gráfico do tipo “Colunas 100% Empilhadas”, o qual pode ser visto na Figura 20. Cada coluna desse gráfico é relativa a um dos 43 experimentos totais onde foi possível a aplicação do Algoritmo do Subgradiente, sendo 17 deles experimentos da Tabela 14 e os outros 26 da Tabela 15, e formada por três partes: a da base na cor vermelha, correspondente à percentagem do

tempo total do algoritmo utilizada para solução dos Subproblemas 1; a do meio na cor azul, correspondente à percentagem do tempo total do algoritmo utilizada para solução dos Subproblemas 2; e a do topo na cor verde, correspondente à percentagem do tempo total do algoritmo utilizada para o restante das instruções do algoritmo.



Observando-se o gráfico da Figura 20, percebe-se claramente como é grande a percentagem de tempo que o algoritmo teve que se dedicar à solução dos Subproblemas. Entretanto, é importante notar que percentagem de tempo dedicado à solução do Subproblema 1 não é significativa, quando comparada à percentagem de tempo dedicada à solução do Subproblema 2, que em alguns casos chegou a representar mais de 90% do tempo total do algoritmo. Isso já era esperado, visto que o Subproblema 2 é um problema de programação inteira-mista muito mais complexo que o Subproblema 1. Portanto, os resultados demonstram que um dos grandes pontos fracos da Decomposição Lagrangeana utilizada é o formato do Subproblema 2, tornando-se necessário o estudo de formas de se fortalecer a modelagem deste subproblema, como a inclusão de restrições adicionais que possam levar a este fortalecimento, de forma a se

reduzir o tempo de processamento do Algoritmo. Entretanto, deve-se tomar cuidado com a inclusão de restrições adicionais, pois elas podem acabar levando ao aumento de tempo de processamento se não forem cuidadosamente escolhidas.

Com o objetivo de analisar a relação entre o tempo de processamento e o motivo de parada do Algoritmo, dividiu-se o gráfico da Figura 20 em outros 3 gráficos: um para os experimentos que pararam ao atingir o limite de 200 passos, representado pela Figura 21; outro para os experimentos que pararam ao atingir o limite de 1 hora de processamento, representado pela Figura 22; e por último para os experimentos que pararam devido ao limite mínimo de tamanho do passo, representado pela Figura 23.

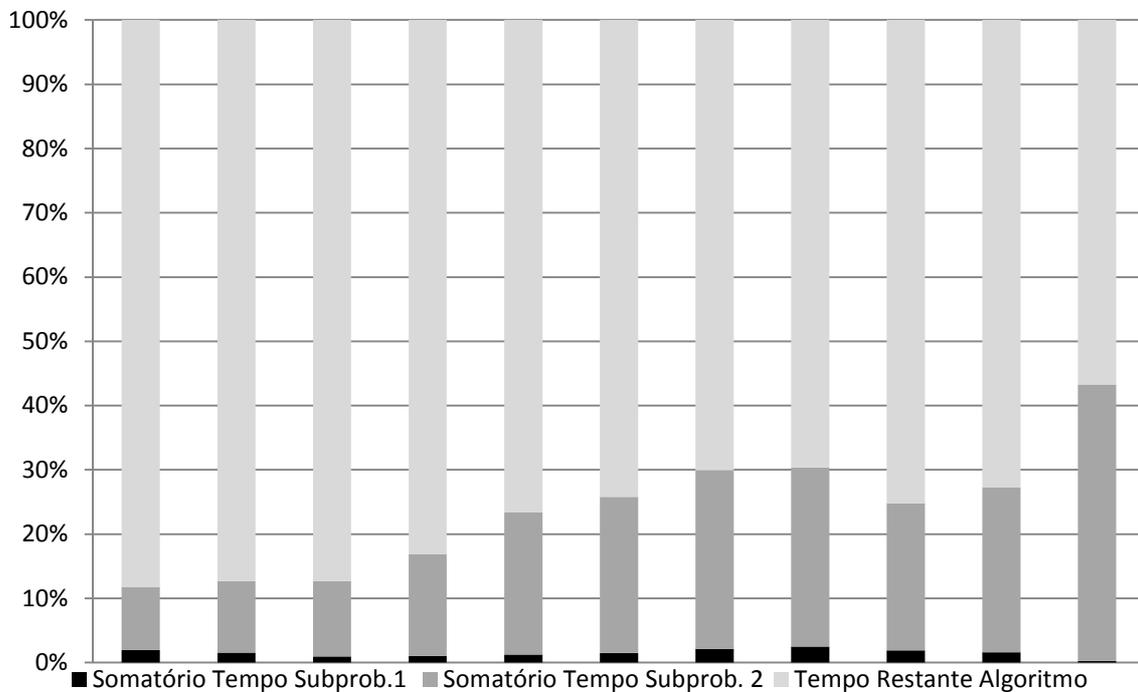


Figura 21 - Análise de Tempos do Algoritmo do Subgradiente - Limite Máximo de Passos
Fonte: O Autor

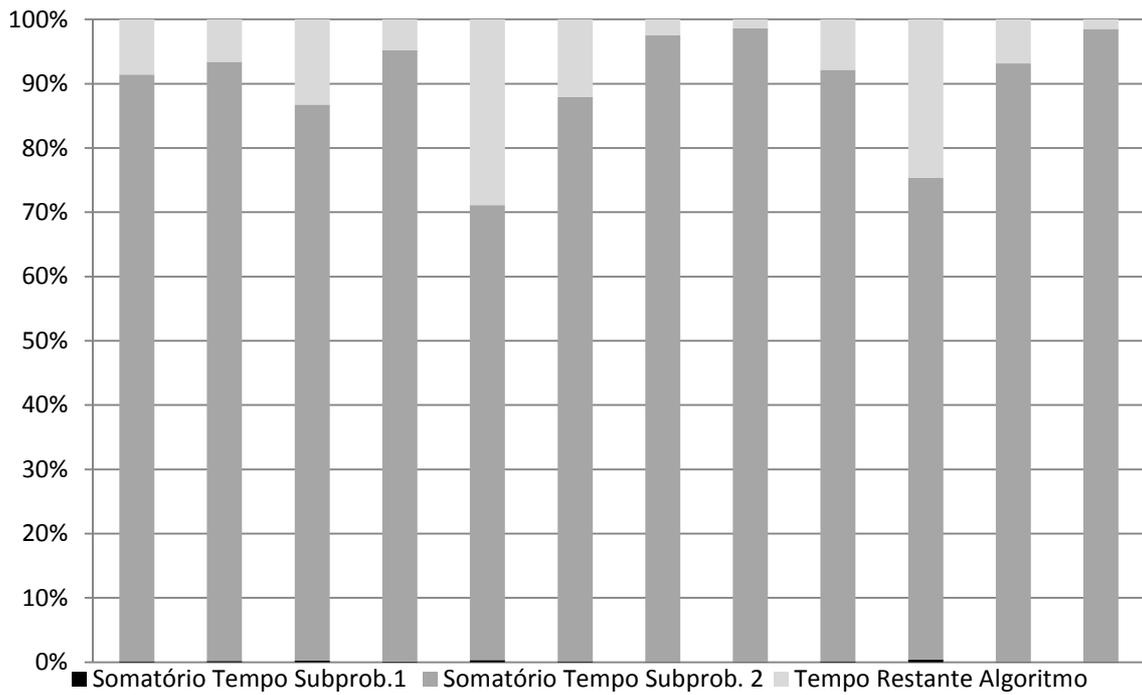


Figura 22 - Análise de Tempos do Algoritmo do Subgradiente - Limite Máximo de Tempo
Fonte: O Autor

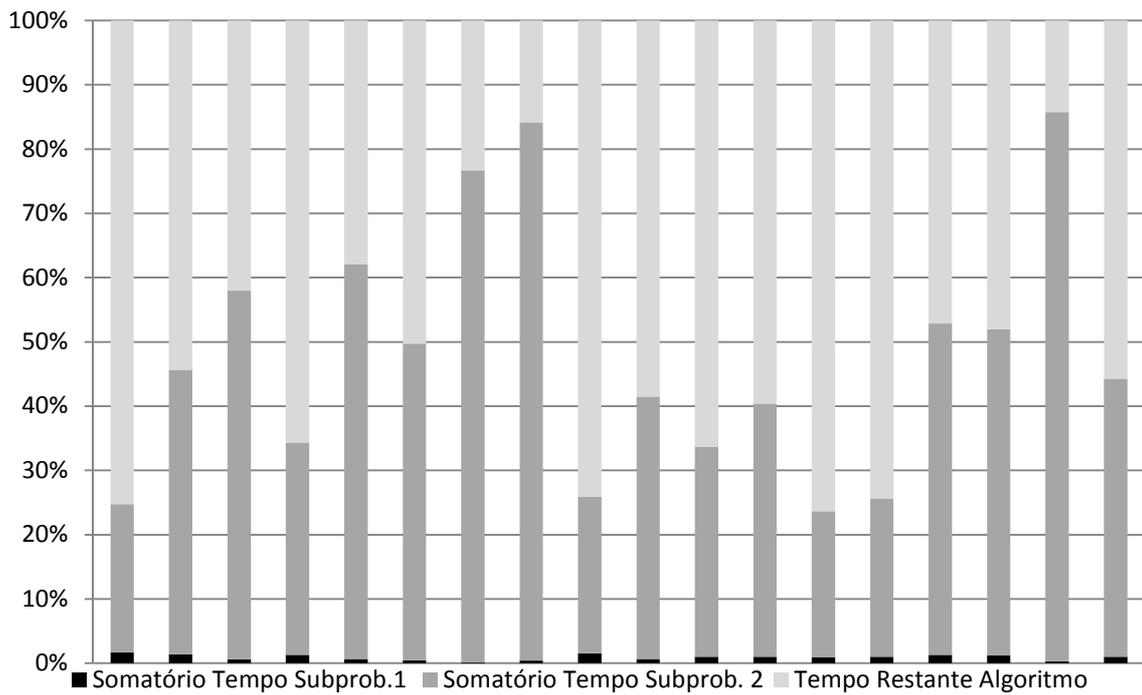


Figura 23- Análise de Tempos do Algoritmo do Subgradiente - Tamanho de Passo
Fonte: O Autor

Analisando-se esses três gráficos (Figuras 21, 22 e 23), percebe-se que existe certo padrão de comportamento para alguns desses gráficos. No gráfico da Figura 21, todos os experimentos chegaram ao limite máximo de 200 passos e, com isso, é de se esperar que se tenha uma boa parte do tempo de processamento dedicada às outras instruções do Algoritmo do Subgradiente, visto que essas instruções tiveram que ser repetidas muitas vezes. Isso, de fato, foi comprovado pelos resultados obtidos, para os quais sempre mais de 50% do tempo de processamento total foi dedicado a outras instruções que não às soluções dos Subproblemas 1 e 2. Já para os experimentos em que o tempo máximo de 1 hora de processamento foi atingido, representados pela Figura 22, observou-se sempre mais de 70% do tempo dedicado à solução dos Subproblemas 2 ao longo dos passos do algoritmo, o que demonstra que foi a busca por uma solução para os Subproblemas 2 o que levou o algoritmo a atingir o limite máximo de tempo. Por fim, para os experimentos que atingiram o limite mínimo de tamanho de passo, contidos na Figura 23, houve um comportamento menos equilibrado, com a percentagem do tempo de processamento dedicada à solução dos Subproblemas 2 variando entre 23% e 83%.

É importante ressaltar, por fim, que o algoritmo do tipo Subgradiente não é o algoritmo mais eficiente encontrado na literatura para se resolver decomposições lagrangeanas, e foi aplicado aqui motivado por sua simplicidade de implementação. Nesse sentido, estudos mais complexos devem buscar o desenvolvimento de técnicas mais avançadas de resolução, como, por exemplo, o Algoritmo do Volume em sua forma original, conforme proposto por Barahona e Anbil (2000) ou o Algoritmo do Volume em sua forma revisada, conforme proposto por Bahiense (2000). As duas grandes vantagens da utilização do Algoritmo do Volume residem na utilização de uma medida precisa de melhoria para dar passos “sérios” do tipo Subgradiente, ou seja, passos que garantem a melhoria do algoritmo, e na geração automática de uma aproximação primal de ótima qualidade, baseada em combinações lineares de subgradientes, para o problema original.

Na parte referente à modelagem da decomposição lagrangeana utilizada neste trabalho, objetivando-se a redução do tempo de solução do Subproblema 2, que demonstrou ser um dos fatores críticos do algoritmo aplicado para resolução do problema, deve-se buscar novas restrições a serem adicionadas a esse subproblema, de forma a fortalecê-lo matematicamente.

6 CONCLUSÕES

O presente trabalho analisou diferentes abordagens de um problema de localização-alocação de armazéns que consiste em um projeto de produção, estocagem e distribuição de multi-produtos, os quais são enviados dos fornecedores até os armazéns, onde ficarão estocados e de onde serão enviados para os clientes. Foram estudados, inicialmente, dois modelos de programação inteira mista baseados em modelos apresentados nos trabalhos de Ferreira Filho e Gendron (2012), Bittencourt (2014) e Bittencourt (2015). O primeiro dos modelos estudados explorou a divisão em dois elos do problema, um elo formado por fornecedores e armazéns e o outro formado por armazéns e clientes, sendo o fluxo de produtos entre os elos equilibrados através de restrições de conservação de fluxo. Já o segundo modelo separou o fluxo de produtos que partem do fornecedor em duas parcelas de acordo com o objetivo do mesmo: suprir o estoque de ciclo dos clientes ou suprir o estoque de segurança dos clientes. Ambos os modelos são originalmente não lineares, graças à expressão utilizada para o cálculo do estoque de segurança, e foram linearizados através de uma técnica de Linearização Por Partes.

Há, basicamente, três grandes diferenças a se destacar entre as formulações apresentados por Ferreira Filho e Gendron (2012), Bittencourt (2014) e Bittencourt (2015) e àquelas apresentadas neste trabalho: a consideração de multi-produtos, a qual não era possível nas formulações anteriores; a proposta de uma nova maneira para realização do cálculo dos parâmetros de linearização por partes, objetivando-se a redução do erro médio de linearização; e a presença de modelos mais simples derivados da decomposição lagrangeana proposta nesse trabalho.

Com os resultados obtidos através dos experimentos realizados inicialmente foi possível chegar a algumas importantes conclusões. Primeiramente, pôde-se afirmar que os experimentos realizados com o Modelo 1 apresentaram valores de tempo médio de processamento menores do que os relativos ao Modelo 2, sem nenhuma perda significativa na qualidade dos resultados no que diz respeito à erro de linearização. Em relação às técnicas de segmentação, percebeu-se que os experimentos que utilizaram a Segmentação das Ordenadas Uniformes possuíram resultados com menor erro médio de linearização em relação àqueles que utilizaram Segmentação das Abscissas Uniformes, seja qual fosse o número de segmentos utilizados. Já em relação à forma de linearização,

pôde-se afirmar que os experimentos que utilizaram a Linearização Completa produziram resultados com valores significativamente menores de erro médio de Linearização, quando comparados com os valores apresentados por aqueles que utilizaram a Linearização Simplificada. Vale ressaltar que os resultados obtidos com as comparações de tempo médio de processamento demonstraram que os modelos que utilizaram a Segmentação das Abscissas Uniformes foram resolvidos em tempo médio menor que aqueles que utilizaram a Segmentação das Ordenadas Uniformes, assim como aqueles que utilizaram a Linearização Simplificada, que apresentaram menor tempo médio de processamento que aqueles com Linearização Completa. Entretanto, essa constatação não era esperada antes das análises dos resultados, já que todas as técnicas comparadas influenciam nos parâmetros da linearização, e não no aumento da complexidade computacional do modelo. Portanto, é necessário que se investigue esse fato através de mais comparações entre as técnicas em busca de explicações para o mesmo.

Foram realizados, também, experimentos com o Modelo 1 e com a Linearização por Partes Completa, com o objetivo de analisar a influência do aumento de número de produtos no tempo de processamento dos modelos pelo resolvidor, chegando-se à conclusão de que o aumento do número de produtos considerados ocasiona um aumento bastante expressivo no tempo médio de processamento. Através dos experimentos realizados, percebeu-se que aumentos de 200% e 400% no número de produtos levaram a incrementos de, pelo menos, 14.000% e 15.500% no tempo médio de processamento, respectivamente.

Posteriormente, testou-se, então, a inclusão da declaração de restrições do tipo SOS1 (*Special Ordered Sets of Type 1*) a fim de se testar se a inclusão de tal declaração reduziria o tempo médio de processamento do modelo. Entretanto, as diferenças entre o tempo de processamento dos experimentos que não contavam com tal declaração e dos que contavam com a mesma não foi significativa na maioria dos casos e, quando significativa, não revelou um padrão de comportamento, já que houve casos com redução expressiva no tempo ao mesmo tempo em que houve casos com aumento expressivo no tempo.

Dessa maneira, sendo visível a necessidade de se buscar maneiras de reduzir o tempo médio de processamento dos modelos para a obtenção de soluções com pequenos erros de linearização em instâncias que considerassem vários produtos, decidiu-se,

então, aplicar a técnica de Decomposição Lagrangeana ao Modelo 1, dualizando suas restrições de conservação de fluxo, e decompondo-o em dois subproblemas, de forma a explorar a sua divisão em dois elos. Com a aplicação do Algoritmo do Subgradiente para a resolução desta decomposição lagrangeana, foram obtidos resultados satisfatórios no que diz respeito à diferença percentual entre o limitante primal e o limitante dual da relaxação, com valores percentuais médios abaixo de 5%. Entretanto, há dois pontos a se destacar quanto à eficiência do algoritmo. O primeiro é relativo à redução da diferença percentual entre o limitante primal e o limitante dual da relaxação ao longo dos passos deste algoritmo, a qual ocorreu de forma muito modesta, o que demonstra sua ineficiência. O segundo diz respeito ao tempo de resolução dos Subproblemas 2 em relação ao tempo total de processamento do Algoritmo do Subgradiente: esse tempo foi bem grande, devido à dificuldade de resolução desses subproblemas.

6.1 Trabalhos Futuros

Embora importantes conclusões tenham sido obtidas com a realização deste trabalho, ainda há muito a se evoluir para que o mesmo possa ser aplicado no dia-a-dia de uma organização. São necessários estudos aprofundados em busca de melhorias tanto no que diz respeito à modelagem do problema, quanto aos métodos de solução.

Em relação à modelagem utilizada, existe a possibilidade de enriquecimento da mesma através da utilização de cenários que variam ao longo do tempo, tratando o problema através de uma perspectiva dinâmica. Além disso, a consideração da demanda dos clientes como determinística é algo que dificulta bastante a utilização dos resultados obtidos com a aplicação da modelagem em problemas reais, tornando-se necessária a consideração da estocasticidade desta demanda dentro dos modelos.

Ainda considerando-se as modelagens utilizadas neste trabalho, é evidente a necessidade da busca por técnicas que diminuam o erro médio de linearização, sejam elas novas formas de linearização diferentes daquelas utilizadas, ou ainda, novos métodos de segmentação do eixo das abscissas da função a ser linearizada por partes. Não pensando somente na redução do erro médio de linearização, mas, principalmente, na redução do tempo de processamento, uma opção promissora seria a utilização do método de linearização por partes apresentado no trabalho de Ferreira e Tarsitano (2015), onde é aplicada a técnica de Conjuntos Especialmente Ordenados do Tipo 2

(*Special Ordered Sets of type 2 – SOS2*) em um conjunto de restrições referentes à linearização com o objetivo de melhorar o desempenho da modelagem.

Já em relação aos métodos de solução dos modelos, é de extrema importância que novas técnicas sejam aplicadas de forma a se reduzir o tempo médio de processamento da busca por soluções ótimas, principalmente para os casos em que se considera multi-produtos. Para a resolução da Decomposição Lagrangeana utilizada neste trabalho, é necessária a busca por novas técnicas de solução mais eficientes do que o Algoritmo do Subgradiente aqui testado. Nesse sentido, estudos mais complexos devem buscar o desenvolvimento de técnicas mais avançadas de resolução, como, por exemplo, o Algoritmo do Volume em sua forma original, conforme proposto por Barahona e Anbil (2000) ou o Algoritmo do Volume em sua forma revisada, conforme proposto por Bahiense (2000), os quais possuem grandes vantagens em relação ao Algoritmo do Subgradiente, conforme elencado ao fim da seção 5.4.

Na parte referente à modelagem da decomposição lagrangeana utilizada neste trabalho, objetivando-se a redução do tempo de solução do Subproblema 2, que demonstrou ser um dos fatores críticos do algoritmo aplicado para resolução do problema, deve-se buscar novas restrições a serem adicionadas a esse subproblema, de forma a fortalecê-lo matematicamente. Além disso, pode-se também partir para novas formas de decomposição lagrangeana, explorando uma decomposição em mais subproblemas ou a dualização de outras restrições.

Por fim, é importante ressaltar a relevância de trabalhos como esse, que têm como objetivo a busca por soluções otimizadas para a cadeia de suprimentos das organizações, possuindo grande expectativa de geração de economias através de ganhos de eficiência em seu funcionamento. Espera-se que este trabalho possa servir também como motivador para novos trabalhos nessa área.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMBROSINO, D.; SCUTELLÀ, M. G. Distribution network design: New problems and related models. **European Journal of Operational Research**, v. 165, n. 3, p. 610–624, 2005.

BAHIENSE, L. **O Algoritmo do Volume: Convergência e Resolução do Problema de Steiner em Grafos**. [s.l.] Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2000.

BARAHONA, F.; ANBIL, R. The Volume Algorithm: Producing Primal Solutions with a Subgradient Method. **Mathematical Programming**, v. 87, p. 389–399, 2000.

BISSCHOP, J. **AIMMS Optimization Modeling's Guide**. [s.l.] Paragon Decision Technology, 2012.

BITTENCOURT, G. C. DE. **Localização De Armazéns com Efeito de Consolidação De Estoques: Uma Análise Comparativa do Desempenho de Diferentes Formulações**. [s.l.] Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2014.

BITTENCOURT, G. C. DE; FERREIRA FILHO, V. J. M.; LEITE, L. S. B. DA S. **Inventory Location Problem with Risk Pooling Effect : A Performance Analysis Between Different Formulations** Transportation Research Procedia. **Anais...Delft**, The Netherlands: 18th Euro Working Group on Transportation, 2015

BOWERSOX, D. J.; CLOSS, D. J. **Logística Empresarial: O Processo de Integração da cadeia de Suprimento**. Sao Paulo: Atlas, 2004.

BROWN, R. G. **Decision Rules for Inventory Management**. New York, N.Y.: Holt, Rinehardt, Winston, 1967.

CHURCH, R.; REVELLE, C. The maximal covering location problem. **Papers of the Regional Science Association**, v. 32, p. 101–118, 1974.

CROXTON, K. L.; GENDRON, B.; MAGNANTI, T. L. A Comparison of Mixed - Integer Programming Models for Nonconvex Piecewise Linear Cost Minimization Problems. **Management Science**, v. 49, n. 9, p. 1268–1273, 2003.

CROXTON, K. L.; GENDRON, B.; MAGNANTI, T. L. Variable Disaggregation in Network Flow Problems with Piecewise Linear Costs. **Operations Research**, v. 55, n. 1, p. 146–157, 2007.

DAS, C.; TYAGI, R. Role of inventory and transportation costs in determining the optimal degree of centralization. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, v. 33, n. 3, p. 171–179, 1997.

DASKIN, M. S.; COULLARD, C. R.; SHEN, Z.-J. M. An Inventory-Location Model : Formulation , Solution Algorithm and Computational Results. **Annals of Operations Research**, v. 110, p. 83–106, 2002.

- EPPEN, G. D. Note--Effects of Centralization on Expected Costs in a Multi-Location Newsboy Problem. **Management Science**, v. 25, n. 5, p. 498–501, 1979.
- FERREIRA FILHO, V. J. M.; GENDRON, B. A Piecewise Linearization with Column-and-Row Generation Approach for a Two-Echelon Inventory Location Problem with Risk Pooling. **Book of Abstracts - Optimization Days**, 2012.
- FERREIRA, G. P. M.; TARSITANO, R. C. **Avaliação de um Modelo Dinâmico de Localização de Armazéns e Alocação de Estoques Aplicado ao Abastecimento Offshore**. [s.l.] Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.
- FISHER, M. L. The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems. **Management Science**, v. 27, n. 1, p. 1–18, 1981.
- FRANGIONI, A.; GENDRON, B. 0-1 Reformulations of the Multicommodity Capacitated Network Design Problem. **Discrete Applied Mathematics**, v. 157, n. 6, p. 1229–1241, 2009.
- GARCIA, E. S. et al. **Gestão de Estoques: Otimizando a Logística e a Cadeia de Suprimentos**. 1a. ed. Rio de Janeiro, Brasil: e-papers, 2005.
- GEBENNINI, E.; GAMBERINI, R.; MANZINI, R. An integrated production–distribution model for the dynamic location and allocation problem with safety stock optimization. **International Journal of Production Economics**, v. 122, n. 1, p. 286–304, nov. 2009.
- HAKIMI, S. L. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. **Operations Research**, v. 12, p. 450–459, 1964.
- HARRIS, F. W. How Many Parts to Make at Once. **Factory, the Magazine of management**, v. 10, n. 2, p. 135–136, 1913.
- HESKETT, J. L.; GLASKOWSKY, N. A. J.; IVIE, R. M. **Business Logistics**. 2nd. ed. New York, N.Y.: Ronald Press, 1974.
- JAYARAMAN, V. Transportation , facility location and inventory issues in distribution network design: An investigation. **International Journal of Operations Research & Production Management**, v. 18, n. 5, p. 471–494, 1998.
- JAYARAMAN, V.; PIRKUL, H. Planning and coordination of production and distribution facilities for multiple commodities. **European Journal of Operational Research**, v. 133, n. 2, p. 394–408, 2001.
- JORGE, C. M. DE M. **Planejamento de Redes Logísticas via Simulação: Analisando Fatores Determinantes das Decisões de Localização e Centralização da Distribuição**. [s.l.] Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.
- MAHMOUD, M. Optimal Inventory Consolidation Schemes: A Portfolio Effect Analysis. **Journal of Business Logistics**, 1992.

- MAISTER, D. H. Centralisation of Inventories and the “Square Root Law”. **International Journal of Physical Distribution & Logistics Management**, v. 6, n. 3, p. 124–134, 1976.
- MIRANDA, P. A.; GARRIDO, R. A. Incorporating inventory control decisions into a strategic distribution network design model with stochastic demand. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, v. 40, n. 3, p. 183–207, 2004.
- MONTEBELLER JUNIOR, E. J. **Incorporando o Efeito de Consolidação dos Estoques no Planejamento de Redes Logísticas**. [s.l.] Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.
- OWEN, S. H.; DASKIN, M. S. Strategic facility location: A review. **European Journal of Operational Research**, v. 111, n. 3, p. 423–447, 1998.
- POZO, H. **Administração de Recursos Materiais e Patrimoniais: uma abordagem logística**. 6^a. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- SCHILLING, D. A.; JAYARAMAN, V.; R., B. A review of covering problems in facility location. **Location Science**, v. 1, p. 25–55, 1993.
- SHEN, Z. M.; COULLARD, C.; DASKIN, M. S. A Joint Location-Inventory Model. **Transportation Science**, v. 37, n. 1, p. 40–55, 2003.
- SILVA, T. C. M. **Gerenciamento Dinâmico da Localização de Armazéns e Alocação de Estoques Aplicado ao Abastecimento de Unidades de Produção Offshore**. [s.l.] Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.
- STARR, M. K.; MILLER, D. W. **Inventory Control: Theory and Practice**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1962.
- VIDYARTHI, N. et al. Integrated Production-Inventory-Distribution System Design with Risk Pooling: Model Formulation and Heuristic Solution. **Transportation Science**, v. 41, n. 3, p. 392–408, 2007.
- WEBER, A. **Über den Standort der Industrien (Alfred Weber’s Theory of the Location of Industries)**. [s.l.] University of Chicago, 1929.
- WOLSEY, L. A. **Integer Programming**. 1. ed. New York: Wiley-Interscience, 1998.
- YOU, F.; GROSSMANN, I. E. Mixed-Integer Nonlinear Programming Models and Algorithms for Large-Scale Supply Chain Design with Stochastic Inventory Management. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 47, n. 20, p. 7802–7817, 2008.
- YOU, F.; GROSSMANN, I. E. Integrated Multi-Echelon Supply Chain Design with Inventories Under Uncertainty: MINLP Models, Computational Strategies. **American Institute of Chemical Engineers**, v. 56, n. 2, p. 419–440, 2010.

ZINN, W.; LEVY, M.; BOWERSOX, D. J. Measuring the Effect of Inventory Centralization/decentralization on aggregate safety stock: the “square root law” revisited. **Journal of Business Logistics**, v. 10, n. 1, p. 1–14, 1989.