



UM ESTUDO SOBRE GRAFOS COM CONECTIVIDADE ALGÉBRICA
INTEIRA

Clarianne Luciola de Abreu Vieira Machado Lucas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Maria Aguiéiras Alvarez de
Freitas

Rio de Janeiro
Março de 2015

UM ESTUDO SOBRE GRAFOS COM CONECTIVIDADE ALGÉBRICA
INTEIRA

Clarianne Luciola de Abreu Vieira Machado Lucas

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Examinada por:

Prof. Maria Agueiras Alvarez de Freitas, D.Sc.

Prof. Nair Maria Maia de Abreu, D.Sc.

Prof. Renata Raposo Del-Vecchio, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2015

Lucas, Clarianne Luciola de Abreu Vieira Machado

Um estudo sobre grafos com conectividade algébrica inteira/Clarianne Luciola de Abreu Vieira Machado Lucas.
– Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2015.

XI, 50 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Maria Aguiéiras Alvarez de Freitas

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Produção, 2015.

Referências Bibliográficas: p. 49 – 50.

1. Grafos. 2. Conectividade. 3. Teoria Espectral de Grafos. I. Freitas, Maria Aguiéiras Alvarez de. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Produção. III. Título.

*Ao meu Senhor e Salvador Jesus
Cristo.*

*À minha família querida,
abençoada e bendita de Deus.*

Agradecimentos

Ao meu único e suficiente Salvador Jesus Cristo, o meu Deus, agradeço pela minha vida e pela força e sabedoria indispensáveis para a conclusão deste trabalho.

À minha família preciosa agradeço pelo amor, pela compreensão e pelo total apoio para o meu crescimento profissional.

Agradeço à minha orientadora Maria Aguiéiras Alvarez de Freitas, que Deus colocou no meu caminho em um momento tão oportuno, pelo incentivo e dedicação a mim dispensados.

Às Professoras Nair M. M. de Abreu e Renata R. Del-Vecchio agradeço pela gentileza em participar da banca e pelas correções que contribuíram para a conclusão desta dissertação.

Ao Professor Ivo Fernandez Lopez (*in memoriam*) agradeço pela torcida por meu avanço profissional.

Agradeço a todos os colegas do grupo TEG-Rio pela carinhosa hospitalidade.

A todos os funcionários do PEP agradeço pela atenção e disponibilidade.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

UM ESTUDO SOBRE GRAFOS COM CONECTIVIDADE ALGÉBRICA INTEIRA

Clarianne Luciola de Abreu Vieira Machado Lucas

Março/2015

Orientador: Maria Agueiras Alvarez de Freitas

Programa: Engenharia de Produção

Nesta dissertação, estudamos grafos que apresentam a conectividade algébrica inteira. Verificamos que as conectividades algébrica e de vértices dos cografos, uma classe de grafos laplacianos integrais, e, em particular, dos grafos *threshold* são iguais.

Analisamos duas famílias infinitas de grafos laplacianos integrais satisfazendo relações distintas entre suas conectividades algébrica e de vértices. Em seguida, construímos duas famílias infinitas de grafos não laplacianos integrais, de forma que uma possui as suas conectividades algébrica e de vértices iguais e a outra apresenta estas mesmas conectividades distintas.

Investigamos a integralidade de uma classe de grafos e de alguns dos seus subgrafos e reunimos alguns resultados sobre a conectividade algébrica.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A STUDY ABOUT GRAPHS WITH INTEGER ALGEBRAIC CONNECTIVITY

Clarianne Luciola de Abreu Vieira Machado Lucas

March/2015

Advisor: Maria Aguiéiras Alvarez de Freitas

Department: Production Engineering

In this dissertation, we study graphs with integer algebraic connectivity. We verify that the algebraic and vertex connectivities of cographs, an integral laplacian graphs class, and, particularly, of the threshold graphs are equal.

We analyse two infinite families of integral laplacian graphs that satisfy distinct relationships between their algebraic and vertex connectivities. After that, we build two infinite families of non-integral laplacian graphs, such that one has its algebraic and vertex connectivities equal and the other has these same connectivities distinct.

We investigate the integrality of a graphs class and of some of their subgraphs and we join some results about algebraic connectivity.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Conceitos Básicos	3
2.1 Teoria de Grafos	3
2.2 Teoria de Matrizes	6
2.3 Teoria Espectral de Grafos	8
3 Conectividade algébrica	12
4 Grafos com conectividade algébrica inteira	21
4.1 Grafos laplacianos integrais	21
4.1.1 Grafos <i>threshold</i>	21
4.1.2 Cografos	26
4.1.3 Uma família infinita de grafos laplacianos integrais satisfazendo $a(G) = \kappa(G) - 1$	38
4.1.4 Uma família infinita de grafos laplacianos integrais satisfazendo $\kappa(G_j) - a(G_j) = j, \forall j \in \mathbb{N}$	39
4.2 Grafos não laplacianos integrais	41
5 Conclusões	48
Referências Bibliográficas	49

Lista de Figuras

2.1	Grafo Cubo 3-dimensional e Grafo de Petersen	5
2.2	Grafo G	8
3.1	$G = 2K_1 \vee K_3$	20
4.1	Grafo <i>threshold</i>	22
4.2	Diagrama de Ferres	23
4.3	<i>Join</i> de K_2 com C_3	27
4.4	Cografo sem vértice dominante e sua co-árvore	28
4.5	Cografo com vértice dominante e sua co-árvore	29
4.6	Construção da co-árvore T' a partir da co-árvore T	30
4.7	Construção da co-árvore T' a partir da co-árvore T	30
4.8	Cografo não - <i>threshold</i>	32
4.9	Co-árvores de cografos sem vértice dominante e com vértice dominante	34
4.10	Co-árvore de grafo sem vértice dominante	34
4.11	Co-árvore de grafo com vértice dominante	35
4.12	Cografo conexo com $\kappa(G) = 1 \neq 2 = \delta(G)$	36
4.13	Cografos conexos G , com até 4 vértices, tais que $\kappa(G) = \delta(G) = a(G)$	37
4.14	Cografos conexos G , com 5 vértices, tais que $\kappa(G) = \delta(G) = a(G)$	37
4.15	Grafos de Harary com $\kappa(G) = \delta(G) \neq a(G)$	38
4.16	Grafo G_0	39
4.17	Grafo G_1 e grafo G_j	39
4.18	Grafos C^2, K_2 e $C^3 = C^2 \times K_2$	40
4.19	Grafos H_6 e G_6	41
4.20	Grafos H_6, H_7 e H_8	42
4.21	Grafos G_6, G_7 e G_8	43
4.22	O grafo R_4 e os subgrafos obtidos a partir da retirada de arestas do seu subgrafo C_3	44
4.23	O grafo R_5 e os subgrafos obtidos a partir da retirada de arestas do seu subgrafo C_4	44

4.24	O grafo R_6 e os subgrafos obtidos a partir da retirada de arestas do seu subgrafo C_5	45
4.25	O grafo R_7 e os subgrafos obtidos a partir da retirada de arestas do seu subgrafo C_6	45

Lista de Tabelas

3.1	Os valores de $a(G)$, $\kappa(G)$ e $\kappa'(G)$ de alguns grafos G conhecidos, com n vértices.	16
3.2	Relações entre $a(G)$ e $a(G_i)$	17

Capítulo 1

Introdução

O estudo sobre o segundo menor autovalor do laplaciano de um grafo foi iniciado por FIEDLER [8], que o denominou *conectividade algébrica*. Ele caracterizou a conexidade de um grafo G a partir da sua conectividade algébrica e estabeleceu a relação entre esta e as conectividades de vértices e de arestas de G .

A conectividade algébrica está associada a outros invariantes de um grafo, tais como o grau mínimo, o grau máximo, o diâmetro, entre outros, e ABREU *et al.* [2] destacam a relação entre a compactidade de um grafo e a sua conectividade algébrica. Se esta possui um valor alto, o grafo é compactado. Caso contrário, o grafo é alongado. Esta informação é importante, por exemplo, no estudo de moléculas de RNA.

O interesse por grafos cujos autovalores, da sua matriz de adjacência ou laplaciana, são todos números inteiros surgiu com o questionamento de HARARY e SCHWENK [12], sobre quais grafos possuem espectro inteiro. Em particular, alguns grafos apresentam a conectividade algébrica inteira e, como esta se relaciona com outros invariantes de um grafo, se torna bastante útil investigar famílias de grafos com tal propriedade.

Neste trabalho, pesquisamos grafos laplacianos integrais e não laplacianos integrais, mas com a conectividade algébrica inteira, e buscamos relacionar a conectividade algébrica destes grafos com outros invariantes, em particular com a conectividade de vértices. Desta forma, organizamos esta dissertação em cinco capítulos, que são descritos a seguir.

O Capítulo 2 está dividido em três seções, que trazem os conhecimentos básicos sobre Teoria de Grafos, Teoria de Matrizes e Teoria Espectral de Grafos necessários para a compreensão do texto.

No Capítulo 3, reunimos resultados clássicos sobre a conectividade algébrica. No Teorema 3.1 (FIEDLER, [8]), colocamos a relação entre a conectividade algébrica e a conectividade de vértices de grafos não completos e, em especial, no Teorema 3.2, destacamos a caracterização de grafos cujas conectividades algébrica e de vértices

coincidem, realizada por KIRKLAND *et al.* [15].

O Capítulo 4 aborda grafos cuja conectividade algébrica é inteira. Dividimos este capítulo em duas seções: a dos grafos laplacianos integrais e a dos grafos não laplacianos integrais. Na primeira seção, pesquisamos os cografos e, em particular, os grafos *threshold*. Na Proposição 4.2, determinamos a conectividade algébrica e a de vértices para um grafo *threshold* conexo, não-completo, provando que elas coincidem. Na Proposição 4.4, generalizamos a prova deste resultado para um cografo conexo e não-completo. Ainda na primeira seção, exibimos duas famílias infinitas de grafos laplacianos integrais. Os grafos da primeira família possuem as mesmas conectividades algébrica e de vértices, mas estas divergem entre si em uma unidade. Por outro lado, os grafos da segunda família, embora apresentem a mesma conectividade algébrica, possuem conectividades de vértices distintas um do outro, permitindo que, dados dois grafos desta família, a diferença entre estas conectividades seja tão grande quanto desejemos. Na segunda seção, construímos duas famílias infinitas de grafos não laplacianos integrais de forma que cada um destes grafos apresenta a conectividade algébrica inteira. No entanto, uma das famílias apresenta as conectividades algébrica e de vértices iguais, enquanto a outra apresenta estas mesmas conectividades distintas. Nesta mesma seção, analisamos o comportamento dos *grafos roda* e de alguns dos seus subgrafos.

No Capítulo 5, comentamos sobre os resultados observados e obtidos, bem como apresentamos uma proposta para a continuação deste trabalho.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Neste capítulo, buscamos reunir definições e resultados considerados elementares em um estudo de grafos, bem como conceitos de Álgebra Linear, que são necessários para o estudo da Teoria Espectral de Grafos e que são utilizados nos capítulos posteriores.

Como referências na literatura sobre os conceitos abordados, citamos ABREU *et al.* [2], BOAVENTURA-NETTO [3], CVETKOVIĆ *et al.* [6], HORN e JOHNSON [13] e MERRIS [18], que constituem algumas das fontes da nossa pesquisa.

2.1 Teoria de Grafos

Um grafo $G = G(V, E)$ constitui-se de dois conjuntos finitos $V(G)$ (ou V), não vazio, cujos elementos são denominados *vértices*, e $E(G)$ (ou E), cujos elementos, denominados *arestas*, são pares não ordenados de elementos distintos de $V(G)$. Representamos a quantidade de elementos de $V(G)$ e de $E(G)$, respectivamente, por $|V(G)|$ e $|E(G)|$, onde $|V(G)|$ é denominada a *ordem* do grafo.

Se $\{v_i, v_j\}$ é uma aresta de G , dizemos que v_i e v_j são *vértices adjacentes* e que $\{v_i, v_j\}$ é uma aresta *incidente* em v_i e em v_j (em nosso trabalho, não há mais de uma aresta incidindo no mesmo par de vértices). De forma equivalente, dizemos que duas arestas são *adjacentes* quando incidem em um vértice comum. Se um vértice não é adjacente a qualquer outro vértice do grafo, ele é denominado *vértice isolado*. Por outro lado, se um vértice é adjacente a todos os demais vértices do grafo, ele é dito *vértice dominante* ou *universal*.

Se um grafo G é formado apenas por vértices isolados (ou seja, é um grafo sem arestas), dizemos que G é um grafo *vazio*. Por outro lado, se cada vértice de G é vértice dominante, G é denominado grafo *completo* e representado por K_n , onde $n = |V(G)|$. Se $n = 1$, dizemos que $G = K_1$ é o grafo *trivial*.

O complementar de um grafo G é o grafo \overline{G} que possui o mesmo conjunto de vértices de G e as suas relações de adjacência são apenas as que não estão presentes

em G .

O *grau* de $v \in V$, denotado por $d(v)$, é o número de vértices adjacentes a v . O *grau mínimo* de G é definido como $\delta(G) = \min\{d(v); v \in V\}$ e o *grau máximo* de G como $\Delta(G) = \max\{d(v); v \in V\}$. Observemos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E(G)|$.

Dizemos que um grafo $G' = G'(V', E')$ é um *subgrafo* de $G = G(V, E)$, e denotamos por $G' \subseteq G$, se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Se G' preservar todas as relações de adjacência entre os vértices de V' existentes em G , então G' é dito um subgrafo *induzido* de G por V' e o representamos por $G' = G[V']$. Se G' é um subgrafo de G induzido por $V' = V - \{v\}$, onde $v \in V$, representamos G' por $G - v$.

Se G' é um subgrafo induzido vazio de G , dizemos que $V(G')$ é um conjunto *independente*. Um conjunto independente é *maximal* quando não está contido em outros conjuntos independentes. A quantidade de vértices do maior conjunto independente em um grafo é chamado *número de independência* do grafo e é denotado por $\alpha(G)$.

Dois grafos $G_1 = G_1(V_1, E_1)$ e $G_2 = G_2(V_2, E_2)$ são ditos *isomorfos* se existe uma bijeção $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\{v_1, v_2\} \in E_1$ se, e somente se, $\{f(v_1), f(v_2)\} \in E_2, \forall v_1, v_2 \in V_1$. Neste caso, escrevemos $G_1 \simeq G_2$.

Uma *cadeia* é uma sequência de vértices v_1, \dots, v_n de um grafo $G(V, E)$ tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E, \forall 1 \leq i \leq n - 1$. Se $v_1 = v_n$, dizemos que a cadeia é *fechada*. Caso contrário, ou seja, se $v_1 \neq v_n$, a cadeia é dita *aberta*. Uma cadeia cujos vértices são todos distintos é denominada *caminho*. O caminho com n vértices é representado por P_n . Uma cadeia fechada cujos vértices, exceto v_1 e v_n , são todos distintos, recebe o nome de *ciclo*. O ciclo com n vértices é denotado por C_n . O *comprimento* de um caminho ou ciclo é obtido pelo número de arestas que o compõem.

Um grafo é *conexo* quando existe um caminho ligando qualquer par de seus vértices. Dizemos que a *distância* do vértice v_i ao vértice v_j de um grafo conexo é o menor dos comprimentos dos caminhos que ligam v_i a v_j . O *diâmetro* de um grafo é o máximo das distâncias entre dois vértices quaisquer do grafo e é representado por $\text{diam}(G)$.

Se o grafo não é conexo, dizemos que é *desconexo* e se G' é um subgrafo conexo de G tal que não existe outro subgrafo conexo de G que o contenha então G' é uma *componente conexa* de G , ou simplesmente, uma *componente* de G . Um *corte de vértices* em um grafo G é um conjunto de vértices cuja remoção desconecta G .

Um grafo conexo e sem ciclos é denominado *árvore*. Todo vértice de uma árvore que possui grau 1 é denominado *folha*. A *raiz* de uma árvore é um vértice a partir do qual podemos estabelecer o nível dos demais vértices como sendo a distância destes até a raiz.

Um grafo *k-regular* (ou *regular de grau k*) é aquele cujos vértices têm o mesmo grau igual a k . Um grafo $G(V, E)$ é dito *k-partido* quando existe uma partição

$P = \{V_i; V = V_1 \cup \dots \cup V_k \text{ e } V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i \neq j\}$ do seu conjunto de vértices e as arestas de G são da forma $\{u, v\}$, onde $u \in V_i$ e $v \in V_j, i \neq j$. Desta forma, cada $V_i, i = 1, \dots, k$, é um conjunto independente. Se $k = 2$, dizemos que o grafo é *bipartido*. Um grafo $G(V, E)$ é *bipartido completo* se $E = \{\{u, v\}, u \in V_1, v \in V_2\}$. Se $|V_1| = p$ e $|V_2| = q$, representamos G por $K_{p,q}$. Se $p = 1$, o grafo $K_{1,q}$ é denominado *estrela*.

O grafo *cubo m -dimensional* é aquele cujos vértices são vetores de m coordenadas, iguais a 0 ou a 1, e cujas arestas incidem em vértices que diferem por uma só coordenada. O grafo de *Petersen* é um grafo com 10 vértices, 3-regular, com diâmetro 2 e, frequentemente, utilizado como contra-exemplo para muitos problemas em Teoria dos Grafos.

Na Figura 2.1, destacamos o grafo cubo 3-dimensional e o grafo de Petersen.

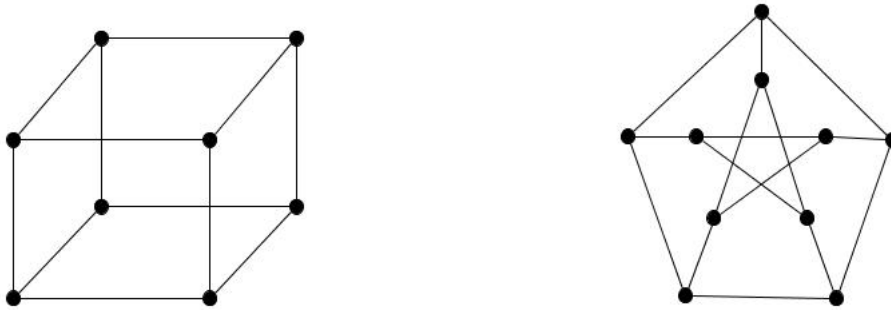


Figura 2.1: Grafo Cubo 3-dimensional e Grafo de Petersen

A *conectividade de vértices* de um grafo $G \neq K_n$ é definida como o menor número de vértices cuja remoção desconecta G e é representada por $\kappa(G)$. Se $G = K_n$, então $\kappa(G) = n - 1$ (ou seja, é o menor número de vértices cuja retirada reduz K_n a um único vértice). De forma análoga, definimos a *conectividade de arestas* como o menor número de arestas cuja remoção desconecta o grafo G e denotamos por $\kappa'(G)$. Um *corte* de vértices (ou de arestas) é um conjunto de vértices (ou de arestas) cuja remoção desconecta o grafo. Se G é um grafo conexo então $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Dados dois grafos $G_1 = G_1(V_1, E_1)$ e $G_2 = G_2(V_2, E_2)$, destacamos, a seguir, algumas operações que são utilizadas no decorrer do texto:

- A *união* $G_1 \cup G_2$ é o grafo cujo conjunto de vértices é $V_1 \cup V_2$ e cujo conjunto de arestas é $E_1 \cup E_2$;
- O *join* $G_1 \vee G_2$ é o grafo tal que cada vértice de G_1 é adjacente a todos os vértices de G_2 , ou seja, $G_1 \vee G_2 = \overline{G_1} \cup \overline{G_2}$. Representamos $G_1 \vee \dots \vee G_n$ por $\bigvee_{i=1, \dots, n} G_i$;

- O *produto cartesiano* $G_1 \times G_2$ é o grafo cujo conjunto de vértices é $V_1 \times V_2$ (o produto cartesiano entre conjuntos) e dois vértices (v_1, v_2) e (u_1, u_2) de $G_1 \times G_2$ são adjacentes se, e somente se, $v_1 = u_1$ e $\{v_2, u_2\} \in E_2$ ou $v_2 = u_2$ e $\{v_1, u_1\} \in E_1$;
- A *união de arestas* $G_1 + G_2$, onde $V_1 = V_2$, é o grafo cujo conjunto de vértices é V_1 (ou V_2) e cujo conjunto de arestas é $E_1 \cup E_2$;
- A *interseção de arestas* $G_1 \cap G_2$, onde $V_1 = V_2$, é o grafo cujo conjunto de vértices é V_1 (ou V_2) e cujo conjunto de arestas é $E_1 \cap E_2$.

2.2 Teoria de Matrizes

Nesta seção, revisamos algumas definições e resultados da Teoria de Matrizes que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

Representamos por $\mathbf{1}$ o vetor cujas entradas são todas iguais a 1 e, por $\mathbf{0}$, o vetor cujas entradas são todas iguais a 0 e, quando necessário, especificamos as suas dimensões. Representamos a matriz identidade por \mathbb{I} e, da mesma forma, especificamos a sua dimensão quando julgamos necessário e, por \mathbb{J} , denotamos a matriz cujas entradas são todas iguais a 1 e destacamos as suas dimensões quando parecer útil.

Seja $M = (m_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n com entradas reais. A *transposta* de M é a matriz $M^T = (k_{ij})$, satisfazendo $k_{ij} = m_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$. Se $M^T = M$, dizemos que M é uma matriz *simétrica*.

A matriz M é *invertível* se existe uma matriz T tal que $MT = TM = \mathbb{I}$. Neste caso, T é dita a *inversa* de M e é denotada por M^{-1} .

Se $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ e $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ são vetores do \mathbb{R}^n , então:

- O *produto interno usual* de u e v é dado por $\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n u_k v_k = u^T v$;
- A *norma euclidiana* do vetor u é definida por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u^T u}$;
- Se $\|u\| = 1$, dizemos que o vetor u é *unitário*.

Dizemos que dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ são *ortogonais* se $\langle x, y \rangle = 0$ e representamos por $x \perp y$. Um subconjunto $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ de \mathbb{R}^n é *ortogonal* se $\langle x_i, x_j \rangle = 0, \forall i \neq j, i = 1, \dots, k$. Caso os vetores $x_i, i = 1, \dots, k$, também sejam unitários, dizemos que o conjunto S é *ortonormal*. O subconjunto de \mathbb{R}^n formado pelos vetores que são ortogonais a todos os vetores de S é chamado *complemento ortogonal* de S e é representado por S^\perp .

O *polinômio característico* de uma matriz M é definido por $p(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{I} - M)$, e suas raízes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são chamados *autovalores* de M . Se λ é um autovalor de M

e $v \neq 0$ em \mathbb{R}^n é tal que $Mv = \lambda v$, dizemos que v é um *autovetor* de M associado ao autovalor λ . A quantidade de vezes que um autovalor λ aparece como raiz do polinômio característico é denominada *multiplicidade algébrica* de λ .

Uma matriz quadrada M é *diagonalizável* quando é semelhante a uma matriz diagonal, ou seja, quando existe uma matriz diagonal D de forma que $M = PDP^{-1}$, onde P é uma matriz invertível.

O *traço* de uma matriz é a soma das entradas de sua diagonal principal. Matrizes semelhantes têm o mesmo traço.

A seguir, destacamos uma operação entre matrizes.

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$. O *produto de Kronecker* de A por B , denotado por $A \otimes B$, é definido como a matriz particionada em blocos

$$A \otimes B = (a_{ij}B)_{m \times p} = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ então } A \otimes B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & 6 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Definição 2.1: *Uma matriz quadrada $A_{n \times n}$ com entradas complexas é dita hermitiana se a transposta da sua matriz conjugada (cujas entradas são os complexos conjugados de A) for igual a A , isto é, $A^* = \overline{A}^T = A$. Desta forma, se $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é uma matriz hermitiana então $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$.*

Segue, da Definição 2.1, que as entradas da diagonal principal de uma matriz hermitiana são reais. Além disso, pelo Teorema Espectral (DONADELLI, [7]), toda matriz hermitiana A , de dimensão n , é diagonalizável e a matriz diagonal resultante apresenta todas as entradas reais. Conseqüentemente, todos os n autovalores de A são reais e A possui n autovetores linearmente independentes. Ainda, existe uma base ortonormal de \mathbb{C}^n formada por n autovetores de A .

Enunciamos, a seguir, o Teorema de Courant- Fischer, retirado de HORN e JOHNSON [13].

Teorema 2.1 (COURANT - FISHER): *Seja $A \in M_n$ uma matriz hermitiana com autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ e seja k um número inteiro dado tal que $1 \leq k \leq n$. Se S é um subespaço vetorial de \mathbb{C}^n , então*

$$\lambda_k = \min_{\{S: \dim S = k\}} \max_{\{x: 0 \neq x \in S\}} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

e

$$\lambda_k = \max_{\{S: \dim S = n-k+1\}} \min_{\{x: 0 \neq x \in S\}} \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Definição 2.2: Uma matriz hermitiana $A_{n \times n}$ é chamada *semidefinida positiva* se $x^* A x \geq 0, \forall x \in C^n$.

A matriz laplaciana, que será vista na próxima seção, é uma matriz simétrica e semidefinida positiva, o que lhe garante uma importante propriedade estrutural.

2.3 Teoria Espectral de Grafos

Existem matrizes que podem ser associadas aos grafos. Destacamos a matriz de *adjacência*, a matriz *diagonal dos graus* e a matriz *laplaciana*, que são abordadas neste estudo.

A matriz de *adjacência* $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ de um grafo $G = (V, E)$, com n vértices, apresenta as entradas $a_{ij} = 1$ se os vértices v_i e v_j são adjacentes e, caso contrário, $a_{ij} = 0$.

Observemos que, pela definição, a matriz de adjacência de um grafo G é uma matriz real, simétrica e todos os seus autovalores são reais e somam 0, uma vez que o traço de $A(G)$ é igual a 0.

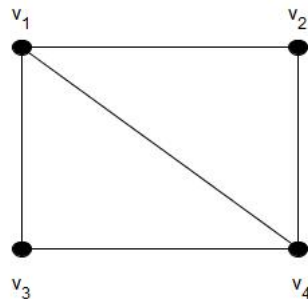


Figura 2.2: Grafo G

A matriz de adjacência do grafo G da Figura 2.2 é

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz de adjacência $A(G)$, ou simplesmente, o *polinômio característico* de G é representado por $p_G(\lambda)$. O *espectro* de G é o multi-

conjunto dos autovalores de $A(G)$. Chamamos de *índice* de G o maior autovalor de G , representado por λ_1 .

A matriz *diagonal dos graus* dos vértices de um grafo $G = (V, E)$ com n vértices, denotada por $D(G)$, é tal que $d_{ii} = d(v_i), i = 1, \dots, n$.

A matriz *laplaciana* $L(G)$ (ou L) de um grafo G é a matriz $L(G) = D(G) - A(G)$. Segue, da definição acima, que $L(G)$ é uma matriz simétrica.

A matriz laplaciana do grafo G da Figura 2.2 é

$$L(G) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

O *espectro do laplaciano* de G , denotado por $spect_L(G)$, é representado por uma matriz linha cujas entradas são todos os autovalores μ_i de $L(G)$, dispostos em ordem não-crescente.

O espectro do laplaciano do grafo G da Figura 2.2 é

$$spect_L(G) = (4 \quad 4 \quad 2 \quad 0)$$

ou

$$spect_L(G) = (4^2 \quad 2 \quad 0),$$

onde o expoente representa a multiplicidade algébrica do autovalor 4.

Como $L(G)$ é uma matriz semidefinida positiva, pelo Teorema 2.1, todos os seus autovalores são maiores ou iguais a 0. Além disso, como a soma das entradas de uma linha (ou coluna) qualquer de L é 0, então $L \cdot \mathbf{1} = 0 = 0 \cdot \mathbf{1}$. Portanto, o menor autovalor de L , μ_n , é igual a 0 e o vetor $\mathbf{1}$ é um autovetor associado.

O penúltimo autovalor (ou segundo menor autovalor) de $L(G)$, μ_{n-1} , recebe o nome de *conectividade algébrica* de G . A conectividade algébrica é apresentada no próximo capítulo e é objeto de estudo deste trabalho. A partir de agora, representamos a conectividade algébrica de um grafo G por $a(G)$. O maior autovalor de $L(G)$, μ_1 , é chamado *índice* do laplaciano de G .

O Teorema abaixo nos fornece o espectro do laplaciano de um *join* de grafos.

Teorema 2.2 (MERRIS, [18]): *Sejam G_1 e G_2 grafos com conjuntos disjuntos de r e s vértices, respectivamente. Se $spect_L(G_1) = (\mu_1 \dots \mu_r)$ e $spect_L(G_2) = (\nu_1 \dots \nu_s)$, então os autovalores de $L(G_1 \vee G_2)$ são $n = r + s$; $\mu_1 + s, \dots, \mu_{r-1} + s$; $\nu_1 + r, \dots, \nu_{s-1} + r$ e 0.*

Prova: Sejam $G = G_1 \vee G_2$, $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{r-1} \geq \mu_r = 0$ e $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_{s-1} \geq \nu_s = 0$ os autovalores de $L(G_1)$ e de $L(G_2)$, respectivamente. Segue que a matriz laplaciana de G é

$$L(G) = \begin{pmatrix} L(G_1) + s\mathbb{I}_r & -\mathbb{J}_{r \times s} \\ -\mathbb{J}_{s \times r} & L(G_2) + r\mathbb{I}_s \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que μ seja um autovalor de $L(G_1)$ com um autovetor associado x tal que $x^T \mathbf{1} = 0$. Como 0 é um autovalor de $L(G_1)$ tendo $\mathbf{1}$ como um autovetor associado e a dimensão de $L(G_1)$ é igual a r , temos que o complemento ortogonal de $\mathbf{1}$ possui $r - 1$ vetores. Consideremos o vetor $w \in \mathbb{R}^{r+s}$ tal que $w = \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{0}_s \end{pmatrix}$. Então

$$\begin{aligned} L(G)w &= \begin{pmatrix} L(G_1) + s\mathbb{I}_r & -\mathbb{J}_{r \times s} \\ -\mathbb{J}_{s \times r} & L(G_2) + r\mathbb{I}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{0}_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (L(G_1) + s\mathbb{I}_r)x \\ -\mathbb{J}_{s \times r}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(G_1)x + s\mathbb{I}_r x \\ \mathbf{0}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x + sx \\ \mathbf{0}_s \end{pmatrix} = (\mu + s)w, \end{aligned}$$

pois $x^T \mathbf{1} = \mathbf{0}$ e μ é um autovalor de $L(G_1)$ associado ao autovetor x . Logo, w é um autovetor de $L(G)$ associado ao autovalor $\mu + s$. Logo, $r - 1$ dos autovalores de $L(G)$ são da forma $\mu_i + s$, onde $\mu_i \in \text{spect}_L(G_1)$, $\forall i = 1, \dots, r - 1$, com um autovetor ortogonal a $\mathbf{1}$. Procedendo de forma análoga com $L(G_2)$, obtemos que $s - 1$ autovalores de $L(G)$ são da forma $\nu_i + r$, onde $\nu_i \in \text{spect}_L(G_2)$, $\forall i = 1, \dots, s - 1$, com um autovetor ortogonal a $\mathbf{1}$. Além disso, 0 e $r + s$ também são autovalores de $L(G)$ e o autovetor associado a $r + s$ é $\begin{pmatrix} s\mathbf{1}_r \\ -r\mathbf{1}_s \end{pmatrix}$. De fato, $L(G) \begin{pmatrix} s\mathbf{1}_r \\ -r\mathbf{1}_s \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} L(G_1) + s\mathbb{I}_r & -\mathbb{J}_{r \times s} \\ -\mathbb{J}_{s \times r} & L(G_2) + r\mathbb{I}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s\mathbf{1}_r \\ -r\mathbf{1}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sL(G_1)\mathbf{1}_r + s^2\mathbb{I}_r\mathbf{1}_r + r\mathbb{J}_{r \times s}\mathbf{1}_s \\ -s\mathbb{J}_{s \times r}\mathbf{1}_r - rL(G_2)\mathbf{1}_s - r^2\mathbb{I}_s\mathbf{1}_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s^2\mathbb{I}_r\mathbf{1}_r + r\mathbb{J}_{r \times s}\mathbf{1}_s \\ -s\mathbb{J}_{s \times r}\mathbf{1}_r - r^2\mathbb{I}_s\mathbf{1}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2\mathbf{1}_r + sr\mathbf{1}_r \\ -rs\mathbf{1}_s - r^2\mathbf{1}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r + s)s\mathbf{1}_r \\ -(r + s)r\mathbf{1}_s \end{pmatrix} = (r + s) \begin{pmatrix} s\mathbf{1}_r \\ -r\mathbf{1}_s \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pois $L(G_1)\mathbf{1} = 0 \cdot \mathbf{1}$ e $L(G_2)\mathbf{1} = 0 \cdot \mathbf{1}$. □

A seguir, destacamos o espectro laplaciano dos grafos $G_1 \cup G_2$, $G_1 \times G_2$ e \overline{G} .

Proposição 2.1 (CVETKOVIĆ *et al.*, [6]): *Sejam G_1 e G_2 grafos com conjuntos disjuntos de r e s vértices, respectivamente. Se $\text{spect}_L(G_1) = (\mu_1 \dots \mu_r)$ e $\text{spect}_L(G_2) = (\nu_1 \dots \nu_s)$, então:*

- (i) os autovalores de $L(G_1 \cup G_2)$ são $\mu_1, \dots, \mu_r, \nu_1, \dots, \nu_s$;
- (ii) os autovalores de $L(G_1 \times G_2)$ são $\mu_i + \nu_j, \forall i = 1, \dots, r, \forall j = 1, \dots, s$;

(iii) $\text{spect}_L(\overline{G_1}) = (r - \mu_{r-1} \ \dots \ r - \mu_1 \ 0)$, se $r \geq 2$.

Prova:

(i) Basta observarmos que $L(G_1 \cup G_2) = \begin{pmatrix} L(G_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L(G_2) \end{pmatrix}$ e a prova segue de forma análoga à do teorema anterior.

(ii) Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$. Rotulando o conjunto $V_1 \times V_2$ em ordem lexicográfica, obtemos que $L(G_1 \times G_2) = L(G_1) \otimes \mathbb{I}_s + \mathbb{I}_r \otimes L(G_2)$.

Consideremos os vetores z e w tais que z é autovetor de $L(G_1)$ e w é autovetor de $L(G_2)$. Segue que $L(G_1 \times G_2)(z \otimes w) = (L(G_1) \otimes \mathbb{I}_s + \mathbb{I}_r \otimes L(G_2))(z \otimes w) = L(G_1)z \otimes \mathbb{I}_s w + \mathbb{I}_r z \otimes L(G_2)w = \mu z \otimes w + z \otimes \nu w = \mu(z \otimes w) + \nu(z \otimes w) = (\mu + \nu)(z \otimes w)$, onde μ é autovalor de $L(G_1)$ associado ao autovetor z e ν é autovalor de $L(G_2)$ associado ao autovetor w . □

(iii) Consideremos w_i um autovetor de $L(G_1)$. Observemos que $L(\overline{G_1}) = r\mathbb{I}_r - \mathbb{J}_{r \times r} - L(G_1)$. Segue que $L(\overline{G_1})w_i = (r\mathbb{I}_r - \mathbb{J}_{r \times r} - L(G_1))w_i = r\mathbb{I}_r w_i - \mathbb{J}_{r \times r} w_i - L(G_1)w_i = r w_i - 0 - \mu_i w_i = (r - \mu_i)w_i$, onde μ_i é autovalor de $L(G_1)$ associado ao autovetor w_i , $i = 1, \dots, r - 1$. □

Capítulo 3

Conectividade algébrica

FIEDLER [8] denomina o segundo menor autovalor do laplaciano de um grafo G de *conectividade algébrica* do grafo G . Ao citar que a conectividade algébrica de um grafo é igual a 0 se, e somente se, o grafo é desconexo, FIEDLER [8] relaciona a multiplicidade algébrica do autovalor 0, do laplaciano de um grafo, com a quantidade de componentes deste grafo.

A conectividade algébrica $a(G)$ está associada a diversos invariantes de grafos, tais como a conectividade de vértices, a conectividade de arestas, o grau mínimo, entre outros. Neste capítulo, buscamos reunir alguns resultados presentes na literatura sobre a conectividade algébrica, em particular, um que a relaciona com os demais três invariantes citados.

Para mais referências sobre o assunto, indicamos ABREU *et al.* [2], ABREU [1] e KIRKLAND *et al.* [15].

Proposição 3.1 (FIEDLER, [8]): *Se G_1 e G_2 são grafos disjuntos em arestas com o mesmo conjunto de vértices então*

$$a(G_1) + a(G_2) \leq a(G_1 + G_2).$$

Prova: Observemos que $L(G_1 + G_2) = L(G_1) + L(G_2) - L(G_1 \cap G_2)$. Como, por hipótese, G_1 e G_2 são disjuntos em arestas, temos que $L(G_1 + G_2) = L(G_1) + L(G_2)$. Pelo Teorema 2.1, segue que

$$\begin{aligned} a(G_1 + G_2) &= \min_{x \in W} x^T (L(G_1) + L(G_2))x \\ &= \min_{x \in W} (x^T L(G_1)x + x^T L(G_2)x) \geq \min_{x \in W} x^T L(G_1)x + \min_{x \in W} x^T L(G_2)x \\ &= a(G_1) + a(G_2), \end{aligned}$$

onde W é o conjunto de todos os vetores x tais que $x^T x = 1$ e $x^T \mathbf{1} = 0$.

□

Corolário 3.2 (FIEDLER, [8]): Se $G_1 \subseteq G_2$ e G_1 e G_2 têm o mesmo conjunto de vértices, então

$$a(G_1) \leq a(G_2).$$

Prova: Sejam $G_1 \subseteq G_2$ e $G'_1 \subseteq G_2$ tal que G'_1 é o grafo complementar de G_1 em relação a G_2 . Desta forma, $G_1 + G'_1 = G_2$. Pela Proposição 3.1., obtemos

$$a(G_1) + a(G'_1) \leq a(G_2).$$

Como $a(G'_1) \geq 0$, segue que $a(G_1) \leq a(G_2)$. □

Proposição 3.3 (FIEDLER, [8]): Sejam G um grafo e G_1 obtido a partir de G pela remoção de k vértices de G . Então

$$a(G_1) \geq a(G) - k.$$

Prova: Suponhamos que G tenha n vértices e que G_1 seja obtido a partir de G pela remoção de um vértice u_n . Consideremos um grafo G_2 obtido ao adicionarmos em G todas as arestas incidentes a u_n que faltam em G .

Observemos, então, que cada vértice de G_1 tem o seu grau aumentado em uma unidade em G_2 , onde são adjacentes a u_n . Da mesma forma, como o vértice u_n é adjacente a todos os vértices em G_2 , conseqüentemente, o grau de u_n é igual a $n - 1$ em G_2 . Logo, a matriz laplaciana de G_2 é

$$L(G_2) = \begin{pmatrix} L(G_1) + \mathbb{I}_{n-1} & -\mathbf{1}^T \\ -\mathbf{1} & n - 1 \end{pmatrix}.$$

Seja x um autovetor de $L(G_1)$ correspondente ao autovalor $a(G_1)$, ou seja, $L(G_1)x = a(G_1)x$. Então, $x \perp \mathbf{1}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} L(G_2) \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L(G_1) + \mathbb{I}_{n-1} & -\mathbf{1}^T \\ -\mathbf{1} & n - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L(G_1) + \mathbb{I}_{n-1})x \\ -\mathbf{1}x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(G_1)x + x \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = (a(G_1) + 1) \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daí, temos que $a(G_1) + 1$ é um autovalor de $L(G_2)$ diferente de zero. Logo, por definição, $a(G_2) \leq a(G_1) + 1$. Do Corolário 3.2., temos

$$a(G) \leq a(G_2) \Rightarrow a(G) \leq a(G_1) + 1 \Rightarrow a(G) - 1 \leq a(G_1) \Rightarrow a(G_1) \geq a(G) - k$$

para $k = 1$. Repetindo o mesmo processo, ao retirarmos, sucessivamente k vértices,

obtemos o resultado desejado. □

Proposição 3.4 (FIEDLER, [8]): *Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $\delta(G)$ o grau mínimo de G . Então*

$$a(G) \leq (n/(n-1))\delta(G) \leq 2|E|/(n-1).$$

A próxima proposição relaciona a conectividade algébrica de um grafo com o seu índice do laplaciano $\mu_1(G)$ e é utilizada nos resultados seguintes.

Proposição 3.5 (FIEDLER, [8]): *Se $G_1 \subseteq G_2$ e $\Delta(G_1)$ representa o grau máximo de G_1 , então:*

- (i) $a(G_1) \leq \mu_1(G_1)$ e $a(G_1) = \mu_1(G_1)$ se, e somente se, $G_1 = K_n$ ou G_1 é um grafo vazio;
- (ii) $\mu_1(G_1) \leq \mu_1(G_2)$;
- (iii) $(n/(n-1))\Delta(G_1) \leq \mu_1(G_1) \leq 2\Delta(G_1)$

Como consequência da Proposição 2.1, temos que se G é um grafo com $n \geq 2$ vértices, então a conectividade algébrica do seu complementar é

$$a(\overline{G}) = n - \mu_1(G),$$

onde $\mu_1(G)$ é o índice do laplaciano de G .

A proposição a seguir nos fornece a conectividade algébrica do grafo K_n .

Proposição 3.6 (FIEDLER, [8]): *Se K_n é o grafo completo com $n \geq 2$ vértices então*

$$a(K_n) = n.$$

Prova: Como $a(K_n) = n - \mu_1(\overline{K_n})$ e $\mu_1(\overline{K_n}) = 0$, segue que $a(K_n) = n$. □

Proposição 3.7 (FIEDLER, [8]): *Se $\delta(G)$ é o grau mínimo de G , então*

$$a(G) \geq 2\delta(G) - n + 2.$$

Prova: Aplicando a Proposição 3.5, que relaciona o grau máximo e o índice laplaciano de um grafo, ao grafo complementar \overline{G} , obtemos

$$\mu_1(\overline{G}) \leq 2\Delta(\overline{G}) \Rightarrow n - a(G) \leq 2\Delta(\overline{G}) \Rightarrow n - a(G) \leq 2(n - 1 - \delta(G))$$

$$\Rightarrow -a(G) \leq n - 2 - 2\delta(G) \Rightarrow a(G) \geq 2\delta(G) - n + 2. \quad \square$$

Proposição 3.8 (FIEDLER, [8]): *Seja G um grafo com n vértices contendo um conjunto independente de m vértices. Então*

$$a(G) \leq n - m.$$

Prova: Se G contém um conjunto independente de m vértices então \overline{G} contém um subgrafo isomorfo ao grafo completo K_m . Como $\mu_1(K_m) = m$, temos, pela Proposição 3.5, que $\mu_1(\overline{G}) \geq m$. Logo, $a(G) = n - \mu_1(\overline{G}) \leq n - m$. □

A proposição que segue nos fornece um limitante superior para a conectividade algébrica de um grafo não completo, em função do seu número de vértices.

Proposição 3.9 (FIEDLER, [8]): *Se G é um grafo não completo com n vértices então*

$$a(G) \leq n - 2.$$

Prova: Como G não é completo, existem pelo menos dois vértices que não são adjacentes em G ; logo, estes dois vértices formam um conjunto independente em G . Da Proposição 3.8, obtemos que $a(G) \leq n - 2$. □

Proposição 3.10 (FIEDLER, [8]): *Se $K_{p,q}$ representa o grafo bipartido completo, com p vértices em um conjunto e q vértices no outro, então*

$$a(K_{p,q}) = \min\{p, q\}.$$

Prova: Como $\mu_1(\overline{K_{p,q}}) = \max\{\mu_1(K_p), \mu_1(K_q)\}$ e $n - a(K_{p,q}) = \mu_1(\overline{K_{p,q}})$, segue que $n - a(K_{p,q}) = \max\{\mu_1(K_p), \mu_1(K_q)\} = \max\{a(K_p), a(K_q)\} = \max\{p, q\} \Rightarrow a(K_{p,q}) = n - \max\{p, q\} = \min\{p, q\}$, pois $p + q = n$. Logo, $a(K_{p,q}) = \min\{p, q\}$. □

Observemos que, como $K_{p,q} = \overline{K_p} \vee \overline{K_q}$, sua conectividade algébrica pode ser obtida diretamente da Proposição 2.1.

Proposição 3.11 (FIEDLER, [8]): *Sejam $G = (V, E)$, $V = V_1 \cup V_2$ uma partição de V e G_i o subgrafo de G induzido por V_i , $i = 1, 2$. Então*

$$a(G) \leq \min\{a(G_1) + |V_2|, a(G_2) + |V_1|\}.$$

Prova: Temos que G_1 (respectivamente G_2) é obtido a partir de G pela remoção de $|V_2|$ (respectivamente $|V_1|$) vértices de G . Então, pela Proposição 3.3,

$$a(G) \leq a(G_1) + |V_2|$$

e

$$a(G) \leq a(G_2) + |V_1|.$$

Logo, $a(G) \leq \min\{a(G_1) + |V_2|, a(G_2) + |V_1|\}$.

□

O teorema abaixo relaciona a conectividade algébrica e a conectividade de vértices de um grafo não completo.

Teorema 3.1 (FIEDLER, [8]): *Seja G um grafo não completo. Então*

$$a(G) \leq \kappa(G).$$

Prova: Sejam $G = (V, E)$ e V_1 um corte de vértices tal que $V_2 = V - V_1 \neq \emptyset$ (isto é, $V = V_1 \cup V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$). Se $G_i, i = 1, 2$, é o subgrafo induzido por V_i , segue da Proposição 3.11 que

$$a(G) \leq \min\{a(G_1) + |V_2|, a(G_2) + |V_1|\} \leq a(G_2) + |V_1| = |V_1|,$$

pois G_2 é desconexo, por definição. Logo, $a(G) \leq \kappa(G)$.

□

Considerando o Teorema 3.1 e as relações vistas na seção Teoria de Grafos, temos que se G é um grafo não completo, então

$$a(G) \leq \kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G).$$

A seguir, exibimos a Tabela 3.1 (FIEDLER, [8], ABREU, [1]) com os valores das conectividades algébrica, de vértices e de arestas de alguns grafos conhecidos.

Tabela 3.1: Os valores de $a(G)$, $\kappa(G)$ e $\kappa'(G)$ de alguns grafos G conhecidos, com n vértices.

Grafo G	$a(G)$	$\kappa(G)$	$\kappa'(G)$
Grafo completo $K_n, n \geq 2$	n	$n - 1$	$n - 1$
Caminho P_n	$2(1 - \cos(\pi/n))$	1	1
Ciclo C_n	$2(1 - \cos(2\pi/n))$	2	2
Grafo bipartido completo $K_{p,q}$	$\min\{p, q\}$	$\min\{p, q\}$	$\min\{p, q\}$
Estrela $K_{1,q}, q > 1$	1	1	1
Cubo m -dimensional	2	m	m
Grafo de Petersen	2	3	3

Alguns grafos são resultantes de operações realizadas sobre outros grafos. A partir destas operações, podemos determinar ou limitar a conectividade algébrica destes grafos. A Tabela 3.2 (ABREU, [1]), exibida a seguir, reúne relações entre

$a(G)$ e $a(G_i)$, onde G_i é o grafo obtido a partir de alguma operação realizada sobre G .

Tabela 3.2: Relações entre $a(G)$ e $a(G_i)$.

Operações em G	Relações entre $a(G)$ e $a(G_i)$
Remoção de uma aresta de G	$a(G_1) \leq a(G)$
Remoção de k vértices de G	$a(G) \leq a(G_1) + k$
Adição de uma aresta a G	$a(G) \leq a(G_1) \leq a(G) + 2$
União de arestas $G = G_1 + G_2$	$a(G_1) + a(G_2) \leq a(G)$
Produto Cartesiano $G = G_1 \times G_2$	$a(G) = \min\{a(G_1), a(G_2)\}$

Existem na literatura (ABREU, [1]) limitantes para a conectividade algébrica relacionados a determinados invariantes de um grafo, como o diâmetro, o número de independência maximal, entre outros. Por exemplo, dado um grafo G com n vértices, temos que $\frac{4}{\text{diam}(G)n} \leq a(G)$ e, se G é não-completo, temos que $a(G) \leq n - \alpha(G)$.

KIRKLAND *et al.* [15] caracterizam os grafos cujas conectividades algébrica e de vértices coincidem e que, conseqüentemente, apresentam conectividade algébrica inteira. Este resultado é apresentado a seguir e será utilizado nos resultados obtidos neste trabalho.

Teorema 3.2. (KIRKLAND *et al.*, [15]): *Seja G um grafo conexo, não-completo, com n vértices. Então $\kappa(G) = a(G)$ se, e somente se, G puder ser escrito como $G_1 \vee G_2$, onde G_1 é um grafo desconexo com $n - \kappa(G)$ vértices e G_2 é um grafo com $\kappa(G)$ vértices tal que $a(G_2) \geq 2\kappa(G) - n$.*

Prova: Suponhamos que $\kappa(G) = a(G)$. Ao retirarmos $\kappa(G)$ vértices do grafo G , obtemos o subgrafo $G_1 = H_1 \cup H_2$ desconexo, com $n - \kappa(G)$ vértices, e o subgrafo G_2 induzido pelos $\kappa(G)$ vértices retirados de G . Consideremos $L(H_1)$, $L(H_2)$ e $L(G_2)$ as matrizes laplacianas de H_1 , H_2 e G_2 , respectivamente; D_1 , D_2 e D_3 as matrizes diagonais que acrescentam aos graus dos vértices de H_1 , H_2 e G_2 , as relações de adjacência entre os vértices de H_1 e os de G_2 , entre os vértices de H_2 e os de G_2 e entre os vértices de G_2 e os de $H_1 \cup H_2$, respectivamente; e X e Y as matrizes que representam as relações de adjacência entre os vértices de H_1 e os de G_2 e entre os vértices de H_2 e os de G_2 , respectivamente. Podemos, então, ao permutar simultaneamente as linhas e as colunas da matriz laplaciana de G , obter

$$L(G) = \begin{pmatrix} L(H_1) + D_1 & \mathbf{0} & -X \\ \mathbf{0} & L(H_2) + D_2 & -Y \\ -X^T & -Y^T & L(G_2) + D_3 \end{pmatrix}.$$

Se H_1 tem n_1 vértices e H_2 tem n_2 vértices então $n_1 + n_2 = n - \kappa(G)$ vértices.

Seja $w^T = (n_2 \mathbf{1}_{n_1}^T \quad -n_1 \mathbf{1}_{n_2}^T \quad \mathbf{0}^T)$. Observemos que

$$w^T \mathbf{1} = (n_2 \mathbf{1}_{n_1}^T \quad -n_1 \mathbf{1}_{n_2}^T \quad \mathbf{0}^T) \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} \\ \mathbf{1}_{n_2} \\ \mathbf{1}_{\kappa(G)} \end{pmatrix} = n_1 n_2 - n_1 n_2 + 0 = 0.$$

Além disso, $w^T L(G)w =$

$$\begin{aligned} & (n_2 \mathbf{1}_{n_1}^T \quad -n_1 \mathbf{1}_{n_2}^T \quad \mathbf{0}^T) \begin{pmatrix} L(H_1) + D_1 & \mathbf{0} & -X \\ \mathbf{0} & L(H_2) + D_2 & -Y \\ -X^T & -Y^T & L(G_2) + D_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_2 \mathbf{1}_{n_1} \\ -n_1 \mathbf{1}_{n_2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= (n_2 \mathbf{1}_{n_1}^T \quad -n_1 \mathbf{1}_{n_2}^T \quad \mathbf{0}^T) \begin{pmatrix} n_2 L(H_1) \mathbf{1}_{n_1} + n_2 D_1 \mathbf{1}_{n_1} \\ -n_1 L(H_2) \mathbf{1}_{n_2} - n_1 D_2 \mathbf{1}_{n_2} \\ -n_2 X^T \mathbf{1}_{n_1} + n_1 Y^T \mathbf{1}_{n_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $L(H_1) \mathbf{1}_{n_1} = \mathbf{0}_{n_1}$ e $L(H_2) \mathbf{1}_{n_2} = \mathbf{0}_{n_2}$, temos que

$$\begin{aligned} w^T L(G)w &= (n_2 \mathbf{1}_{n_1}^T \quad -n_1 \mathbf{1}_{n_2}^T \quad \mathbf{0}^T) \begin{pmatrix} n_2 D_1 \mathbf{1}_{n_1} \\ -n_1 D_2 \mathbf{1}_{n_2} \\ -n_2 X^T \mathbf{1}_{n_1} + n_1 Y^T \mathbf{1}_{n_2} \end{pmatrix} \\ &= n_2^2 \mathbf{1}_{n_1}^T D_1 \mathbf{1}_{n_1} + n_1^2 \mathbf{1}_{n_2}^T D_2 \mathbf{1}_{n_2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

As matrizes diagonais D_1 e D_2 apresentam entradas, no máximo, iguais a $\kappa(G)$ (caso em que todos os vértices de H_1 ou de H_2 são adjacentes a todos os vértices de G_2). Segue que

$$w^T L(G)w \leq n_2^2 n_1 \kappa(G) + n_1^2 n_2 \kappa(G) = \kappa(G)(n_2^2 n_1 + n_1^2 n_2) = \kappa(G)w^T w, \quad (3.2)$$

pois

$$\begin{aligned} w^T w &= (n_2 \mathbf{1}_{n_1}^T \quad -n_1 \mathbf{1}_{n_2}^T \quad \mathbf{0}^T) \begin{pmatrix} n_2 \mathbf{1}_{n_1} \\ -n_1 \mathbf{1}_{n_2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = n_2^2 \mathbf{1}_{n_1}^T \mathbf{1}_{n_1} + n_1^2 \mathbf{1}_{n_2}^T \mathbf{1}_{n_2} \\ &= n_2^2 n_1 + n_1^2 n_2. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $w^T \mathbf{1} = 0$, segue do Teorema 2.1 que

$$a(G)w^T w \leq w^T L(G)w.$$

Portanto, como $\kappa(G) = a(G)$ por hipótese, temos que

$$\kappa(G)w^T w = a(G)w^T w \leq w^T L(G)w \leq \kappa(G)w^T w,$$

pela equação (3.2). Daí,

$$w^T L(G)w = \kappa(G)w^T w \Rightarrow D_1 = \kappa(G)I_{n_1}$$

e

$$D_2 = \kappa(G)I_{n_2}.$$

Logo, $G = G_1 \vee G_2$, onde $G_1 = H_1 \cup H_2$ é um grafo desconexo. Desta forma,

$$L(G) = \begin{pmatrix} L(G_1) + \kappa(G)\mathbb{I}_{n-\kappa(G)} & -\mathbb{J}_{(n-\kappa(G)) \times \kappa(G)} \\ -\mathbb{J}_{\kappa(G) \times (n-\kappa(G))} & L(G_2) + (n - \kappa(G))\mathbb{I}_{\kappa(G)} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Logo,

$$a(G) = \min\{|V(G_2)| + a(G_1), |V(G_1)| + a(G_2)\} = \min\{\kappa(G), n - \kappa(G) + a(G_2)\},$$

pois G_1 é desconexo. Como $\kappa(G) = a(G)$, por hipótese, segue que

$$\kappa(G) \leq n - \kappa(G) + a(G_2) \Rightarrow a(G_2) \geq 2\kappa(G) - n.$$

Reciprocamente, suponhamos que $G = G_1 \vee G_2$, onde G_1 é um grafo desconexo com $n - \kappa(G)$ vértices e G_2 é um grafo com $\kappa(G)$ vértices satisfazendo $a(G_2) \geq 2\kappa(G) - n$. Consequentemente $L(G)$ possui a forma da matriz (3.3) e $a(G) = \min\{\kappa(G), n - \kappa(G) + a(G_2)\}$. Como, por hipótese, $a(G_2) \geq 2\kappa(G) - n$, segue que $\kappa(G) \leq n - \kappa(G) + a(G_2)$. Logo, $a(G) = \kappa(G)$. □

A Figura 3.1 representa um grafo G que satisfaz as condições do Teorema 3.2., onde $G = G_1 \vee G_2$, com $\kappa(G) = 3$, $G_1 = 2K_1$ e $G_2 = K_3$. Segue que G_1 é um grafo desconexo com $n - \kappa(G)$ vértices e G_2 é um grafo com $\kappa(G)$ vértices tal que $a(G_2) \geq 2\kappa(G) - n$.

A seguir, transcrevemos a discussão sobre as hipóteses do Teorema 3.1. realizada por KIRKLAND *et al.* [14].

A condição do grafo G poder ser escrito como $G_1 \vee G_2$ de forma que G_1 , por exemplo, seja um grafo desconexo com $n - \kappa(G)$ vértices é uma condição da teoria de grafos. Para decidirmos se o grafo G satisfaz esta condição e, em caso afirmativo, determinarmos $\kappa(G)$ e os grafos G_1 e G_2 , analisamos, em primeiro lugar, o seu complementar \bar{G} . Como o complementar de um *join* é um grafo desconexo, então se \bar{G} for conexo, G não pode ser um *join* de grafos. Caso \bar{G} seja desconexo, consideremos

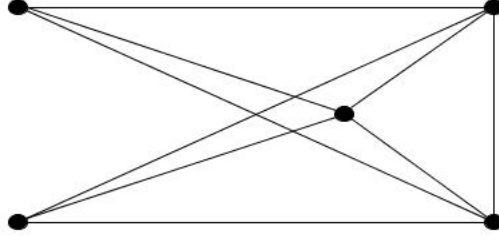


Figura 3.1: $G = 2K_1 \vee K_3$

suas componentes H_1, \dots, H_t . Como o complementar da união dos H'_i s, $i = 1, \dots, t$, é um *join* dos complementares dos H'_i s, $\forall i = 1, \dots, t$, temos que a única possibilidade para G_1 é ser um dos $\overline{H'_i}$ s. Portanto, se cada $\overline{H'_i}$ for conexo, então G_1 não será desconexo e, conseqüentemente, G não satisfará a condição da teoria de grafos. Por outro lado, se houver algum $\overline{H'_i}$ desconexo, basta escolhermos o que possui o maior número de vértices para ser o G_1 e, conseqüentemente, G_2 será o subgrafo induzido pelos vértices de G que não estão em G_1 e, desta forma, G_1 será desconexo com $n - \kappa(G)$ vértices e a condição da teoria de grafos estará satisfeita.

Agora, suponhamos que G satisfaz a condição da teoria de grafos, ou seja, $G = G_1 \vee G_2$, onde G_1 é desconexo e possui $n - \kappa(G)$ vértices. A condição $a(G_2) \geq 2\kappa(G) - n$ é uma condição da teoria espectral de grafos. Se $\kappa(G) \leq n/2$, então $2\kappa(G) - n \leq 2(n/2) - n = 0 \Rightarrow a(G_2) \geq 0$ e, portanto, a condição espectral é satisfeita trivialmente. Por outro lado, se $\kappa(G) > n/2$, temos que calcular o valor de $a(G_2)$ ou utilizar limitantes conhecidos para $a(G_2)$ para comparar $a(G_2)$ e $2\kappa(G) - n$. Se, por exemplo, $\delta(G_2) \leq 2\kappa(G) - n$, então a condição espectral não será satisfeita, uma vez que $a(G) \leq \delta(G)$ para todo grafo G . Observemos que se fixarmos $\kappa(G)$ e fizermos o número n de vértices crescer, então a condição espectral tende a ser satisfeita. Assim, se G_2 tiver $\kappa(G)$ vértices, então $\kappa(G_1 \vee G_2) = a(G_1 \vee G_2)$ para todo grafo desconexo G_1 com, no mínimo, $\kappa(G) - a(G_2)$ vértices.

Capítulo 4

Grafos com conectividade algébrica inteira

Neste capítulo, investigamos grafos cuja conectividade algébrica é um número inteiro e procuramos compará-la com a sua conectividade de vértices.

Como $a(G) = 0 = \kappa(G)$ se, e só se, G é desconexo, de agora em diante só consideramos grafos conexos.

Iniciamos nosso estudo com grafos que possuem todos os autovalores laplacianos inteiros.

4.1 Grafos laplacianos integrais

Um grafo G é dito laplaciano integral quando todos os seus autovalores laplacianos são números inteiros. Na literatura, grafos assim são encontrados a partir de grafos que apresentam determinadas características, como podemos ver em FREITAS *et al.* [9], GRONE *et al.* [10] e MERRIS [17].

Dentre os grafos laplacianos integrais, podemos citar K_n , $n \in \mathbb{N}$ e $K_{p,q}$, $p, q \in \mathbb{N}$.

Observemos que para $G_1 = K_{2,3}$, temos $a(G_1) = 2 = \kappa(G_1)$, mas para $G_2 = C_6$, temos $a(G_2) = 1 < 2 = \kappa(G_2)$, o que mostra que nem todo grafo laplaciano integral G satisfaz $a(G) = \kappa(G)$. Vamos, então, investigar o que ocorre em algumas classes especiais de grafos laplacianos integrais.

4.1.1 Grafos *threshold*

Nesta seção, examinamos os grafos *threshold*, que, como veremos a seguir, são laplacianos integrais. Mais adiante, apresentamos proposições acerca dos grafos *threshold*, onde uma delas se refere à igualdade entre as conectividades algébrica e de vértices destes grafos.

Os grafos *threshold* foram descobertos de forma independente por estudiosos de diferentes áreas como Teoria dos Grafos, Psicologia, Ciência da Computação, Alocação de Recursos, entre outras, e são utilizados em diferentes aplicações (MAHADEV, PELED, [16]).

Os grafos *threshold* podem ser definidos (MAHADEV, PELED, [16]) através de um procedimento recursivo que utiliza qualquer um dos passos abaixo, em qualquer ordem e em uma quantidade arbitrária de vezes:

- Adicione um vértice isolado (K_1);
- Adicione um vértice dominante em relação aos demais vértices inseridos anteriormente a ele (chamaremos estes vértices de vértices dominantes por etapa).

A Figura 4.1 ilustra um grafo *threshold* obtido através do procedimento descrito.

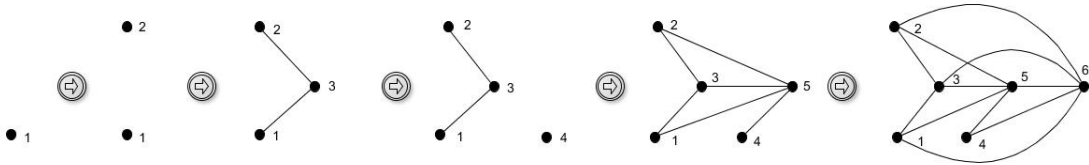


Figura 4.1: Grafo *threshold*

A partir da definição acima, para decidirmos se um dado grafo G conexo é *threshold*, basta utilizarmos o procedimento recursivo (MAHADEV, PELED, [16]) descrito abaixo:

Sendo G conexo então, para que seja *threshold*, é necessário que possua pelo menos um vértice dominante. Ao retirarmos um vértice dominante, G deve resultar em uma única componente H com $|V(H)| \geq 2$ e possivelmente alguns vértices isolados. Além disso, G é um grafo *threshold* se, e somente se, H é um grafo *threshold*. Daí, basta verificarmos se H é *threshold*.

Uma forma de representar um grafo *threshold*, com n vértices, baseada no procedimento recursivo utilizado para a sua construção, é considerar uma sequência de dimensão n , cujas entradas são iguais a 0, caso o vértice inserido for isolado, ou 1, caso o vértice inserido for um vértice dominante por etapa, sendo a primeira entrada igual a 1.

Por exemplo, a representação binária do grafo *threshold* da Figura 4.1. é

101011.

MERRIS [18] caracteriza os grafos *threshold* como grafos que não contêm subgrafos induzidos isomorfos a um dos três grafos proibidos: $2K_2 = K_2 \cup K_2$, C_4 ou P_4 .

A seguir, apresentamos uma definição e um lema (MAHADEV, PELED, [16]) que são necessários para a caracterização dos autovalores laplacianos dos grafos *threshold*.

Sejam a_1, \dots, a_n números inteiros não negativos. Definimos $a_j^* = |\{a_i : a_i \geq j\}|$, $j = 1, 2, \dots$

Dizemos que a sequência a_1^*, a_2^*, \dots é a sequência conjugada da sequência a_1, a_2, \dots, a_n . Por exemplo, 7, 5, 5, 3, 1, 1 é a sequência conjugada de 6, 4, 4, 3, 3, 1, 1. Observemos que a quantidade de termos diferentes de 0, na sequência conjugada, é finita, pois, pela definição, $a_j^* = 0, \forall j > \max\{a_i, i = 1, \dots, n\}$.

Escrevendo os a_i 's em ordem não crescente, ou seja, $a_1 \geq \dots \geq a_n$, definimos o Diagrama de Ferrer correspondente a a_1, \dots, a_n , que é formado por n linhas de blocos, onde a i -ésima linha consiste de a_i blocos, $i = 1, \dots, n$. Se $a_i = 0$, a i -ésima linha não é representada. Por exemplo, o diagrama de Ferrer correspondente à sequência de graus 5, 5, 4, 3, 3, 2 do grafo da Figura 4.1 é ilustrado pela Figura 4.2.

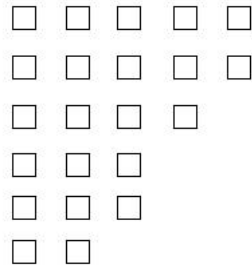


Figura 4.2: Diagrama de Ferrer

Observemos que a_i^* corresponde à quantidade de blocos na i -ésima coluna do diagrama de Ferrer, $i = 1, \dots, n$. Consequentemente, temos que se a_1^*, a_2^*, \dots é a sequência conjugada de a_1, a_2, \dots, a_n então $\sum a_i = \sum a_j^*$.

O próximo teorema exhibe os autovalores laplacianos de um grafo *threshold* G , mostrando que ele é laplaciano integral e, para provar este fato, é utilizado o Lema 4.1 a seguir.

Lema 4.1 (MAHADEV, PELED, [16]): *Seja G um grafo com $V(G) = \{1, \dots, n\}$. Seja $d_1 \geq \dots \geq d_n$ a sequência de graus de G e suponha $d_1 = n - 1$. Sejam $H = G - 1$ e $L(G)$ e $L(H)$ as matrizes laplacianas de G e H , respectivamente. Então n é um autovalor de $L(G)$. Além disso, se μ_2, \dots, μ_{n-1} , n e 0 são os autovalores de $L(G)$, então os autovalores de $L(H)$ são $\mu_2 - 1, \dots, \mu_{n-1} - 1$ e 0 .*

Prova: Como $\frac{n}{n-1} \Delta(G) \leq \mu_1(G) \leq n$ (ABREU et al., [2]), segue que $\mu_1(G) = n$.

Além disso, observemos que

$$L(G) = \begin{pmatrix} n-1 & -\mathbf{1}_{n-1}^T \\ -\mathbf{1}_{n-1} & L(H) + \mathbb{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$L(G) + \mathbb{J}_n = \begin{pmatrix} n & \mathbf{0}_{n-1}^T \\ \mathbf{0}_{n-1} & L(H) + \mathbb{J}_{n-1} + \mathbb{I}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Temos, então, que os autovalores de $L(G) + \mathbb{J}_n$ são μ_2, \dots, μ_{n-1} e n com multiplicidade 2.

De fato, se $\mu_i \neq 0$ é autovalor de $L(G)$ com autovetor associado v_i , com $v_i \perp \mathbf{1}$, $i = 1, \dots, n-1$, então $L(G)v_i = \mu_i v_i$ e $\mathbb{J}_n v_i = 0v_i$. Logo,

$$(L(G) + \mathbb{J}_n)v_i = \mu_i v_i.$$

Além disso,

$$(L(G) + \mathbb{J}_n)\mathbf{1} = L(G)\mathbf{1} + \mathbb{J}_n\mathbf{1} = n\mathbf{1}.$$

Portanto, os autovalores de $L(H) + \mathbb{J}_{n-1} + \mathbb{I}_{n-1}$ são μ_2, \dots, μ_{n-1} e n . Consequentemente, os autovalores de $L(H) + \mathbb{J}_{n-1}$ são $\mu_2 - 1, \dots, \mu_{n-1} - 1$ e $n-1$. Segue, então, que os autovalores de $L(H)$ são $\mu_2 - 1, \dots, \mu_{n-1} - 1$ e 0. □

Observemos que se d_1, \dots, d_n e $d_1^*, d_2^*, \dots, d_n^*$ são a sequência de graus de um grafo e a sua conjugada, então $0 \leq d_1, \dots, d_n \leq n-1$ e $0 \leq d_1^*, d_2^*, \dots, d_n^* \leq n$. No teorema a seguir, vemos que se d_1, \dots, d_n é a sequência de graus de um grafo *threshold*, então $d_1^*, d_2^*, \dots, d_n^*$ são os autovalores do laplaciano deste grafo. Notemos que, neste caso, a sequência de graus e a sua conjugada possuem a mesma quantidade n de termos, correspondente ao número de vértices do grafo. Os termos iguais a zero são escritos nas duas sequências, uma vez que representam, eventualmente, o grau de um vértice e um autovalor do laplaciano do grafo, respectivamente.

Teorema 4.1 (MAHADEV, PELED, [16]): *Sejam G um grafo threshold com $V(G) = \{1, \dots, n\}$, $L(G)$ sua matriz laplaciana e d_1, \dots, d_n a sequência de graus de G . Então d_1^*, \dots, d_n^* são os autovalores de $L(G)$.*

Prova: Provaremos este teorema por indução sobre o número n de vértices do grafo G . Para $n = 1$, $G = K_1$ e o resultado segue trivialmente. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para grafos *threshold* com, no máximo, $n-1$ vértices e consideremos um grafo *threshold* G com n vértices. Como um vértice isolado contribui com um 0 para a sequência de graus e para os autovalores laplacianos, assumiremos G conexo. Por definição, G possui, pelo menos, um vértice dominante, que rotularemos como 1. Sejam $H = G - 1$, $L(H)$ a sua matriz laplaciana e

μ_1, \dots, μ_{n-1} e $\mu_n = 0$ os autovalores de $L(G)$. Pelo Lema 4.1, n é autovalor de $L(G)$ e os autovalores de $L(H)$ são $\mu_2 - 1, \dots, \mu_{n-1} - 1$ e 0 . Como k vértices isolados inseridos em um grafo acrescentam k zeros tanto na sequência de graus quanto nos autovalores laplacianos deste grafo, então, se os autovalores laplacianos de um grafo são obtidos a partir da sequência conjugada da sua sequência de graus, isto ainda ocorrerá se inserirmos alguns vértices isolados neste grafo. Se H é um grafo vazio, o resultado segue trivialmente e se H é um grafo *threshold* composto por uma única componente com, no mínimo, dois vértices e, possivelmente, por alguns vértices isolados, pela hipótese de indução temos que $\mu_2 - 1, \dots, \mu_{n-1} - 1, 0$ é a sequência conjugada da sequência de graus de H , que é $d_2 - 1, \dots, d_n - 1$. Como $\mu_1 = n$ e $d_1 = n - 1$, temos que $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, 0$ é a sequência conjugada da sequência de graus de G dada por d_1, \dots, d_n . □

Além da condição necessária dada pelo Teorema 4.1., o teorema abaixo também apresenta a condição suficiente:

Teorema 4.2 (MAHADEV, PELED, [16]): *Sejam G um grafo conexo com $V(G) = \{1, \dots, n\}$, $L(G)$ sua matriz laplaciana e d_1, \dots, d_n a sequência de graus de G . Se d_1^*, \dots, d_n^* são os autovalores de $L(G)$ então G é um grafo *threshold*.*

Com o objetivo de verificar a relação entre a conectividade algébrica e a de vértices para os grafos *threshold* conexos, apresentamos a seguir nosso primeiro resultado que prova que, para estes grafos, a conectividade de vértices e o grau mínimo coincidem.

Proposição 4.1: *Se G é um grafo *threshold* conexo com n vértices então*

$$\kappa(G) = \delta(G).$$

Prova: Provaremos esta proposição utilizando a representação binária do grafo *threshold*.

Se $G = K_n$ então a sua representação binária é dada por n entradas iguais a 1: 1...1. Observemos que, se retirarmos os últimos $n - 1$ vértices inseridos (que correspondem às últimas entradas iguais a 1), G se reduz a um único vértice. Logo, $\kappa(G) = n - 1 = \delta(G)$.

Se $G \neq K_n$ então G possui, pelo menos, um vértice inserido isoladamente após a primeira etapa da construção de G . Logo, a sua representação binária é 1...0...1 (observe que a última entrada deve ser igual a 1 para que G seja conexo). Se retirarmos todos os vértices inseridos após o último vértice inserido isoladamente (que correspondem às entradas após o último 0 da sequência, o qual representa o último vértice inserido isoladamente), estaremos retirando todos os vértices dominantes de

G e desconectando G . Logo, $\kappa(G)$ é igual à quantidade de vértices dominantes de G . Por outro lado, $\delta(G)$ também é igual à quantidade de vértices dominantes de G , pois qualquer outro vértice que tenha sido inserido isoladamente antes do último, apresenta seu grau maior ou igual ao deste, uma vez que pode ser adjacente a algum vértice dominante por etapa. Portanto, $\kappa(G) = \delta(G)$. □

Provaremos, agora, que grafos *threshold* conexos e não-completos apresentam as conectividades de vértices e algébrica iguais.

Proposição 4.2: *Se G é um grafo threshold conexo com n vértices, não-completo, então*

$$\kappa(G) = a(G).$$

Prova: Seja G um grafo *threshold* conexo não-completo. Então G pode ser escrito como $G_1 \vee G_2$, onde G_2 é induzido pelos vértices dominantes em G e G_1 , pelos demais vértices, e $\kappa(G) = |V(G_2)|$ (como pode ser observado na prova do resultado anterior). Logo, G_1 possui $n - \kappa(G)$ vértices e é desconexo. De fato, como G não é completo, a sua representação binária é da forma $1\dots 0\dots 1$. Como G_1 é induzido pelos vértices que foram inseridos isoladamente ou dominantes por etapa, segue que os vértices que induzem G_1 correspondem às primeiras entradas da sequência até o último 0, garantindo a desconexidade de G_1 .

Em relação a G_2 , vimos que $\kappa(G) = |V(G_2)|$. Além disso, como G_2 é completo, temos que $a(G_2) = |V(G_2)| < n$, pois G não é completo. Daí,

$$a(G_2) < n \Rightarrow a(G_2) > 2a(G_2) - n \Rightarrow a(G_2) > 2\kappa(G) - n \Rightarrow a(G_2) \geq 2\kappa(G) - n,$$

pois $a(G_2) = |V(G_2)| = \kappa(G)$. Logo, pelo Teorema 3.2, segue que $\kappa(G) = a(G)$. □

Corolário 4.1: *Se G é um grafo threshold, não-completo, então*

$$a(G) = \delta(G).$$

Prova: Segue imediatamente das Proposições 4.1 e 4.2.

4.1.2 Cografos

Nesta seção, buscamos reunir alguns conceitos e resultados encontrados na literatura a respeito dos cografos e, em seguida, estabelecemos a proposição citada anteriormente.

Os cografos aparecem na literatura citados por diversos autores desde 1970. Entre as definições encontradas, destacamos SUMNER [21], que se refere aos cografos como *Hereditary Dacey Graphs* ou *HD-graph*, caracterizando um grafo G como um

HD-graph se, e somente se, não contiver um caminho de comprimento 3 como subgrafo induzido, ou seja, se não contiver P_4 como subgrafo induzido.

JUNG [14] menciona cografo como *D-graph* ou *D*-graph* e o define da seguinte forma: Um grafo G é um *D-graph* (*D* - graph*) se, para cada caminho em G com arestas $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}$, o grafo G também contém a aresta $\{v_1, v_3\}$ ou $\{v_2, v_4\}$ ou $\{v_1, v_4\}$.

CORNEIL *et al.* [5] se referem aos cografos ou *complement reducible graphs* como a família dos grafos que podem ser reduzidos a vértices isolados através da operação da complementação realizada de forma recursiva sobre todos os seus subgrafos conexos, como segue:

Definição 4.1 (CORNEIL *et al.*, [5]): Um cografo é definido recursivamente da seguinte forma:

- O grafo K_1 é um cografo;
- Se G_1, \dots, G_k são cografos então a união $G_1 \cup \dots \cup G_k$ também é um cografo;
- Se G é um cografo então o seu complementar \overline{G} também é um cografo.

Com base na definição acima, podemos observar que todo cografo conexo é um *join* de cografos. Portanto, os cografos são obtidos a partir do grafo K_1 através de um número finito de operações de união e de *join* de cografos.

A Figura 4.3 representa o cografo $K_2 \vee C_3$.

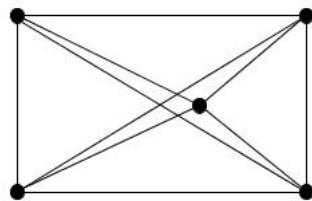


Figura 4.3: *Join* de K_2 com C_3

Os cografos são representados (CORNEIL *et al.*, [5]), de forma única, por uma árvore denominada co-árvore ou *cotree*, na qual as operações de união e de *join* realizadas na construção do cografo estão evidenciadas e cujas folhas representam os vértices do cografo.

A co-árvore pode ser descrita da seguinte forma (CORNEIL *et al.*, [5]):

- A raiz e os vértices internos (ou nós internos) da co-árvore representam as operações de união e de *join*, que são rotuladas por 0 e 1, respectivamente. Observemos que a raiz da co-árvore de um cografo conexo é rotulada por 1;

- As folhas da co-árvore representam os vértices do cografo;
- Cada vértice interno w dá origem a um subgrafo do cografo induzido pelas folhas do ramo determinado por w . Representaremos por G_w o subgrafo do cografo G induzido pelas folhas do ramo determinado por w ;
- Cada vértice interno possui, no mínimo, dois vértices filhos (ou nós filhos), onde, no máximo, dois são vértices internos;
- Todos os vértices internos presentes em cada caminho na co-árvore, da raiz até as folhas, se alternam entre 0 e 1, ou seja, os vértices filhos de um vértice interno, rotulado por 1, são rotulados por 0 e, os vértices filhos de um vértice interno, rotulado por 0, são rotulados por 1;
- Dois vértices v_1 e v_2 do cografo são adjacentes se, e somente se, o ancestral mais próximo comum aos dois vértices, na co-árvore, for rotulado por 1.

Nas Figuras 4.4 e 4.5, estão representados cografos com as suas respectivas co-árvores e os subgrafos gerados pelos nós internos.

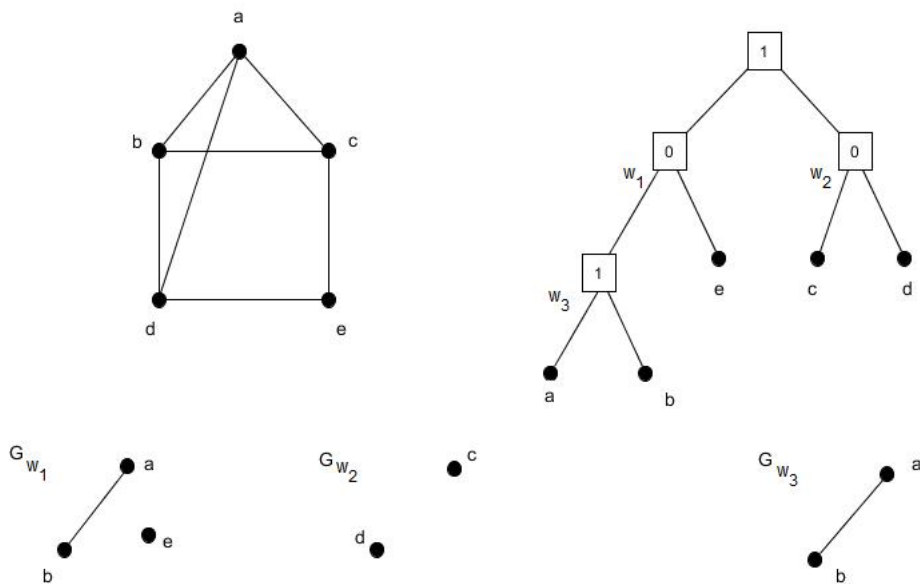


Figura 4.4: Cografo sem vértice dominante e sua co-árvore

Existem algoritmos que reconhecem um cografo e constroem a sua respectiva co-árvore. Em BRETSCHER *et al.* [4], podemos encontrar um algoritmo que recebe um grafo G como entrada e, se G for um cografo, gera como saída a sua co-árvore. Caso G não seja um cografo, o algoritmo fornece um subgrafo induzido de G isomorfo a P_4 .

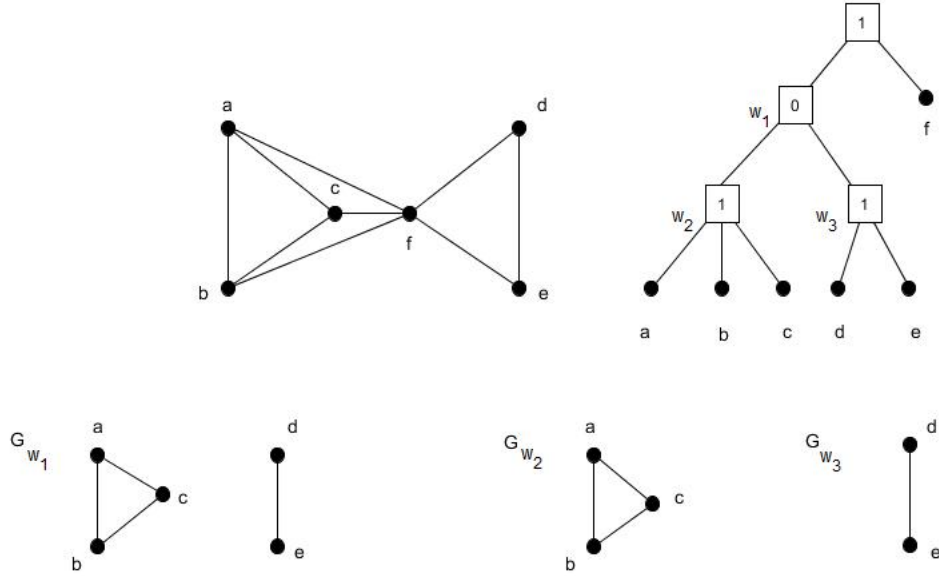


Figura 4.5: Cografo com vértice dominante e sua co-árvore

A seguir, apresentamos algumas caracterizações de cografos.

Teorema 4.3 (CORNEIL *et al.*, [5]): *Todo subgrafo induzido de um cografo é um cografo.*

Prova: Sejam $G(V, E)$ um cografo com n vértices e T a sua co-árvore. Se $n < 3$ então o teorema está provado. De fato, se $n = 1$ então $G = K_1$ é o único subgrafo induzido de G , o qual é um cografo, por definição. Se $n = 2$ então os únicos subgrafos induzidos de G são o K_1 e G , que são cografos.

Suponhamos, então, que $n \geq 3$. Como qualquer subgrafo induzido de um grafo pode ser obtido pela remoção dos vértices um a um, basta provarmos que a remoção de um único vértice de um cografo resulta em um cografo. Sejam $v_1 \in V(G)$ e $G' = G - v_1$. Temos que G' é um cografo se, e somente se, existir uma co-árvore T' associada a ele.

Para construirmos T' , consideremos o vértice interno w tal que v_1 é seu vértice filho em T e analisemos os dois casos a seguir ilustrados pelas Figuras 4.6 e 4.7:

- Se w possui mais de 2 vértices filhos, a co-árvore T' é obtida pela remoção da folha v_1 em T ;
- Se w possui exatamente dois vértices filhos, v_1 e v_2 , então:
 - Se v_2 é uma folha, a co-árvore T' é obtida pela remoção de w e v_1 de T e pela ligação de v_2 ao vértice pai de w ;
 - Se v_2 não é uma folha, a co-árvore T' é obtida pela remoção de w , v_1 e v_2 de T e pela ligação de todos os vértices filhos de v_2 ao vértice pai de w . □

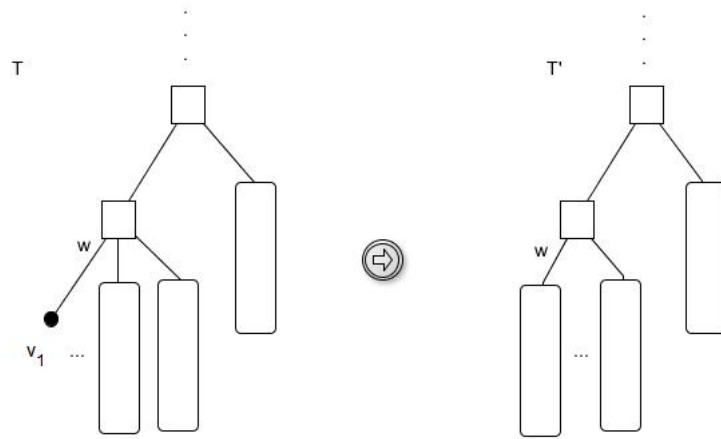


Figura 4.6: Construção da co-árvore T' a partir da co-árvore T .

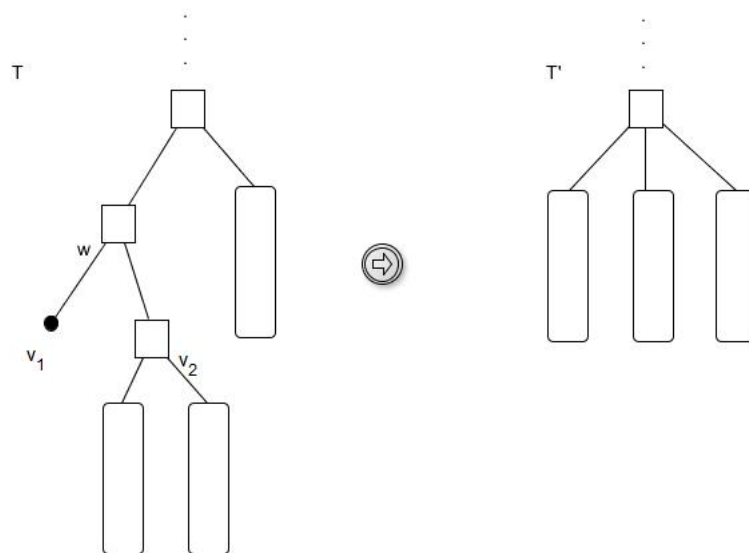
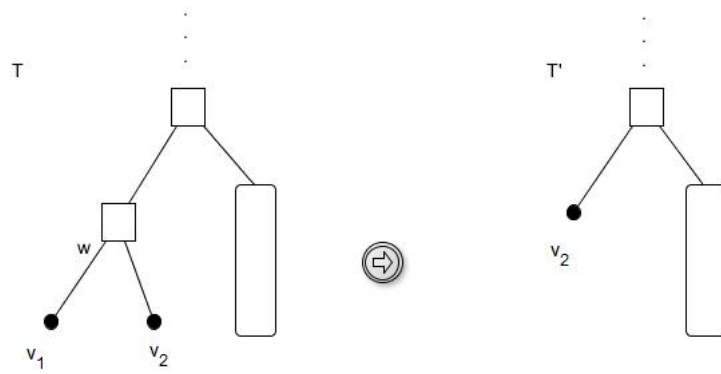


Figura 4.7: Construção da co-árvore T' a partir da co-árvore T .

Teorema 4.4 (SEINSCHKE, [20]): *Dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. G não contém um P_4 como subgrafo induzido;
2. O complementar de qualquer subgrafo induzido conexo não trivial de G é desconexo.

Prova: (2) \Rightarrow (1): Suponhamos, por absurdo, que G contenha um subgrafo induzido conexo isomorfo a P_4 . Como o grafo complementar de P_4 é isomorfo a P_4 que, por sua vez, é conexo, temos uma contradição.

(1) \Rightarrow (2): Suponhamos, por contradição, que existe $V' \subset V$ induzindo um subgrafo conexo não trivial C de G cujo complementar \overline{C} também é conexo. Consideremos também que V' possui tal propriedade com o menor número possível de vértices. Se $v_1 \in V'$ então $V' - \{v_1\}$ induz um subgrafo não trivial de G que é desconexo ou cujo complementar é desconexo. Se necessário, basta trocarmos os papéis de G e de \overline{G} de forma que $V' - \{v_1\}$ induza um subgrafo não trivial de G que é desconexo.

Como \overline{C} é conexo, existe um vértice $v_2 \in V' - \{v_1\}$ adjacente a v_1 em \overline{C} . Como $V' - \{v_1\}$ induz um subgrafo não trivial de G que é desconexo, consideremos V'' o conjunto de vértices que induz a componente, deste subgrafo, que contém v_2 . Observemos que V'' e $(V' - \{v_1\}) - V''$ são conjuntos não-vazios e que não existe relação de adjacência entre qualquer vértice de V'' e qualquer vértice de $(V' - \{v_1\}) - V''$.

Como C é conexo, existem vértices $v_3 \in V''$ e $v_4 \in (V' - \{v_1\}) - V''$ que são adjacentes a v_1 em C . Sejam S' e S'' uma partição de V'' de forma que S' contenha todos os vértices de V'' adjacentes a v_1 em \overline{C} e S'' contenha todos os vértices de V'' adjacentes a v_1 em C .

S' e S'' são conjuntos não-vazios, uma vez que $v_2 \in S'$ e $v_3 \in S''$. Além disso, como S' e S'' são subconjuntos complementares do conjunto de vértices de uma componente de um subgrafo induzido de G , existem $v'_2 \in S'$ e $v'_3 \in S''$ que são adjacentes em G . Desta forma, $\{v'_2, v'_3\}$, $\{v'_3, v_1\}$ e $\{v_1, v_4\}$ são arestas de G e $\{v_1, v'_2\}$, $\{v'_2, v_4\}$ e $\{v_4, v'_3\}$ são arestas de \overline{G} , ou seja, G e \overline{G} contêm P_4 como subgrafo induzido. \square

O teorema abaixo dá uma caracterização dos cografos em termos de subgrafo proibido.

Teorema 4.5 (CORNEIL *et al.*, [5]): *Dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. G é um cografo;

2. G não contém um P_4 como subgrafo induzido.

Prova: (1) \Rightarrow (2): Sejam G um cografo e H um subgrafo induzido conexo não trivial de G . Como H é subgrafo induzido de um cografo, o Teorema 4.3 garante que H também é um cografo. Como H é cografo conexo, temos que H é um *join*. Logo, \overline{H} é desconexo. Segue, do Teorema 4.4, que G não contém um P_4 como subgrafo induzido.

(2) \Rightarrow (1): Suponhamos que G não contém um P_4 como subgrafo induzido e que, por hipótese de indução, a afirmação seja verdadeira para $n < p$. Como o complementar de um cografo também é um cografo, podemos verificar se G ou \overline{G} é um cografo. Pela propriedade 2 do Teorema 4.4, temos que se G é conexo então \overline{G} é desconexo.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que \overline{G} é desconexo. Por hipótese de indução, cada uma de suas componentes é um cografo. Segue que \overline{G} é um cografo obtido a partir de uniões de grafos. Logo, G é um cografo. □

Como consequência do Teorema 4.5, segue que todo grafo *threshold* é cografo. Porém, a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, o grafo C_4 ilustrado na Figura 4.8 é cografo, mas não é *threshold*.

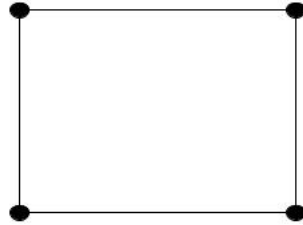


Figura 4.8: Cografo não - *threshold*

O fato dos grafos serem grafos laplacianos integrais (MERRIS, [18]), isto é, o fato do espectro laplaciano destes grafos ser formado apenas por números inteiros, motivou a busca pelo resultado obtido na Proposição 4.4 adiante. No entanto, para provarmos tal resultado, precisamos encontrar a conectividade algébrica de um *join* de grafos desconexos, exibida na Proposição 4.3.

Proposição 4.3: *Se G_1, \dots, G_m são grafos desconexos e $|V(G_1)| \geq |V(G_2)| \geq \dots \geq |V(G_m)|$, então*

$$a\left(\bigvee_{i=1, \dots, m} G_i\right) = \sum_{i=2}^m |V(G_i)|, \forall i = 1, \dots, m.$$

Prova:

$$\begin{aligned}
\text{Se } m = 2 \text{ então } a\left(\bigvee_{i=1,2} G_i\right) &= a(G_1 \vee G_2) = \min\{a(G_1) + |V(G_2)|, a(G_2) + |V(G_1)|\} \\
&= \min\{0 + |V(G_2)|, 0 + |V(G_1)|\} = \min\{|V(G_2)|, |V(G_1)|\} \\
&= |V(G_2)| = \sum_{i=2}^2 |V(G_i)|,
\end{aligned}$$

pois G_1 e G_2 são desconexos e $|V(G_1)| \geq |V(G_2)|$, por hipótese.

Suponhamos, agora, que a afirmação seja verdadeira para algum inteiro $k \geq 2$, ou seja,

$$a\left(\bigvee_{i=1, \dots, k} G_i\right) = \sum_{i=2}^k |V(G_i)|.$$

Se $m = k + 1$, consideremos $G' = G_1 \vee \dots \vee G_k$. Temos que

$$\begin{aligned}
a\left(\bigvee_{i=1, \dots, k+1} G_i\right) &= a(G_1 \vee G_2 \vee \dots \vee G_k \vee G_{k+1}) \\
&= a(G' \vee G_{k+1}) = \min\{a(G') + |V(G_{k+1})|, a(G_{k+1}) + \sum_{i=1}^k |V(G_i)|\} \\
&= \min\{a(G') + |V(G_{k+1})|, \sum_{i=1}^k |V(G_i)|\},
\end{aligned}$$

pois G_{k+1} é desconexo. Por hipótese de indução, $a(G') = \sum_{i=2}^k |V(G_i)|$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
a\left(\bigvee_{i=1, \dots, k+1} G_i\right) &= \min\left\{\sum_{i=2}^k |V(G_i)| + |V(G_{k+1})|, \sum_{i=1}^k |V(G_i)|\right\} \\
&= \min\left\{\sum_{i=2}^{k+1} |V(G_i)|, \sum_{i=1}^k |V(G_i)|\right\} = \sum_{i=2}^{k+1} |V(G_i)|,
\end{aligned}$$

pois $|V(G_1)| \geq |V(G_{k+1})|$. □

Na Seção 4.1.1., provamos que as conectividades algébrica e de vértices de grafos *threshold* conexos são iguais, utilizando a representação binária destes grafos. Na proposição a seguir, generalizamos este resultado para todos os cografos, utilizando uma prova baseada nas co-árvores.

Proposição 4.4: *Seja G um cografo conexo, não completo, com n vértices. Então*

$$a(G) = \kappa(G).$$

Prova: Seja G um cografo conexo, não completo, com n vértices. Observemos inicialmente que a coárvore de G pode assumir apenas um dos 2 aspectos ilustrados

na Figura 4.9.

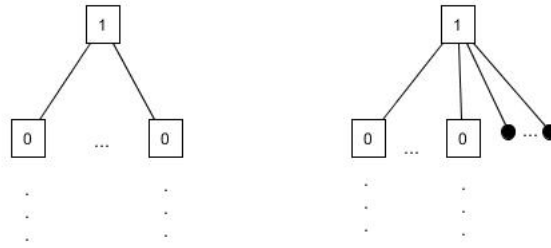


Figura 4.9: Co-árvores de cografos sem vértice dominante e com vértice dominante

Analisemos cada uma das 2 possibilidades:

1º caso) G não possui vértice dominante (co-árvore ilustrada na Figura 4.10):

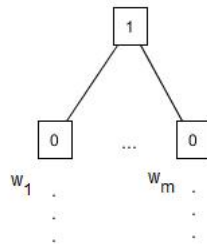


Figura 4.10: Co-árvore de cografo sem vértice dominante

Sem perda de generalidade, consideremos

$$|V(G_{w_1})| \geq |V(G_{w_2})| \geq \dots \geq |V(G_{w_m})|.$$

Temos que $G = G_1 \vee G_2$, onde $G_1 = G_{w_1}$ e $G_2 = \bigvee_{i=2, \dots, m} G_{w_i}$. Então, G_{w_1} é desconexo e $|V(G_2)| = \sum_{i=2}^m |V(G_{w_i})| = \kappa(G)$, pois, para desconectar G retirando a menor quantidade de vértices, precisamos retirar todos os vértices dos $m - 1$ G_{w_i} s que apresentam a menor ordem. Consequentemente, $|V(G_1)| = n - \kappa(G)$.

Como $G_2 = \bigvee_{i=2, \dots, m} G_{w_i}$ segue, da Proposição 4.3, que

$$a(G_2) = a\left(\bigvee_{i=2, \dots, m} G_{w_i}\right) = \sum_{i=3}^m |V(G_{w_i})|.$$

Por outro lado,

$$n = |V(G_{w_1})| + \sum_{i=2}^m |V(G_{w_i})|$$

e

$$|V(G_{w_1})| \geq |V(G_{w_i})|, \forall i = 2, \dots, m.$$

Então

$$\begin{aligned}
 n &\geq |V(G_{w_2})| + \sum_{i=2}^m |V(G_{w_i})| \Rightarrow n + \sum_{i=3}^m |V(G_{w_i})| \geq 2 \sum_{i=2}^m |V(G_{w_i})| \\
 &\Rightarrow \sum_{i=3}^m |V(G_{w_i})| \geq 2 \sum_{i=2}^m |V(G_{w_i})| - n.
 \end{aligned}$$

Logo, $a(G_2) \geq 2\kappa(G) - n$.

Pelo Teorema 3.2, temos que $a(G) = \kappa(G)$.

2º caso) G possui algum vértice dominante (co-árvore ilustrada na Figura 4.11):

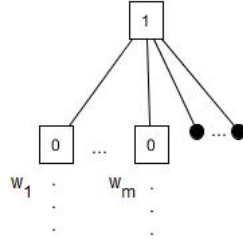


Figura 4.11: Co-árvore de cografo com vértice dominante

Suponhamos que G possui exatamente q vértices dominantes. Sejam G_v o subgrafo induzido pelos vértices dominantes de G , $q = |V(G_v)|$ e G_{w_i} os subgrafos de G induzidos pelas folhas do ramo determinado por $w_i, \forall i = 1, \dots, m$.

Sem perda de generalidade, consideremos

$$|V(G_{w_1})| \geq |V(G_{w_2})| \geq \dots \geq |V(G_{w_m})|.$$

Daí, $G = G_1 \vee G_2$, onde $G_1 = G_{w_1}$ e $G_2 = G_v \vee (\bigvee_{i=2, \dots, m} G_{w_i})$.

Como $\kappa(G) > q$, G_{w_1} é desconexo e $|V(G_{w_1})| = \max\{|V(G_{w_i})|, i = 1, \dots, m\}$ então

$$\kappa(G) = q + \sum_{i=2}^m |V(G_{w_i})|.$$

Desta forma, temos G_1 desconexo, $|V(G_2)| = \kappa(G)$ e, conseqüentemente, $|V(G_1)| = n - \kappa(G)$.

Como $G_2 = G_v \vee (\bigvee_{i=2, \dots, m} G_{w_i})$, temos que

$$\begin{aligned}
 a(G_2) &= \min\{a(G_v) + |V(\bigvee_{i=2, \dots, m} G_{w_i})|, a(\bigvee_{i=2, \dots, m} G_{w_i}) + |V(G_v)|\} \\
 &= \min\{q + \sum_{i=2}^m |V(G_{w_i})|, a(\bigvee_{i=2, \dots, m} G_{w_i}) + q\},
 \end{aligned}$$

pois G_v é completo e $|V(G_v)| = q$.

Como $a(\bigvee_{i=2, \dots, m} G_{w_i}) \leq \sum_{i=2}^m |V(G_{w_i})|$ e $q \geq 1$, então

$$a(G_2) = a(G_v \vee (\bigvee_{i=2, \dots, m} G_{w_i})) = a(\bigvee_{i=2, \dots, m} G_{w_i}) + q.$$

Segue que

$$a(G_2) = a(\bigvee_{i=2, \dots, m} G_{w_i}) + q = \sum_{i=3}^m |V(G_{w_i})| + q,$$

pela Proposição 4.3.

Por outro lado,

$$n = |V(G_{w_1})| + \sum_{i=2}^m |V(G_{w_i})| + q$$

e

$$|V(G_{w_1})| \geq |V(G_{w_i})|, \forall i = 2, \dots, m.$$

Então

$$\begin{aligned} n &\geq |V(G_{w_2})| + \sum_{i=2}^m |V(G_{w_i})| + q \Rightarrow 0 \geq |V(G_{w_2})| + \sum_{i=2}^m |V(G_{w_i})| + q - n \\ &\Rightarrow \sum_{i=3}^m |V(G_{w_i})| + q \geq |V(G_{w_2})| + \sum_{i=2}^m |V(G_{w_i})| + \sum_{i=3}^m |V(G_{w_i})| + 2q - n \\ &\Rightarrow \sum_{i=3}^m |V(G_{w_i})| + q \geq 2 \sum_{i=2}^m |V(G_{w_i})| + 2q - n. \end{aligned}$$

Logo, $a(G_2) \geq 2\kappa(G) - n$.

Pelo Teorema 3.2, temos que $a(G) = \kappa(G)$.

□

Vimos, na Proposição 4.1, que todo grafo *threshold* conexo possui a conectividade de vértices e o grau mínimo iguais. No entanto, esta igualdade não é válida para todos os cografos conexos. De fato, a Figura 4.12 exibe um cografo conexo G tal que $\kappa(G) \neq \delta(G)$.

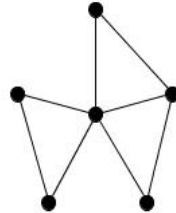


Figura 4.12: Cografo conexo com $\kappa(G) = 1 \neq 2 = \delta(G)$.

Por outro lado, ao pesquisarmos grafos conexos cujos grau mínimo, conectividade

de vértices e conectividade algébrica coincidem (READ, WILSON, [19]), percebemos que todo grafo conexo G com, no máximo, 5 vértices tal que $\kappa(G) = \delta(G) = a(G)$ é um cografo. Nas Figuras 4.13 e 4.14 a seguir, exibimos estes grafos, onde destacamos os grafos de Harary, que são grafos extremais em relação ao número mínimo de arestas de forma que $\kappa(G) = \kappa'(G) = \delta(G)$ (GROSS, YELLEN, [11]).

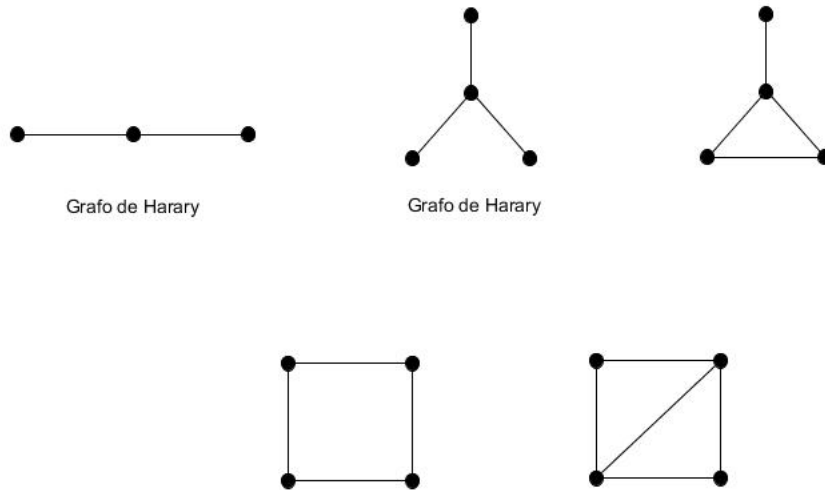


Figura 4.13: Cografos conexos G , com até 4 vértices, tais que $\kappa(G) = \delta(G) = a(G)$.

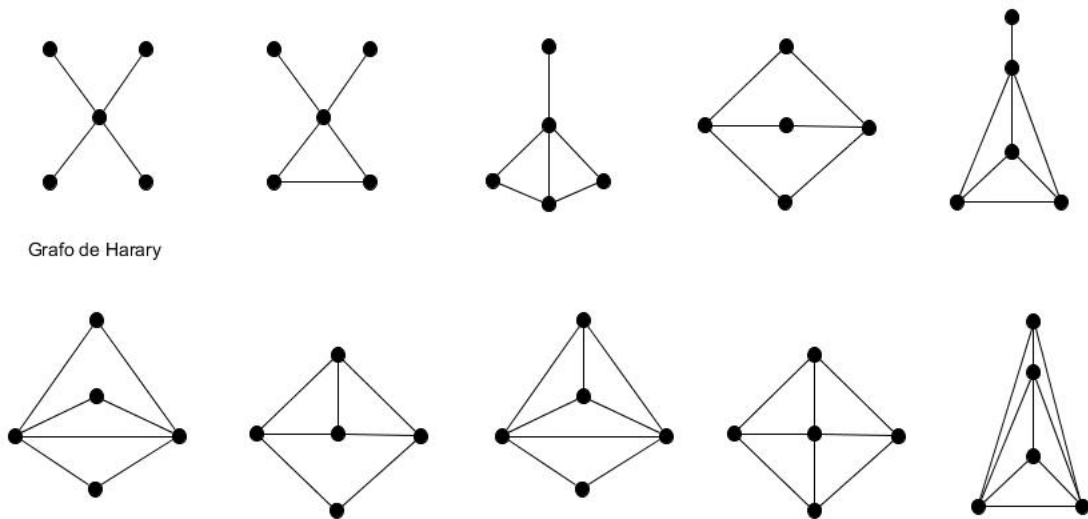


Figura 4.14: Cografos conexos G , com 5 vértices, tais que $\kappa(G) = \delta(G) = a(G)$.

Observamos que nem todo grafo de Harary, conexo, não completo e com até 5 vértices, apresenta $\kappa(G) = \delta(G) = a(G)$. De fato, a Figura 4.15 exibe tais grafos.

Ainda, os grafos ilustrados na Figura 4.15 não apresentam conectividade algébrica inteira.

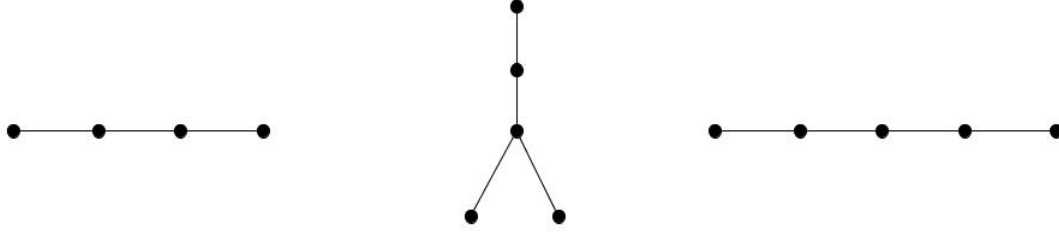


Figura 4.15: Grafos de Harary com $\kappa(G) = \delta(G) \neq a(G)$.

4.1.3 Uma família infinita de grafos laplacianos integrais satisfazendo $a(G) = \kappa(G) - 1$

Nas seções anteriores foram apresentadas duas classes de grafos laplacianos integrais satisfazendo $\kappa(G) = a(G)$. Já sabemos que nem todo grafo laplaciano integral satisfaz esta igualdade. Nesta seção, apresentamos uma família infinita de grafos laplacianos integrais satisfazendo $a(G) = \kappa(G) - 1$.

Proposição 4.5: *Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideremos o grafo $G_j = K_{1,j+2} \times K_2$. Então*

$$a(G_j) = \kappa(G_j) - 1, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Prova: Como $G_j = K_{1,j+2} \times K_2$, segue que $\text{spect}_L(G_j) = \text{spect}_L(K_{1,j+2} \times K_2)$, $j \in \mathbb{N}$. Vimos que os grafos $K_{p,q}$ e K_n são laplacianos integrais. Logo, pela Proposição 2.1, temos que o grafo G_j é laplaciano integral. Ainda pela Proposição 2.1,

$$a(G_j) = \min\{a(K_{1,j+2}), a(K_2)\} = \min\{1, 2\} = 1.$$

Portanto, os grafos $G_j, j \in \mathbb{N}$, formam uma família infinita de grafos laplacianos integrais cuja conectividade algébrica é igual a 1. Desta forma, temos

$$a(G_j) = 1 = \kappa(G_j) - 1, \forall j \in \mathbb{N}$$

(basta retirarmos os vértices v_1 e v_2 , exibidos nas Figuras 4.16 e 4.17, para desconectarmos os grafos G_j).

□

Na Figura 4.16, exibimos o grafo G_0 e, na Figura 4.17, destacamos o grafo G_1 e o grafo $G_j, j \in \mathbb{N}$.

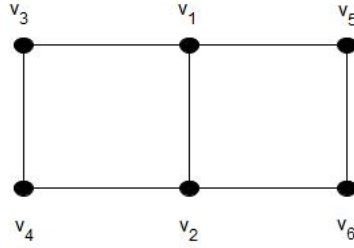


Figura 4.16: Grafo G_0

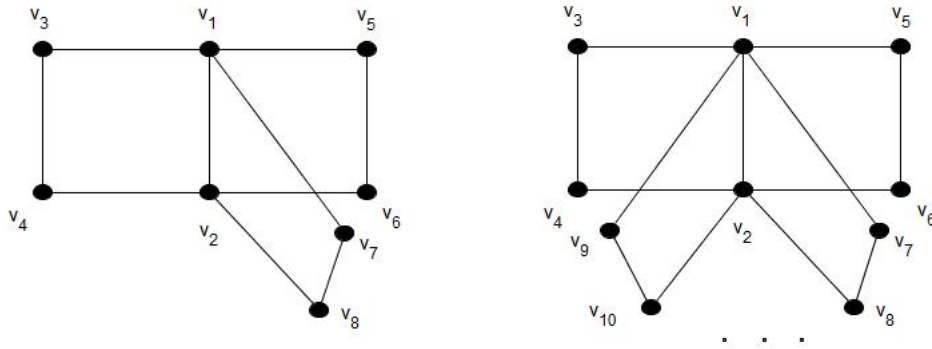


Figura 4.17: Grafo G_1 e grafo G_j

4.1.4 Uma família infinita de grafos laplacianos integrais satisfazendo $\kappa(G_j) - a(G_j) = j, \forall j \in \mathbb{N}$

Na seção anterior, apresentamos uma família infinita de grafos laplacianos integrais cujas conectividades de vértices e algébrica são distintas e esta diferença é constante e igual a 1. Este fato suscitou o questionamento de quão grande pode ser a diferença entre $\kappa(G)$ e $a(G)$ quando G é laplaciano integral

Nesta seção, exibimos uma família infinita de grafos laplacianos integrais, com a propriedade de que, quando percorremos grafo a grafo nesta família, temos que a diferença entre as conectividades de vértices e algébrica varia de uma unidade. Esta família é formada pelos grafos cubo m -dimensional, $m \geq 3$.

Observemos que o K_2 é o grafo cubo 1- dimensional e que cada grafo cubo m -dimensional é obtido a partir do produto cartesiano entre o grafo cubo $(m - 1)$ -dimensional e o $K_2, \forall m \geq 2$, ou seja, $C^{m+1} = C^m \times K_2, \forall m \geq 1$.

Proposição 4.6: *Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideremos $G_j = C^{j+2}$. Então G_j é laplaciano integral e*

$$\kappa(G_j) - a(G_j) = j, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Prova:

Como $spect_L(C^2) = spect_L(K_2 \times K_2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $spect_L(K_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$, temos, pela Proposição 2.1, que os grafos $G_j, j \geq 1$, são laplacianos integrais e a conectividade algébrica destes grafos é igual a 2, ou seja,

$$a(G_j) = 2, \forall j \in \mathbb{N}.$$

De fato, o espectro laplaciano do grafo C^3 é $spect_L(C^3) = spect_L(C^2 \times K_2) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Logo, C^3 é laplaciano integral e $a(C^3) = 2$.

Suponhamos que $spect_L(G_k) = (\mu_1 \ \cdots \ \mu_{2^{k+2}-2} \ 2 \ 0)$, onde $\mu_1, \dots, \mu_{2^{k+2}-2}$ são números inteiros, para algum $k \in \mathbb{N}$. Logo, os autovalores de $L(G_{k+1})$ são:

$$\mu_1 + 2, \dots, \mu_{2^{k+2}-2} + 2; 4; 2; \mu_1, \dots, \mu_{2^{k+2}-2}; 2; 0.$$

Segue, por indução, que G_{k+1} é laplaciano integral e $a(G_{k+1}) = 2$.

Provemos, agora, que $\kappa(G_j) = j + 2, \forall j \in \mathbb{N}$ e, conseqüentemente,

$$\kappa(G_j) - a(G_j) = j, \forall j \in \mathbb{N}.$$

De fato, $\kappa(G_1) = 3$, pois basta retirarmos os vértices $(2, a), (4, a)$ e $(1, b)$, conforme ilustrado na Figura 4.18, por exemplo, para desconectarmos G_1 .

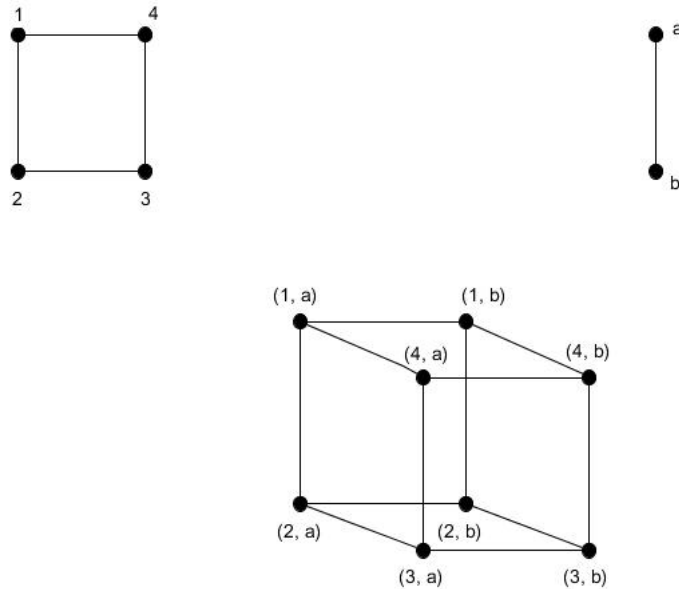


Figura 4.18: Grafos C^2, K_2 e $C^3 = C^2 \times K_2$

Suponhamos que $\kappa(G_i) = i + 2$, para algum $i \in \mathbb{N}$. Como $G_{i+1} = G_i \times K_2$, então o grafo G_{i+1} consiste em duas cópias do grafo G_i de forma que cada vértice de uma das cópias é adjacente a um único vértice da outra cópia injetivamente. Logo,

para desconectarmos G_{i+1} com a menor quantidade de vértices, devemos retirar os vértices que desconectam uma das cópias de G_i e o vértice da outra cópia adjacente ao vértice de grau 1 pertencente à cópia desconectada de G_i , ou seja, devemos retirar $\kappa(G_i) + 1$ vértices. Segue, da hipótese de indução, que $\kappa(G_{i+1}) = i + 3$.

4.2 Grafos não laplacianos integrais

Existem grafos que não são laplacianos integrais, mas apresentam alguns autovalores laplacianos inteiros, em particular, apresentam a conectividade algébrica inteira. Em busca de tais grafos, testamos todos os grafos conexos com até seis vértices e encontramos os grafos H_6 e G_6 , com o menor número de vértices, não laplacianos integrais, mas com conectividade algébrica inteira. Estes grafos são apresentados na Figura 4.19 a seguir.

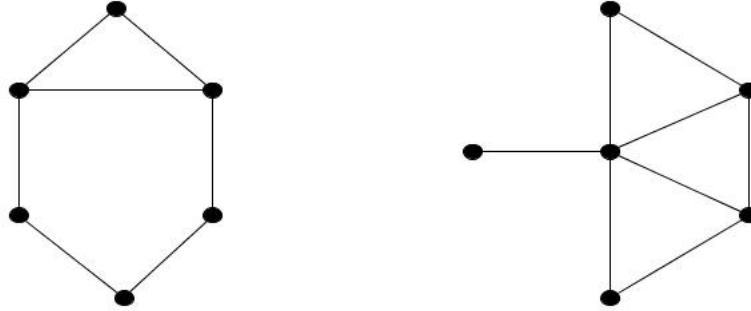


Figura 4.19: Grafos H_6 e G_6

A partir dos grafos H_6 e G_6 , podemos obter famílias infinitas de grafos não laplacianos integrais com conectividade algébrica inteira. No entanto, os grafos da família obtida a partir do grafo H_6 apresentam as suas conectividades algébricas e de vértices distintas. Por outro lado, a partir do grafo G_6 , a família obtida apresenta as suas conectividades algébrica e de vértices iguais. Estes fatos serão provados a seguir.

Proposição 4.7: *Seja H_6 o grafo exibido na Figura 4.19. Para $n \geq 7$, consideremos $H_n = K_{n-6} \vee H_6$. Então, para todo $n \geq 6$, H_n não é laplaciano integral, mas possui conectividade algébrica inteira. Além disso,*

$$\kappa(H_n) - a(H_n) = 1, \forall n \geq 6.$$

Prova: De fato, o espectro laplaciano do grafo H_6 é

$$\text{spect}_L(H_6) = \left(3 + \sqrt{2} \quad 4 \quad 3 \quad 3 - \sqrt{2} \quad 1 \quad 0 \right).$$

Logo, H_6 é um grafo não laplaciano integral com conectividade algébrica inteira igual a 1.

Segue, do Teorema 2.2, que os grafos $H_n = K_{n-6} \vee H_6$, $n \geq 7$, formam uma família infinita de grafos conexos não laplacianos integrais com conectividade algébrica inteira.

Provemos, agora, que a família dos grafos H_n , $n \geq 6$, possui as conectividades algébrica e de vértices distintas.

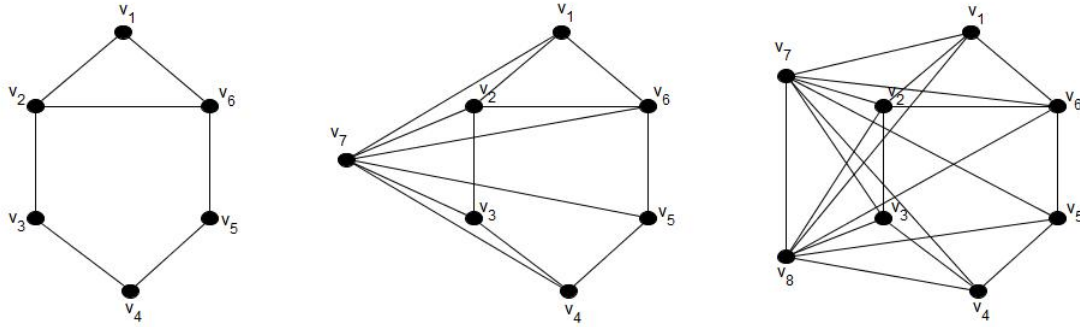


Figura 4.20: Grafos H_6 , H_7 e H_8

De fato,

$$\begin{aligned} a(H_n) &= a(K_{n-6} \vee H_6) = \min\{a(K_{n-6}) + |V(H_6)|, a(H_6) + |V(K_{n-6})|\} \\ &= \min\{n - 6 + 6, 1 + n - 6\} = n - 5, \end{aligned}$$

$\forall n \geq 7$.

Por outro lado, $\kappa(H_n) = \kappa(K_{n-6} \vee H_6) = n - 4$, pois para desconectarmos o grafo H_n , retirando a menor quantidade de vértices, devemos remover todos os seus vértices dominantes, ou seja, os $n - 6$ vértices que induzem o subgrafo K_{n-6} e os dois vértices que desconectam H_6 . Logo,

$$\kappa(H_n) = a(H_n) + 1,$$

isto é,

$$\kappa(H_n) - a(H_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7.$$

Como o grafo H_6 possui conectividade algébrica $a(H_6) = 1$ e conectividade de vértices $\kappa(H_6) = 2$, então $\kappa(H_6) - a(H_6) = 1$. Desta forma,

$$\kappa(H_n) - a(H_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6. \quad \square$$

Proposição 4.8: *Seja G_6 o grafo exibido na Figura 4.19. Para $n \geq 7$, consideremos $G_n = K_{n-6} \vee G_6$. Então, para todo $n \geq 6$, G_n não é laplaciano integral, mas possui conectividade algébrica inteira. Além disso,*

$$\kappa(G_n) = a(G_n), \forall n \geq 6.$$

Prova: Observemos que $G_6 = K_1 \vee (K_1 \cup P_4)$ e, para $n \geq 7$, $G_n = K_{n-6} \vee G_6 = K_{n-6} \vee (K_1 \vee (K_1 \cup P_4)) = K_{n-5} \vee (K_1 \cup P_4)$.

Como $K_1 \cup P_4$ não é laplaciano integral, segue do Teorema 2.2 que, para todo $n \geq 6$, G_n não é laplaciano integral. Além disso, para todo $n \geq 6$,

$$\begin{aligned} a(G_n) &= \min\{a(K_{n-5}) + |V(K_1 \cup P_4)|, |V(K_{n-5})| + a(K_1 \cup P_4)\} \\ &= \min\{n - 5 + 5, n - 5 + 0\} \\ &= n - 5. \end{aligned}$$

Como $\kappa(G_n) = \kappa(K_{n-5} \vee (K_1 \cup P_4)) \leq n - 5 = a(G_n), \forall n \geq 6$, segue que

$$a(G_n) = \kappa(G_n), \forall n \geq 6.$$

□

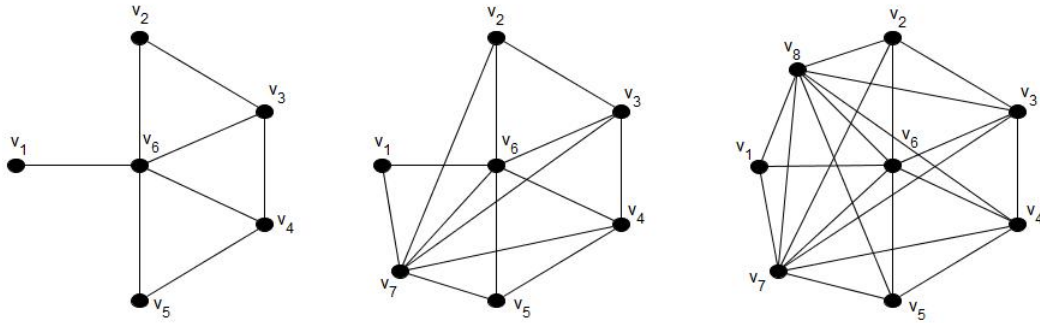


Figura 4.21: Grafos G_6, G_7 e G_8

Agora, consideremos o *grafo roda* R_n , ou seja, o grafo com n vértices, $n \geq 4$, resultante de um *join* entre K_1 e C_{n-1} . Observemos que o grafo G_6 pode ser obtido a partir do grafo roda R_6 , quando retiramos duas arestas adjacentes pertencentes ao seu subgrafo induzido isomorfo a C_5 . O grafo R_6 e o grafo G_6 não são laplacianos integrais, logo não são cografos. No entanto, se retirarmos duas arestas não adjacentes do subgrafo C_5 do R_6 (ou mais de duas arestas), eliminamos o seu subgrafo induzido isomorfo a P_4 e, conseqüentemente, o grafo resultante é um cografo, sendo então laplaciano integral.

De uma forma geral, seja R'_n o grafo obtido ao retirarmos arestas do subgrafo C_{n-1} do grafo roda. Temos as seguintes possibilidades de subgrafos de C_{n-1} : vértices isolados ou um caminho ou união de caminhos ou união de caminhos e vértices isolados. Desta forma, como o grafo roda $R_n = K_1 \vee C_{n-1}, \forall n \geq 4$, e o único caminho laplaciano integral, com $n \geq 3$, é o grafo P_3 (P_2 também é laplaciano integral), segue que R'_n é laplaciano integral se, e somente se, cada componente do grafo G_{n-1} resultante da retirada de arestas do seu subgrafo C_{n-1} tiver, no máximo, três vértices.

Nas Figuras 4.22, 4.23, 4.24 e 4.25, ilustramos os grafos roda com 4, 5, 6 e 7 vértices, respectivamente, bem como os subgrafos obtidos a partir da retirada de arestas dos seus subgrafos C_3, C_4, C_5 e C_6 , respectivamente.

Notemos que, no caso do R_4 , todos os seus subgrafos em questão são cografos. No entanto, o mesmo não ocorre com os grafos R_5, R_6 e R_7 . Destacamos, nas figuras 4.23, 4.24 e 4.25, os subgrafos que possuem o P_4 induzido pelos vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 .

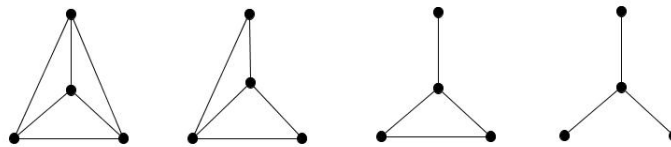


Figura 4.22: O grafo R_4 e os subgrafos obtidos a partir da retirada de arestas do seu subgrafo C_3 .

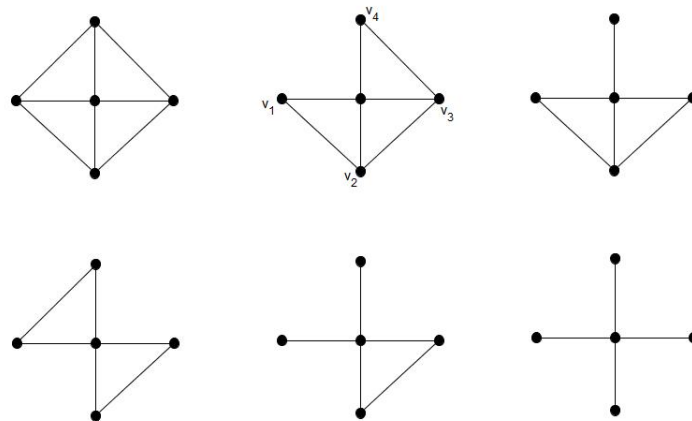


Figura 4.23: O grafo R_5 e os subgrafos obtidos a partir da retirada de arestas do seu subgrafo C_4 .

Vejamos, agora, a relação entre as conectividades algébrica e de vértices do grafo R'_n obtido de R_n a partir da retirada de arestas do seu subgrafo C_{n-1} .

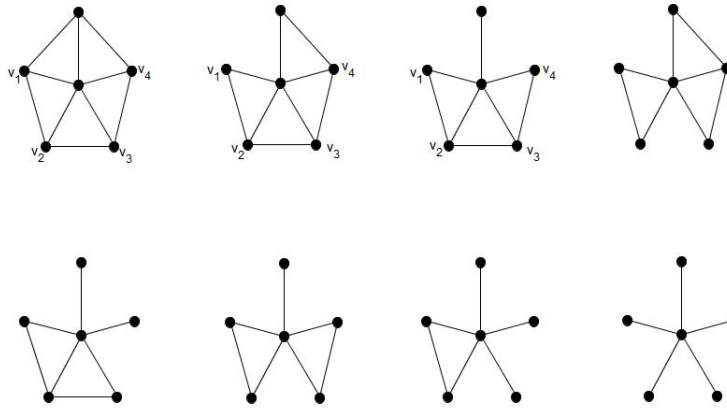


Figura 4.24: O grafo R_6 e os subgrafos obtidos a partir da retirada de arestas do seu subgrafo C_5 .

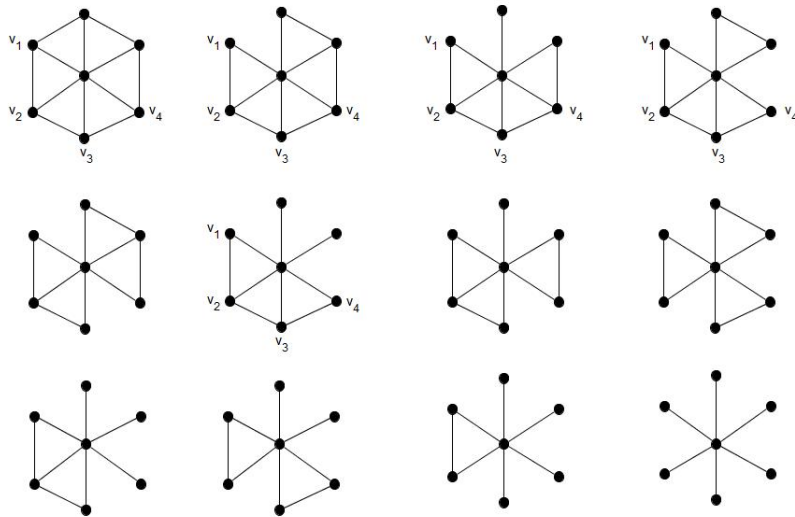


Figura 4.25: O grafo R_7 e os subgrafos obtidos a partir da retirada de arestas do seu subgrafo C_6 .

Proposição 4.9: *Sejam $G_{n-1} \subseteq C_{n-1}$, o grafo resultante da retirada de arestas de C_{n-1} , e $R'_n = G_{n-1} \vee K_1, \forall n \geq 4$. Então*

$$a(R'_n) = \kappa(R'_n)$$

se, e somente se, G_{n-1} é conexo e $n = 4$ (ou seja, G_{n-1} é o grafo obtido a partir da retirada de uma aresta de C_{n-1}) ou G_{n-1} é desconexo.

Prova: Como $R'_n = G_{n-1} \vee K_1$, segue do Teorema 2.2 que

$$a(R'_n) = \min\{a(G_{n-1}) + 1, 0 + n - 1\} = \min\{a(G_{n-1}) + 1, n - 1\}.$$

Por outro lado, como $G_{n-1} \subseteq C_{n-1}$, temos pelo Corolário 3.2 que

$$a(G_{n-1}) \leq a(C_{n-1}) = 2(1 - \cos(2\pi/n - 1)) \leq 2.$$

Portanto,

$$a(R'_n) = a(G_{n-1}) + 1, \forall n \geq 4.$$

Logo, $a(R'_n) \in \mathbb{N}$ se, e somente se, $a(G_{n-1}) \in \mathbb{N}$.

Temos duas possibilidades para G_{n-1} :

(i) G_{n-1} é conexo:

Neste caso, $G_{n-1} \simeq P_{n-1}$ e $a(G_{n-1}) \in \mathbb{N}$ se, e somente se, $n = 4$ e

$$a(G_3) = a(P_3) = 2(1 - \cos(\pi/3)) = 1.$$

Segue que

$$a(R'_4) = 2 = \kappa(R'_4).$$

(ii) G_{n-1} é desconexo:

Neste caso, $a(G_{n-1}) = 0$. Logo, $a(R'_n) = 1 = \kappa(R'_n)$.

□

Corolário 4.2: *Se $n \geq 6$ e R'_n é obtido de $R_n = K_1 \vee C_{n-1}$ pela remoção de duas arestas adjacentes do subgrafo C_{n-1} , ou seja, $R'_n = K_1 \vee (K_1 \cup P_{n-2})$, então R'_n não é laplaciano integral e satisfaz*

$$a(R'_n) = \kappa(R'_n).$$

Observemos que o grafo G_6 é obtido da roda R_6 pela remoção e duas arestas adjacentes do subgrafo C_5 , ou seja, $G_6 = R'_6$. No nosso próximo resultado, mostramos que podemos generalizar a construção apresentada na Proposição 4.8.

Proposição 4.10: *Seja $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq 6$. Para cada $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, consideremos $G'_n = K_{n-n_0} \vee R'_{n_0}$. Então, para todo $n \geq n_0$, temos que G'_n não é laplaciano integral, mas possui conectividade algébrica inteira. Além disso,*

$$\kappa(G'_n) = a(G'_n), \forall n \geq n_0.$$

Prova: Seja $n_0 > 6$ e tomemos $R'_{n_0} = K_1 \vee (K_1 \cup P_{n_0-2})$. Como $G'_n = K_{n-n_0} \vee R'_{n_0}, \forall n > n_0$, segue que $G'_n = K_{n+1-n_0} \vee (K_1 \cup P_{n_0-2}), \forall n \geq n_0$. Temos, então, que

$$\kappa(G'_n) \leq n + 1 - n_0$$

e

$$\begin{aligned} a(G'_n) &= \min\{a(K_{n+1-n_0}) + n_0 - 1, a(K_1 \cup P_{n_0-2}) + n + 1 - n_0\} \\ &= \min\{n + 1 - n_0 + n_0 - 1, n + 1 - n_0\} \\ &= \min\{n, n + 1 - n_0\} \\ &= n + 1 - n_0, \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\kappa(G'_n) = a(G'_n), \forall n \geq n_0.$$

□

Capítulo 5

Conclusões

A importância da conectividade algébrica como um invariante de um grafo, associado a diversos outros, consiste na motivação deste trabalho.

No Capítulo 3, exibimos resultados da literatura que relacionam a conectividade algébrica de um grafo com a sua conectividade de vértices, com destaque para o Teorema 3.2 (KIRKLAND *et al.*, [15]), que caracteriza os grafos conexos, não-completos, para os quais as duas conectividades coincidem. A partir destes resultados, seguimos em busca de grafos cuja conectividade algébrica fosse inteira. Desta forma, nas Seções 4.1.1 e 4.1.2 do Capítulo 4, estudamos os grafos laplacianos integrais threshold e, de uma forma geral, os cografos e provamos, na Proposição 4.4, que estes grafos satisfazem o Teorema 3.2.

Na Seção 4.1.3, exibimos uma família infinita de grafos laplacianos integrais que satisfaz a relação $a(G_j) = \kappa(G_j) - 1, \forall j \in \mathbb{N}$ e na seção 4.1.4, pesquisamos os grafos cubo m-dimensional C^m , também laplacianos integrais, mas que satisfazem a igualdade $a(G_j) = \kappa(G_j) - j, \forall j \in \mathbb{N}$.

Na Seção 4.2, vimos que é possível construir famílias infinitas de grafos não laplacianos integrais de forma que cada um deles apresente a conectividade algébrica inteira. Construimos famílias que satisfazem o Teorema 3.2 e outra que não satisfaz as suas hipóteses.

A busca por outras famílias de grafos que possuam conectividade algébrica inteira constitui o ponto inicial para a continuação deste trabalho. Pretendemos pesquisar estas famílias e analisar as propriedades que apresentam para, se possível, caracterizá-las.

Referências Bibliográficas

- [1] ABREU, N. M. M., 2007, “ Old and new results on algebraic connectivity of graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, v.423, pp. 53–73.
- [2] ABREU, N., DEL-VECCHIO, R., VINAGRE, C., STEVANOVIC, D., 2007, Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações. Notas em Matemática Aplicada. SBMAC. São Paulo.
- [3] BOAVENTURA-NETTO, P. O., 2006, Grafos: teoria, modelos, algoritmos. 4ed. São Paulo, Edgar Blücher.
- [4] BRETSCHER, A., CORNEIL, D., HABIB, M., PAUL, C., 2008, “A Simple Linear Time LexBFS Cograph Recognition Algorithm”, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 22, n.4, pp. 1277-1296.
- [5] CORNEIL, D. G., LERCHS, H., BURLINGHAM, L. S., 1981, “Complement Reducible Graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 3, pp. 163 – 174.
- [6] CVETKOVIC, D. M., DOOB, M., SACHS, H., 1980, Spectra of graphs: theory and application, Academic Press, Michigan University.
- [7] DONADELLI, J., 2007, Métodos de Álgebra Linear em Teoria de Grafos, Relatório Técnico, Curitiba.
- [8] FIEDLER, M., 1973, “Algebraic connectivity of graphs”, *Czechoslovak Mathematical Journal*, v. 23, n.2, pp. 298 - 305.
- [9] FREITAS, M., KIRKLAND, S., DEL-VECCHIO, R., ABREU, N., 2010, “Split non-threshold Laplacian integral graphs”, *Linear and Multilinear Algebra*, v. 58, pp. 221-233.
- [10] GRONE, R., MERRIS, R., SUNDEERS, V. S., 1994, “The Laplacian spectrum of a graph II”, *SIAM J. Discrete Math.*, v. 7, pp. 221-229.
- [11] GROSS, J., YELLEN, J., 2000, Graph Theory and Its Applications. CRC Press.

- [12] HARARY, F., SCHWENK, A. J.: Which graphs have integral spectra?. In: Graphs and Combinatorics. Lecture Notes in Math. 406, Springer-Verlag, Berlin, 1974, pp. 45-51.
- [13] HORN, R. A., JOHNSON, C. R., 2013, Matrix Analysis. 2ed. Cambridge University Press, New York.
- [14] JUNG, H. A., 1978, "On a Class of Posets and the Corresponding Comparability Graphs", *Journal of Combinatorial Theory*, pp. 125 – 133.
- [15] KIRKLAND, S. J., MOLITIERNO, J. J., NEUMANN, M., SHADER, B. L., 2002, "On graphs with equal algebraic and vertex connectivity", *Linear Algebra and its Applications*, v. 341, pp. 45-56.
- [16] MAHADEV, N. V. R., PELED, U. N., 1995, "Threshold Graphs and Related Topics", *Annals of Discrete Mathematics*, v. 56.
- [17] MERRIS, R., 1994, "Degree maximal graphs are Laplacian integral", *Linear Algebra and its Applications*, v. 199, pp. 381-389.
- [18] MERRIS, R., 1998, "Laplacian graph eigenvectors", *Linear Algebra and its Applications*, v. 278, pp. 221-236.
- [19] READ, R. C., WILSON, R. J., 1998, An Atlas of Graphs. Clarendon Press, Oxford.
- [20] SEINSCHE, D., 1974, "On a Property of the Class of n-Colorable Graphs", *Journal of Combinatorial Theory*, v. 16, pp. 191-193.
- [21] SUMNER, D. P., 1973, "Dacey Graphs", *Journal of the Australian Mathematical Society*, v. 18.